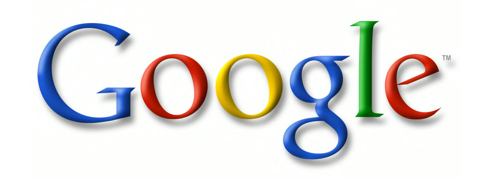


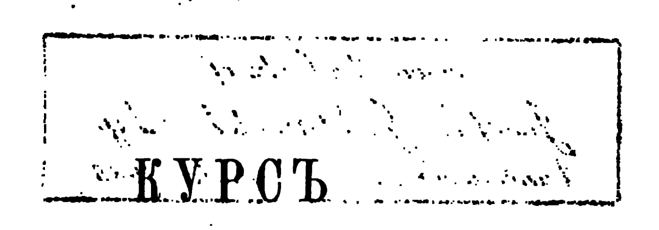


D.Bobylev

ANALYTIC MECHANICS
Vol.II

1888

Russian



КУРСЪ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

II

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ:

МЕХАНИКА МАТЕРЬЯЛЬНОЙ ТОЧКИ.

(СЪ ОДНИМЪ ЛИСТОМЪ ЧЕРТЕЖЕЙ).

2-Е ИЗДАНІЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2 лин., 7.

1888.



1468

ОГЛАВЛЕНІЕ

ПЕРВАГО ВЫПУСКА

Части кинетической.

§§ Стр.

ГЛАВА II. Основныя начала механики свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

ГЛАВА III. Механика свободной матерьяльной точки.

§§ Стр.

ГЛАВА IV. Механика несвободной матерьяльной точки.

304



II

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

МЕХАНИКА МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ И СИСТЕМЪ, ИЗЪ НИХЪ СОСТАВЛЕННЫХЪ.

Кинетика *) имѣетъ цѣлью изученіе зависимости между кинематическимъ состояніемъ матеріи, обладающей предполагаемыми свойствами, и причинами, обусловливающими это состояніе.

Подъ словами: «кинематическое состояніе матеріи» мы здѣсь подразумѣваемъ видъ движенія матеріи движущейся, или положеніе и строеніе матеріи покоющейся.

Предположенія о свойствахъ, которыя мы представляемъ себѣ присущими матеріи, рождаются въ насъ путемъ наведенія, изъ знанія явленій природы, почерпаемыхъ изъ наблюденій и опытовъ.

Тѣмъ же путемъ и изъ тѣхъ же источниковъ мы составляемъ себѣ представленіе о свойствахъ причинъ такихъ кинематическихъ состояній матеріи, которыя не объясняются единственно только допущенными уже свойствами ея; такія причины мы называемъ дѣятелями или силами.

Составленныя предположенія о свойствахъ матеріи и дѣятелей называются гипотезами; основываясь на нихъ, кинетика, путемъ математической дедукціи, показываетъ, въ какомъ кинематическомъ состояніи будутъ находиться данныя матерьяльныя тѣла при дѣйствіи на нихъ данныхъ дѣятелей, или обратно, опредѣляетъ, при дѣйствіи какихъ дѣятелей данныя тѣла могутъ находиться въ данномъ кинематическомъ состояніи.

---

*) Терминъ „кинетика“ происходитъ отъ слова κίνησις, означающаго произведеніе движенія, между тѣмъ какъ терминъ „кинематика“ производится отъ слова κίνημα, означающаго состояніе движенія.

Цѣль этихъ выводовъ кинетики есть объясненіе наблюденныхъ фактовъ на основаніи сдѣланныхъ гипотезъ, и предсказаніе фактовъ незамѣченныхъ или не наблюдавшихся.

Каждая удача въ объясненіи или въ предсказаніи фактовъ увеличиваетъ вѣроятность одной или нѣсколькихъ изъ сдѣланныхъ гипотезъ.

Тѣ изъ гипотезъ кинетики, которыя относятся ко всякой матеріи или ко всякимъ дѣятелямъ и въ несомнѣнности которыхъ мы убѣждаемся по мѣрѣ бо̀льшаго ознакомленія съ явленіями, принимаются за основныя истины природы, которымъ подчинены всѣ явленія физическаго міра; эти гипотезы называются *основными началами или основными принципами механики.*

Изложеніе сущности тѣхъ основныхъ началъ и опредѣленій, на которыхъ основывается механика свободнаго тѣла, движущагося поступательно, составляетъ содержаніе первой главы.

ГЛАВА I.

Основные принципы механики и опредѣленія, относящіяся къ свободному матерьяльному тѣлу, движущемуся поступательно и къ которому силы приложены однородно.

§ 1. Начало инерціи матеріи. Силы.

Инерція есть свойство матеріи, всегда и неотъемлемо присущее ей.

Существованіе этого свойства въ матеріи мы принимаемъ, какъ одинъ изъ основныхъ принциповъ механики, который мы формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Основное начало A: Всякая точка матерьяльнаго тѣла имѣетъ стремленіе сохранить безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія.

Всякое состояніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ ни одна изъ точекъ его не измѣняетъ своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію, возможно по свойству инерціи матеріи и объясняется этимъ свойствомъ; слѣдовательно:

по свойству инерціи тѣло можетъ находиться въ абсолютномъ покоѣ;

по свойству инерціи оно можетъ совершать абсолютное поступательное движеніе, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно;

кромѣ того, мыслимо еще безчисленное множество другихъ движеній матерьяльнаго тѣла, при которыхъ ни одна точка тѣла не измѣняетъ ни величины, ни направленія абсолютной скорости (то есть не имѣетъ ускоренія), скорости же различныхъ точекъ различны и различно направлены; всѣ такія движенія матерьяльнаго тѣла, хотя и возможны по свойству инерціи матеріи, но необходимо сопровождаются деформаціями его; мы же, въ настоящей главѣ, будемъ говорить только о такихъ состояніяхъ матерьяльнаго тѣла, при которыхъ оно не деформируется, а потому въ разсмотрѣніе движеній, сопровождающихся деформаціями, не войдемъ.

Всякое такое движеніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ хотя одна точка тѣла имѣетъ ускореніе, или измѣняетъ свою скорость, не можетъ быть объяснено свойствомъ инерціи матеріи; измѣненіе скорости или появленіе ускоренія мы приписываемъ особымъ причинамъ, которыя мы называемъ *силами*.

Что такое силы, въ чемъ заключается сущность ихъ — мы не знаемъ; мы можетъ знать только дѣйствія, ими производимыя и состоящія въ томъ, что онѣ сообщаютъ абсолютныя ускоренія точкамъ матеріи и измѣняютъ величины и направленія ихъ скоростей; если мы замѣчаемъ, что какая-либо точка матеріи получаетъ абсолютное ускореніе, или измѣняетъ свою абсолютную скорость, то заключаемъ, что на эту точку дѣйствуютъ нѣкоторыя силы.

Ни одна точка матерьяльнаго тѣла не можетъ получить абсолютнаго ускоренія и не можетъ измѣнить своей скорости, пока на нее не станетъ дѣйствовать какая-либо сила.

Стремленіе точекъ матеріи сохранить имѣющіяся скорости сказывается и во время дѣйствія на нихъ силъ; каждая точка матеріи измѣняетъ свою скорость не вдругъ, но постепенно, даже при такихъ силахъ, которыя производятъ наиболѣе быстрое измѣненіе скоростей.

По прекращеніи дѣйствія силы, точка матеріи сохраняетъ ту скорость, которую она имѣла въ моментъ прекращенія дѣйствія силы.

Изъ сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что *матерьяльное тѣло, ни на одну точку котораго не дѣйствуютъ никакія силы, если не деформируется, то пребываетъ по инер-*

ціи либо въ абсолютномъ покоѣ, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно.

Мы будемъ называть матерьяльное тѣло *свободнымъ*, если оно можетъ двигаться поступательно по инерціи по всевозможнымъ направленіямъ и съ какими бы то ни было скоростями.

Матерьяльное тѣло можетъ быть свободно во всемъ неограниченномъ пространствѣ, или внутри нѣкоторой части его, на предѣлахъ которой оно встрѣчаетъ другія матерьяльныя тѣла или вообще какія-либо препятствія, мѣшающія его поступательному движенію по инерціи въ нѣкоторыхъ направленіяхъ.

§ 2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-приложенныя къ тѣлу; ихъ величины и направленія.

Всякая сила, дѣйствующая на какое-либо матерьяльное тѣло, имѣетъ въ немъ нѣкоторое *мѣсто приложенія;* подъ этимъ именемъ мы подразумѣваемъ тѣ части объема тѣла, всѣ точки которыхъ получаютъ ускоренія непосредственно отъ той силы, о которой идетъ рѣчь.

Ускоренія, получаемыя разными точками мѣста приложенія силы, могутъ быть неодинаковы; это можетъ зависѣть, какъ отъ свойствъ силы, такъ и отъ тѣхъ обстоятельствъ, въ которыхъ находится матерьяльное тѣло.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о такихъ силахъ, каждая изъ которыхъ прилагается сразу ко всѣмъ точкамъ свободнаго матерьяльнаго тѣла и притомъ *сообщаетъ имъ всѣмъ одинаковыя и параллельныя ускоренія;* всякую такую силу мы будемъ называть *однородно-приложенною къ тѣлу* или просто *однородною силою.*

Примѣромъ однородныхъ силъ можетъ служить сила тяжести всякаго тѣла, сообщающая, какъ извѣстно, всѣмъ точкамъ тѣла равныя и параллельныя между собою ускоренія.

Такую однородную силу, которая сообщаетъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла ускоренія всегда одной и той же величины и всегда параллельно неизмѣнному направленію въ пространствѣ, мы будемъ называть *постоянною однородною силою;* различныя по-

стоянныя однородныя силы, прилагаемыя къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, могутъ различаться величинами и направленіями сообщаемыхъ ими ускореній.

Непостоянными **или** ***перемѣнными однородными силами*** **мы будемъ называть такія, которыя, хотя и сообщаютъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла взаимно-равныя и параллельныя ускоренія, но величины этихъ ускореній и направленія ихъ измѣняются съ теченіемъ времени.**

Всякая постоянная или непостоянная однородная сила, будучи приложена къ свободному матерьяльному тѣлу, находившемуся въ абсолютномъ покоѣ, или въ абсолютномъ поступательномъ движеніи по инерціи, необходимо сообщитъ этому тѣлу нѣкоторое поступательное движеніе *).

---

*) Весьма легко доказать, что, при сказанныхъ условіяхъ, линія, соединяющая каждыя двѣ точки тѣла, сохранитъ свою длину и направленіе во все время движенія тѣла.

Пусть $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$, суть координаты двухъ какихъ-либо точекъ тѣла въ моментъ t; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$—координаты ихъ въ моментъ t_0, въ который начала дѣйствовать на тѣло однородная сила.

Такъ какъ, въ каждый моментъ дѣйствія однородной силы, ускоренія всѣхъ точекъ тѣла равны и параллельны, то:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{x}_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2\mathfrak{y}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2\mathfrak{z}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}_1}{dt^2}.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t, мы получимъ:

$$\mathfrak{x}'_2 - \mathfrak{x}'_1 = (\mathfrak{x}'_2)_0 - (\mathfrak{x}'_1)_0; \quad \mathfrak{y}'_2 - \mathfrak{y}'_1 = (\mathfrak{y}'_2)_0 - (\mathfrak{y}'_1)_0; \quad \mathfrak{z}'_2 - \mathfrak{z}'_1 = (\mathfrak{z}'_2)_0 - (\mathfrak{z}'_1)_0;$$

гдѣ $(\mathfrak{x}'_2)_0$, $(\mathfrak{y}'_2)_0$, $(\mathfrak{z}'_2)_0$, $(\mathfrak{x}'_1)_0$, $(\mathfrak{y}'_1)_0$, $(\mathfrak{z}'_1)_0$ означаютъ проэкціи на оси координатъ скоростей обѣихъ точекъ въ моментъ t_0; такъ какъ въ этотъ моментъ всѣ точки тѣла, по предположенію, имѣютъ скорости равныя и параллельныя, то:

$$\mathfrak{x}'_2 = \mathfrak{x}'_1; \quad \mathfrak{y}'_2 = \mathfrak{y}'_1; \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}'_1.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t, мы получимъ:

$$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1; \quad \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1.$$

Эти равенства и выражаютъ, что линія, соединяющая обѣ точки, сохраняетъ свою длину и направленіе; а это можетъ быть только при поступательномъ движеніи тѣла.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствію однородныхъ силъ, находятся въ покоѣ или въ поступательномъ движеніи; говоря здѣсь объ ускореніи или о скорости одной изъ точекъ тѣла, мы можемъ подразумѣвать произвольную точку его, такъ какъ всѣ точки тѣла, движущагося поступательно, имѣютъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени одинаковыя ускоренія и одинаковыя скорости; въ виду этого, для сокращенія рѣчи, вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость и ускореніе нѣкоторой точки тѣла, движущагося поступательно», мы будемъ выражаться короче: «скорость и ускореніе тѣла».

Положимъ, что въ нашемъ распоряженіи имѣется нѣсколько однородныхъ силъ:

№ 1-й, № 2-й, № 3-й, ...

которыя, по нашей волѣ, могутъ быть приложены къ одному и тому же свободному матерьяльному тѣлу *A*, находящемуся, до приложенія къ нему силъ, въ покоѣ, или въ поступательномъ движеніи по инерціи. Предполагается, что можемъ приложить каждую изъ этихъ силъ порознь, отдѣльно отъ прочихъ, и что можемъ также, если понадобится, приложить нѣсколько изъ этихъ силъ одновременно къ тому же тѣлу *A*.

Прилагая къ тѣлу *A* каждую изъ этихъ силъ отдѣльно отъ прочихъ и наблюдая поступательное движеніе, совершаемое этимъ тѣломъ, мы можемъ, по виду движенія которой-либо изъ точекъ его, опредѣлить во всякій моментъ движенія величину и направленіе ускоренія, сообщаемаго этою однородною силою всѣмъ точкамъ тѣла.

Изъ такихъ наблюденій, положимъ, окажется, что силы № 1-й, № 2-й, № 3-й, ... сообщаютъ тѣлу *A* ускоренія неодинаковой величины и неодинаковаго направленія; притомъ въ числѣ этихъ силъ могутъ оказаться какъ постоянныя, такъ и перемѣнныя однородныя силы.

Видя такое различіе въ количественномъ отношеніи между дѣйствіями этихъ силъ на одно и то же тѣло, мы вправѣ заключить, что существуетъ нѣкоторое количественное различіе и въ самыхъ силахъ.

I-2.

Такъ какъ мы не знаемъ существа силъ, а только ихъ дѣйствія, то намъ приходится составлять себѣ количественное представленіе о силахъ по производимымъ ими дѣйствіямъ, то есть по тѣмъ ускореніямъ, которыя онѣ сообщаютъ свободному матерьяльному тѣлу.

Мы представляемъ себѣ, что однородно-приложенныя ко всякому тѣлу силы имѣютъ, подобно ускореніямъ, *величины* и *направленія*. Значенія этихъ понятій мы выразимъ слѣдующими опредѣленіями.

Опредѣленіе *a*: Подъ направленіемъ силы, однородно-приложенной къ какому-либо тѣлу, мы подразумѣваемъ то направленіе, по которому она сообщаетъ ускоренія всѣмъ точкамъ этого тѣла, когда оно свободно. Постоянная сила имѣетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

Опредѣленіе *b*: Силамъ, однородно-приложеннымъ къ одному и тому же тѣлу, мы приписываемъ величины, пропорціональныя величинамъ тѣхъ ускореній, которыя онѣ порознь сообщаютъ этому тѣлу, когда оно свободно. Постоянной силѣ, однородно-приложенной къ тѣлу, мы приписываемъ постоянную величину.

Начало, отделяющее классическую механику от неевкл. механики.

По 2-му опредѣленію *b* численное отношеніе между величинами двухъ постоянныхъ или непостоянныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу, равняется численному отношенію между величинами ускореній, сообщаемыхъ ими этому тѣлу, когда оно свободно.

Пусть силы № 1-й и № 2-й суть силы постоянныя; первая сообщаетъ тѣлу A ускореніе $\dot{v}_1$ по опредѣленному направленію, вторая — ускореніе $\dot{v}_2$ по иному направленію; на основаніи вышесказаннаго мы заключимъ, что:

$$\frac{(\text{Величина силы № 2})}{(\text{Величина силы № 1})} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$(\text{Величина силы № 2}) = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}\,(\text{Велич. силы № 1}) \ldots \quad (2)$$

Относительно непостоянныхъ однородныхъ силъ намъ придется

заключить, что онѣ имѣютъ величины и направленія, измѣняющіяся съ теченіемъ времени; но, въ каждый опредѣленный моментъ времени, всякая однородно-прилагаемая къ тѣлу A сила имѣетъ опредѣленное направленіе, совпадающее съ направленіемъ ускореній, сообщаемыхъ ею въ этотъ моментъ всѣмъ точкамъ этого свободнаго тѣла, и опредѣленную величину, численное отношеніе которой къ величинѣ силы № 1 равно:

$$\frac{\dot{v}}{\dot{v}_1},$$

гдѣ $\dot{v}$ есть величина ускоренія, сообщаемаго сказанною силою тѣлу A въ разсматриваемый моментъ времени.

Такимъ образомъ мы составляемъ себѣ представленіе объ относительной величинѣ различныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу; мы можемъ сказать, что измѣряемъ величины этихъ силъ величиною одной изъ нихъ, подобно тому, какъ мы измѣряемъ длины—единицею длины, скорости—единицею скорости и ускоренія—единицею ускоренія.

Величина каждой однородной силы, прилагаемой къ тѣлу A, выразится у насъ именованнымъ числомъ въ величинѣ той изъ нихъ, которую мы примемъ за единицу этихъ силъ; такъ, напримѣръ, именованныя числа:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й)}; \quad \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й)}$$

выражаютъ величины силъ № 2-й и № 3-й въ величинѣ силы № 1-й; знакъ:—(Велич. силы № 1-й) есть символъ, означающій величину силы однородно-приложенной къ тѣлу A и сообщающей ему ускореніе $\dot{v}_1$, отношенія же:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}, \quad \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1}$$

суть отвлеченныя числа.

Для болѣе краткаго обозначенія величинъ и направленій различныхъ силъ мы примемъ буквенныя обозначенія; а именно, величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу A мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$F1_A$ будетъ означать величину силы № 1-й сообщ. тѣлу A уск. $\dot{v}_1$,
$F2_A$ „ „ „ „ № 2-й „ „ A „ $\dot{v}_2$,
$F3_A$ „ „ „ „ № 3-й „ „ A „ $\dot{v}_3$,
. . . .

Надо имѣть въ виду, что эти символы означаютъ именованныя числа, единицею наименованія которыхъ служитъ величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же символовъ, численныя же отношенія между величинами, изображаемыми этими символами, суть отвлеченныя числа или дроби:

$$\frac{F2_A}{F1_A}=\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1};\ \frac{F3_A}{F1_A}=\frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1};\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Направленія силъ условимся обозначать тѣми же самыми знаками, какъ и величины силъ, подобно тому, какъ мы обозначаемъ одною и тою же буквою величину и направленіе ускоренія; поэтому:

$$\cos(F1_A, X),\ \cos(F1_A, Y),\ \cos(F1_A, Z)$$

будутъ означать косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ силы № 1, однородно-приложенной къ тѣлу A.

Величины однородныхъ силъ: №№ n, $(n+1)$, $(n+2)$, . . ., прилагающихся къ другому тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n$, $\dot{v}_{(n+1)}$, $\dot{v}_{(n+2)}$, ... выражаются, на основаніи опредѣленія b, въ величинѣ одной изъ этихъ же силъ. Означимъ величины и направленія ихъ символами: Fn_B, $F(n+1)_B$, $(Fn+2)_B$, ... ; каждый изъ этихъ символовъ, когда онъ есть знакъ величины силы, представляетъ нѣкоторое именованное число, единицею наименованія котораго служитъ величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же символовъ (напримѣръ, Fn_B=велич. силы № n); численныя же отношенія между величинами этихъ силъ суть отвлеченныя дроби:

$$\frac{F(n+1)_B}{Fn_B}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_n};\ \frac{F(n+2)_B}{Fn_B}=\frac{\dot{v}_{(n+2)}}{\dot{v}_n};\ \ldots\ldots \quad (3\ \text{bis})$$

§ 3. Начало параллелограмма силъ, однородно-приложенныхъ къ тѣлу. Силы составляющія и равнодѣйствующая. Равновѣсіе силъ.

Въ предъидущемъ параграфѣ, говоря о дѣйствіи на свободное тѣло силъ однородно-приложенныхъ къ нему, мы предполагали, что каждая изъ нихъ можетъ быть приложена къ тѣлу или отнята отъ него по нашему желанію; при такомъ условіи мы можемъ подвергать тѣло дѣйствію каждой изъ однородныхъ силъ въ отдѣльности. Однако встрѣчаются такія однородныя силы какъ напримѣръ силы тяжести, которыя постоянно приложены къ тѣлу и отъ вліянія которыхъ мы не въ состояніи освободить тѣло; въ такихъ случаяхъ придется нерѣдко разсматривать движеніе тѣла при дѣйствіи двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ тѣлу.

Одновременное дѣйствіе нѣсколькихъ одновременно-приложенныхъ къ тѣлу силъ опредѣляется слѣдующимъ основнымъ принципомъ механики:

Основное начало *B*: Ускореніе, сообщаемое каждой точкѣ свободнаго тѣла несколькими одновременно-приложенными къ нему однородными силами, есть геометрическая сумма *), составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ тѣлу порознь.

Иначе говоря, это начало утверждаетъ, что каждая изъ одновременно-приложенныхъ однородныхъ силъ сообщаетъ тѣлу ускореніе той же величины и того же направленія, какъ бы она дѣйствовала отдѣльно, и что всѣ такія ускоренія, сообщаемыя одновременно одному тѣлу, слагаются геометрически въ одно уско-

---

*) Въ § 32 кинематической части этой книги объяснено было значеніе геометрическаго сложенія; кромѣ того въ той части намъ случалось неоднократно говорить объ этомъ дѣйствіи, какъ въ примѣненіи къ скоростямъ, такъ и въ примѣненіи къ ускореніямъ; поэтому мы здѣсь предполагаемъ, что смыслъ этого термина совершенно понятенъ читателю.

реніе, дѣйствительно принимаемое свободнымъ тѣломъ; конечно, всѣ точки тѣла получаютъ равныя и параллельныя геометрически-сложныя ускоренія, такъ какъ всѣ приложенныя къ тѣлу силы предполагаются однородными.

Ускореніе, сообщаемое свободному тѣлу нѣсколькими однородными силами, приложенными къ нему одновременно, можетъ быть сообщено ему одною однородною силою, которая называется *равнодѣйствующею* этихъ силъ; эти же силы, по отношенію къ ихъ равнодѣйствующей, называются *составляющими силами.*

Основываясь на началѣ *B*, мы можемъ выработать правило для опредѣленія величины и направленія равнодѣйствующей по величинамъ и направленіямъ составляющихъ силъ.

Предположимъ, что къ тѣлу *A* одновременно приложены однородныя силы:

№ 2, № 3, ... № k,

о величинахъ и направленіяхъ которыхъ мы говорили въ предъидущемъ параграфѣ; если тѣло *A* свободно, то, по началу *B*, оно получитъ такое ускореніе $\dot{v}$, проэкціи котораго на оси координатъ будутъ равны проэкціямъ на нихъ ускореній $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, ... $\dot{v}_k$; то есть:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}X) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2X)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3X)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kX) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}У) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2У)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3У)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kУ) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2Z)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3Z)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kZ) \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Ускоренія $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, ... $\dot{v}_k$ суть тѣ самыя, которыя сообщаются свободному дѣлу *A* силами № 2, № 3, ... № k въ отдѣльности; поэтому:

$$\dot{v}_2=\frac{F2_A}{F1_A}\dot{v}_1,\quad \dot{v}_3=\frac{F3_A}{F1_A}\dot{v}_1,\ \ldots\ldots\ldots\ \dot{v}_k=\frac{Fk_A}{F1_A}\dot{v}_1,\ \ldots\ (5)$$

направленія их совпадаютъ съ направленіями этихъ силъ.

$$\left.\begin{aligned} \cos(\dot{v}_2X) &= \cos(F2_A,X), & \cos(\dot{v}_3X) &= \cos(F3_A,X), \\ \cos(\dot{v}_2У) &= \cos(F2_A,У), & \cos(\dot{v}_3У) &= \cos(F3_A,У), \\ \cos(\dot{v}_2Z) &= \cos(F2_A,Z), & \cos(\dot{v}_3Z) &= \cos(F3_A,Z), \end{aligned}\right\};\ \ldots (6)$$

слѣдовательно, можно представить равенства (4) слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\dot v\cos(\dot vX)&=\frac{\dot v_1}{F1_A}\Big(F2_A\cos(F2_A,X)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,X)\Big)\\ \dot v\cos(\dot vУ)&=\frac{\dot v_1}{F1_A}\Big(F2_A\cos(F2_A,У)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,У)\Big)\\ \dot v\cos(\dot vZ)&=\frac{\dot v_1}{F1_A}\Big(F2_A\cos(F2_A,Z)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,Z)\Big)\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Ускореніе $\dot v$ можетъ быть сообщено свободному тѣлу A одною однородно-приложенною къ нему силою, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ $\dot v$ и величина которой равна:

$$F_A=\frac{\dot v}{\dot v_1}F1_A;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

эта сила F_A и есть равнодѣйствующая составляющихъ однородныхъ силъ: $F2_A$, $F3_A$,… Fk_A.

Такъ какъ, по нашему знакоположенію, знакъ F_A служитъ для обозначенія не только величины силы, но еще и ея направленія, то:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\dot vX)&=\cos(F_A,X)\\ \cos(\dot vУ)&=\cos(F_A,У)\\ \cos(\dot vZ)&=\cos(F_A,Z)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

На основаніи (8) и (9), изъ равенствъ (7) слѣдуютъ равенства.

$$\left.\begin{aligned}F_A\cos(F_AX)&=F2_A\cos(F2_A,X)+F3_A\cos(F3_A,X)+\ldots\\&\qquad\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,X)\\ F_A\cos(F_AУ)&=F2_A\cos(F2_A,У)+F3_A\cos(F3_A,У)+\ldots\\&\qquad\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,У)\\ F_A\cos(F_AZ)&=F2_A\cos(F2_A,Z)+F3_A\cos(F3_A,Z)+\ldots\\&\qquad\ldots+Fk_A\cos(Fk,_AZ)\end{aligned}\right\},\ldots (10)$$

выражающія величину и направленіе равнодѣйствующей въ величинахъ и направленіяхъ составляющихъ силъ.

Величины и направленія силъ, однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу, можно изображать длинами, откладываемыми по направленіямъ силъ отъ какой-либо одной и той же точки тѣла; каждая длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ величина изображаемой ею силы болѣе величины той силы, которую мы приняли за единицу силъ, прилагаемыхъ къ этому тѣлу.

Изображая силы длинами, мы можемъ поступать съ ними какъ съ ускореніями, то есть проэктировать ихъ на направленія или на плоскости и производить надъ ними геометрическія сложенія и вычитанія.

Проэкціею силы F_A на ось X мы называемъ силу, имѣющую величину: $F_A \cos (F_A X)$, и направленную параллельно положительной или отрицательной оси X, смотря потому, имѣетъ ли cos положительную или отрицательную величину.

Проэкція силы F_A на ось X изображается проэкціею на ту же ось длины, представляющей эту силу.

Каждое изъ равенствъ (10) выражаетъ, что проэкція на одну изъ осей координатъ равнодѣйствующей F_A равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ: $F2_A$, $F3_A$, ... Fk_A.

Изъ этого слѣдуетъ, что длины, изображающія силы F_A, $F2_A$, $F3_A$,.. .. Fk_A имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый многоугольникъ.

Слѣдовательно, *длина, изображающая равнодѣйствующую* F_A, *есть геометрическая сумма длинъ, изображающихъ составляющія силы:* $F2_A$, $F3_A$ . . . . . Fk_A.

Если къ тѣлу одновременно приложены только двѣ однородныя силы, то равнодѣйствующая ихъ изобразится діагональю параллелограмма, стороны котораго изображаютъ величины и направленія приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Построеніе длины, изображающей равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ, можно сдѣлать послѣдовательнымъ образомъ: сначала построить, по правилу параллелограмма, равнодѣйствующую двухъ изъ приложенныхъ къ тѣлу силъ, затѣмъ, на полученной длинѣ и на длинѣ, изображающей третью силу, построить новый параллелограммъ, діагональ котораго изобразитъ равнодѣйствующую трехъ силъ, и т. д.; такимъ образомъ опредѣленіе величины и направленія равнодѣйствующей нѣсколькихъ однородно-приложенныхъ къ тѣлу силъ сводится на послѣдовательное примѣненіе правила параллелограмма; вслѣдствіе этого основное начало B называютъ *началомъ параллелограмма силъ.*

Если равнодѣйствующая однородныхъ силъ, одновременно приложенныхъ къ одному и тому же тѣлу, равна нулю, то тогда тѣло не получаетъ отъ совокупнаго дѣйствія ихъ никакого ускоренія; въ такихъ случаяхъ говорятъ, что *силы взаимно-уравновѣшиваются* или *находятся въ равновѣсіи*.

Свободное матерьяльное тѣло, къ которому одновременно приложено нѣсколько однородныхъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ, если не деформируется, то пребываетъ по инерціи либо въ абсолютномъ покоѣ, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно.

Равновѣсіе однородныхъ силъ: $F1_A$, $F2_A$, . . . Fp_A, одновременно приложенныхъ къ тѣлу A, выражается аналитически равенствами:

$$\left.\begin{array}{l} F1\cos(F1_A,X)+F2_A\cos(F2_A,X)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,X)=0 \\ F1\cos(F1_A,У)+F2_A\cos(F2_A,У)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,У)=0 \\ F1\cos(F1_A,Z)+F2_A\cos(F2_A,Z)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,Z)=0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

которыя могутъ быть замѣнены символическимъ равенствомъ:

$$\overline{F1}_A+\overline{F2}_A+\overline{F3}_A+\ldots+\overline{Fp}_A=0, \ldots\ldots \quad (12)$$

выражающимъ, что геометрическая сумма длинъ, изображающихъ уравновѣшивающіяся силы, равна нулю.

Точно также равновѣсіе однородныхъ силъ № n, № r, № s, . . . № q, одновременно приложенныхъ къ свободному тѣлу B, выражается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\overline{Fn}_B+\overline{Fr}_B+\overline{Fs}_B+\ldots+\overline{Fq}_B=0 \ldots\ldots \quad (13)$$

§ 4. Силы взаимнодѣйствія. Начало равенства однородныхъ и противоположныхъ силъ взаимнодѣйствія. Отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ.

На основаніи началъ и опредѣленій, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы измѣряемъ численныя отношенія между величинами однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу.

Теперь мы приведемъ начало, на основаніи котораго мы измѣряемъ отношенія между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ разнымъ тѣламъ; это начало относится къ силамъ взаимнодѣйствія между тѣлами и опредѣляетъ понятіе о равныхъ однородныхъ силахъ, приложенныхъ къ двумъ разнымъ тѣламъ.

Изученіе свойствъ тѣхъ силъ, дѣйствіемъ которыхъ объясняются явленія природы, показало, что величина и направленіе всякой силы, приложенной къ какому-либо матерьяльному тѣлу A, находятся въ опредѣленной зависимости отъ положенія, занимаемаго по отношенію къ тѣлу A нѣкоторымъ тѣломъ B, въ которомъ какъ будто бы заключается источникъ силы, приложенной къ A; одновременно съ силою, приложенною къ A и имѣющею своимъ источникомъ тѣло B, наблюдается сила, приложенная къ B и имѣющая своимъ источникомъ тѣло A.

Эти одновременныя силы, дѣйствующія между тѣлами, называются *силами взаимнодѣйствія* между ними.

Всѣ силы природы суть силы взаимнодѣйствія между тѣлами.

Между тѣлами конечныхъ размѣровъ, находящимися въ конечныхъ разстояніяхъ одно отъ другого, силы взаимнодѣйствія бываютъ по большей части силами неоднородно-приложенными къ тѣламъ; чѣмъ меньше размѣры тѣлъ и чѣмъ больше разстоянія между ними, тѣмъ ближе подходятъ эти силы къ однородности.

Представимъ себѣ, что имѣемъ такія тѣла, между которыми взаимнодѣйствія суть силы однородныя, такъ что къ тѣлу A приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ относительнаго положенія тѣла B по отношенію къ тѣлу A, и въ то же время къ тѣлу B приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ положенія тѣла A по отношенію къ тѣлу B.

Такія силы взаимнодѣйствія между двумя тѣлами мы предполагаемъ равными между собою, если направленія ихъ прямопротивоположны; это предположеніе составляетъ сущность одного изъ началъ механики, которое мы выразимъ такъ:

Основное начало C. Если взаимнодѣйствія между двумя тѣлами суть силы однородно-приложенныя къ нимъ и прямо-противоположныя одна другой, то эти силы равны по величинѣ.

Принявъ это начало, мы можемъ опредѣлить численныя отношенія между величинами какихъ-либо однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ A и B, если взаимнодѣйствія между этими тѣлами суть силы однородныя и прямопротивоположныя хотя бы при нѣкоторомъ одномъ только опредѣленномъ относительномъ положеніи ихъ.

Положимъ, что эти силы взаимнодѣйствія сообщаютъ: тѣлу A ускореніе $\dot{\mathfrak{v}}B_A$ и тѣлу B ускореніе $\dot{\mathfrak{v}}A_B$.

Пусть $F1_A$, $F2_A$ ..... означаютъ, по прежнему, величины однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ тѣлу A и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$, ...; величины этихъ силъ могутъ быть сравнены, на основаніи опредѣленія b, съ величиною силы, сообщающей тѣлу A ускореніе $\dot{\mathfrak{v}}B_A$; означимъ черезъ $\mathfrak{f}B_A$ величину этой силы; будемъ имѣть равенства:

$$\frac{\mathfrak{f}B_A}{F1_A}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{v}_1};\ \frac{\mathfrak{f}B_A}{F2_A}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{v}_2};\ \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

Пусть, далѣе, Fn_B, $F(n+1)_B$, ... означаютъ величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n$, $\dot{v}_{(n+1)}$, ...; означимъ черезъ $\mathfrak{f}A_B$ величину силы, сообщающей тому же тѣлу ускореніе $\dot{\mathfrak{v}}A_B$; подобно тому, какъ и для тѣла A, будемъ имѣть равенства:

$$\frac{\mathfrak{f}A_B}{Fn_B}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}A_B}{\dot{v}_n};\ \frac{\mathfrak{f}A_B}{F(n+1)_B}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}A_B}{\dot{v}_{(n+1)}};\ \ldots\ldots\ldots\ (15)$$

Изъ рядовъ равенствъ (14) и (15), принявъ во вниманіе, что, на основаніи начала C:

$$\mathfrak{f}B_A=\mathfrak{f}A_B,$$

мы получимъ слѣдующія выраженія численныхъ отношеній между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{Fn_B}{F1_A}=\frac{\dot{v}_n}{\dot{v}_1}\left(\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}\right);\ \frac{Fn_B}{F2_A}=\frac{\dot{v}_n}{\dot{v}_2}\left(\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}\right);\dots\dots\\ \frac{F(n+1)_B}{F1_A}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_1}\left(\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}\right);\ \frac{F(n+1)_B}{F2_A}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_2}\left(\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}\right);\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\dots(16)$$

Отсюда видно, что *численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B, а другая къ тѣлу A, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на постоянную для этой пары тѣлъ дробь:*

$$\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B},\dots\dots\dots\dots(17)$$

которая представляетъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B силами взаимнодѣйствія между ними, однородными и противоположными, а потому и равными между собою.

§ 5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающія равныя ускоренія различнымъ тѣламъ.

Двѣ однородныя силы, приложенныя къ одному и тому же тѣлу, имѣютъ равныя величины, если равны ускоренія, сообщаемыя ими этому тѣлу.

Двѣ же однородныя силы, приложенныя къ разнымъ тѣламъ и сообщающія имъ одинаковыя ускоренія, вообще говоря, не равны между собою; изъ равенствъ (16) видно, что отношеніе между величинами G_B и G_A силъ, сообщающихъ тѣламъ B и A ускореніе $\dot{v}$, равно дроби (17).

$$\frac{G_B}{G_A}=\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}.\dots\dots\dots\dots(18)$$

Для того, чтобы величина Φ_B однородной силы, приложенной къ тѣлу B и сообщающей ему ускореніе $\dot{V}_B$, равнялась величинѣ Φ_A однородной силы, приложенной къ тѣлу A и сообщающей ему уско-

реніе $\dot{V}_A$, необходимо, чтобы величина Φ_B была во столько разъ болѣе величины $\mathfrak{f}A_B$, во сколько разъ Φ_A болѣе $\mathfrak{f}B_A$; для этого ускоренія $\dot{V}_A$ и $\dot{V}_B$ должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{v}A_B}=\frac{\dot{V}_A}{\dot{v}B_A},$$

которое можно представить такъ:

$$\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B} \dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

Слѣдовательно: *двѣ силы, одна изъ которыхъ однородно-приложена къ тѣлу A, а другая къ тѣлу B, имѣютъ равныя величины, если отношеніе между ускореніями, сообщаемыми ими тѣламъ A и B, равняется дроби (17).*

Кромѣ того замѣтимъ, что дробь (17), которую мы означимъ черезъ $\mu(BA)$, можетъ быть представлена: 1) какъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B какими-либо равными между собою однородными силами, приложенными къ этимъ тѣламъ, 2) какъ отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ равныя ускоренія.

$$\mu(BA)^{*)}=\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}A_B}=\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{G_B}{G_A} \dots\dots\dots\dots (20)$$

§ 6. Величина силы однородно-приложенной къ тѣлу, равна суммѣ величинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла.

Пусть имѣемъ нѣкоторое тѣло K.

Положимъ, что для сообщенія ему ускоренія $\dot{v}$ надо приложить къ нему однородную силу, имѣющую величину G_K.

---

*) Порядокъ размѣщенія буквъ B и A въ символѣ $\mu(BA)$ слѣдующій: сначала поставленъ знакъ того тѣла, ускореніе котораго находится въ знаменателѣ; здѣсь это—тѣло B, ускореніе котораго: $\dot{v}A_B$ или $\dot{V}_B$.

Если отдѣлимъ отъ тѣла нѣкоторую часть a, то, для сообщенія этой части ускоренія той же величины $\dot{v}$, надо будетъ однородно приложить къ ней силу, имѣющую величину G_a, меньшую G_K.

Раздѣлимъ тѣло K на части: $a, b, c, \ldots\ldots h$ и опредѣлимъ величины G_a, G_b, $G_c, \ldots\ldots G_h$ однородныхъ силъ, сообщающихъ этимъ частямъ ускореніе той же величины $\dot{v}$.

Естественно допустить, что когда всѣ части $a, b, c, \ldots\ldots h$ собраны вмѣстѣ, образуя тѣло K, которое подвержено силѣ G_K, сообщающей ему ускореніе $\dot{v}$, то тогда къ части a однородно приложена по тому же направленію сила G_a, къ части b—сила G_b, къ части c—сила $G_c, \ldots\ldots$ къ части h—сила G_h и что величина силы G_K равняется суммѣ величинъ силъ, приложенныхъ къ частямъ $a, b, c, \ldots h$.

Какъ ни естественно это допущеніе, но оно не вытекаетъ изъ приведенныхъ выше началъ и опредѣленій; а потому мы должны поставить себѣ на видъ, что, дѣлая его, мы вводимъ слѣдующее начало:

Основное начало D. Величина однородной силы, сообщающей тѣлу какое-либо ускореніе, равняется суммѣ величинъ однородныхъ силъ того же направленія, сообщающихъ то же самое ускореніе частямъ тѣла, взятымъ въ отдѣльности.

На основаніи этого начала:

$$G_K = G_a + G_b + G_c + \ldots + G_h, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

гдѣ G_K, G_a, G_b, $G_c, \ldots\ldots G_h$ суть величины однородныхъ силъ одного и того же направленія, сообщающихъ тѣлу K и частямъ его: a, b, $c, \ldots\ldots h$, взятымъ въ отдѣльности, ускореніе $\dot{v}$.

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\mu(KA) = \mu(aA) + \mu(bA) + \mu(cA) + \ldots + \mu(hA), \ldots\ldots \quad (22)$$

потому что

$$\mu(KA) = \frac{G_K}{G_A}; \quad \mu(aA) = \frac{G_a}{G_A}; \ldots\ldots; \quad \mu(hA) = \frac{G_h}{G_A},$$

гдѣ G_A есть величина однородной силы, сообщающей тѣлу A ускореніе $\dot{v}$.

§ 7. Масса тѣла.

Если для двухъ какихъ-либо тѣлъ A и B отношеніе $\mu(BA)$ не равно единицѣ, то это означаетъ, что способность этихъ тѣлъ къ воспринятію дѣйствія однородныхъ силъ неодинакова; равныя силы сообщаютъ имъ не равныя ускоренія и для сообщенія имъ равныхъ ускореній должно приложить къ нимъ неодинаковыя силы.

Съ другой стороны мы знаемъ, что матерьяльное тѣло, находящееся въ поступательномъ движеніи, имѣетъ, по свойству инерціи, *стремленіе* сохранять величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія; такое стремленіе мы будемъ называть *инертностью* тѣла.

Инертность тѣла есть свойство противоположное способности его воспринимать дѣйствіе однородныхъ силъ: чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ меньше вышеупомянутая способность, и обратно.

Слѣдовательно, инертность двухъ тѣлъ A и B неодинакова, если $\mu(BA)$ не равно единицѣ; большею инертностью обладаетъ то изъ этихъ двухъ тѣлъ, которое получаетъ меньшее ускореніе при той же величинѣ приложенной силы и которое требуетъ большей силы для сообщенія ему ускоренія, одинаковаго съ другимъ тѣломъ.

Поэтому, отношеніе между величинами инертностей тѣлъ B и A полагаютъ равнымъ дроби $\mu(BA)$, то есть равнымъ отношенію величинъ G_B и G_A однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ, или отношенію величинъ $\dot{V}_A$ и $\dot{V}_B$ ускореній, сообщаемыхъ тѣламъ A и B однородными силами, равными между собою.

Чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ больше въ немъ того, что обладаетъ свойствомъ инерціи, то есть матеріи; поэтому, по величинѣ инертности тѣла судятъ о количествѣ заключающейся въ немъ матеріи, полагая, что $\mu(BA)$ есть отношеніе количества матеріи тѣла B къ количеству матеріи тѣла A.

Количество матеріи тѣла называется *массою* его.

Опредѣленіе с. **Отношеніе массъ двухъ тѣлъ обратно пропорціонально отношенію ускореній, сообщаемыхъ этимъ тѣламъ однородными и прямопротивоположными силами взаимнодѣйствія между ними, или вообще какими бы то ни было равными между собою силами, однородно-приложенными къ этимъ тѣламъ.**

Вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе массъ двухъ тѣлъ равно отношенію величинъ однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ.

$$\frac{m_B}{m_A}=\mu(BA)=\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{G_B}{G_A}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

гдѣ m_B и m_A означаютъ массы тѣлъ B и A.

Означимъ черезъ m_K, m_a, m_b, m_c,..... m_h массы тѣла K и частей его: $a, b, c, \ldots h$; на основаніи послѣдняго опредѣленія, равенство (22) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{m_K}{m_A}=\frac{m_a}{m_A}+\frac{m_b}{m_A}+\frac{m_c}{m_A}+\ldots+\frac{m_h}{m_A}$$

и отсюда слѣдуетъ:

$$m_K=m_a+m_b+m_c+\ldots+m_h, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

то есть: *масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его; это даетъ намъ право говорить, что масса тѣла, понятіе о которой составляется, на основаніи опредѣленія с, по величинѣ инертности тѣла, есть количество матеріи, заключающейся въ тѣлѣ.*

Послѣ сказаннаго въ послѣднихъ параграфахъ, численное отношеніе между величинами F_B и F_A однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ ускоренія $\dot{v}_B$ и $\dot{v}_A$, выразится такъ:

$$\frac{F_B}{F_A}=\frac{m_B\,\dot{v}_B}{m_A\,\dot{v}_A}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

то есть: *численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B, а*

I-7.8.

другая къ тѣлу А, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на численное отношеніе массъ тѣлъ.

§ 8. Единица массы. Единица величины силы.

Изъ формулы (25) видно, что для измѣренія величинъ силъ надо измѣрять ускоренія и массы.

Измѣреніе массы какого либо тѣла имѣетъ цѣлью опредѣлить, въ какомъ численномъ отношеніи находится масса тѣла къ единицѣ массы.

Въ научныхъ изслѣдованіяхъ чаще всего употребляются французскія единицы массы: килограммъ, граммъ, миллиграммъ. Килограммъ есть масса, равная массѣ платиноваго цилиндра, хранящагося въ государственномъ архивѣ Франціи и извѣстнаго подъ именемъ: le kilogramme prototype en platine des Archives; при изготовленіи его имѣлось въ виду сдѣлать массу его равною массѣ кубическаго дециметра чистой воды, имѣющей температуру 4° Цельзія и находящейся подъ нормальнымъ *) атмосфернымъ давленіемъ; но, по наблюденіямъ Купфера ***) и изслѣдованіямъ W. H. Miller'а, масса кубическаго дециметра воды при вышесказанныхъ температурѣ и давленіи равна 1000013 миллиграммовъ, то есть на 13 миллиграммовъ болѣе массы килограмма.

Русскій фунтъ есть масса 25,01893 кубическихъ дюймовъ воды, имѣющей температуру 13,5° Реомюра; русскій фунтъ = ~~409,497~~ 409,51241 граммовъ и килограммъ = ~~2,442022~~ фунта. 2,44192844

Англійскій new **) standard pound, заключающій 7000 грановъ = 453,59265 (43) граммовъ и килограммъ = 2,2046212 n. st. pound = 15432,34874 грановъ.

Измѣреніе массъ дѣлается при помощи приборовъ, назначеніе которыхъ состоитъ въ томъ, чтобы убѣдиться въ равенствѣ массъ

*) Подъ нормальнымъ атмосфернымъ давленіемъ подразумѣвается здѣсь давленіе, производимое атмосферою на широтѣ Парижа и на уровнѣ моря, когда барометръ стоитъ на 760 миллиметрахъ ртутнаго столба, приведеннаго къ 0° Цельзія.

**) Съ 1855 года.

***) Комиссией академика Купфера были впервые [illegible] русские меры в 1835 г.

двухъ тѣлъ по равенству величинъ силъ тяжести, приложенныхъ къ этимъ тѣламъ; употребительнѣйшій и точнѣйшій приборъ этого рода—рычажные равноплечные вѣсы.

Слѣдуетъ замѣтить, что теорія всѣхъ такихъ приборовъ основывается, между прочимъ, на началѣ равенства и противоположности силъ взаимнодѣйствія между малѣйшими частицами тѣлъ.

Кромѣ вѣсовъ надо имѣть еще и разновѣсъ, изъ гирь котораго можно составить массу какой угодно величины, заключающейся въ предѣлахъ прочности и чувствительности вѣсовъ.

Самое измѣреніе данной массы заключается въ опредѣленіи суммы массъ гирь, уравновѣшивающихъ эту массу на вѣсахъ.

Такимъ образомъ мы опредѣляемъ численное отношеніе между данною массою m и единицею массы; поэтому m выражается именованнымъ числомъ, напримѣръ:
масса кубическ. сантиметра ртути, имѣющей температуру 0^0 по Цельзію =

$$13{,}59618.(\text{грамм.}) = 0{,}01359618\ (\text{килогр.});$$

масса земли $= 6{,}14 \,.\, 10^{27}.(\text{грамм.}) = 6{,}14 \,.\, 10^{24}.(\text{килогр.})$

За единицу величинъ силъ принимается величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, масса котораго равна единицѣ массы, и сообщающей ему ускореніе, равное единицѣ ускореній.

Положивъ въ равенствѣ (25): $m_A =$ (ед. масс.), $\dot{v}_A =$ (ед. ускор.), мы получимъ:

$$\frac{F_B}{(\text{ед. силы})} = \frac{m_B}{(\text{ед. массы})} \frac{\dot{v}_B}{(\text{ед. ускорен.})}, \quad \ldots\ldots\ (26)$$

то есть: отвлеченное число, показывающее, во сколько разъ величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу B и сообщающей ему ускореніе $\dot{v}_B$, болѣе единицы силы, равняется произведенію двухъ другихъ отвлеченныхъ чиселъ, одно изъ которыхъ выражаетъ отношеніе между массою тѣла и единицею массы, а другое есть отношеніе ускоренія $\dot{v}_B$ къ единицѣ ускоренія.

Если же мы примемъ, что единица силы *равна* произведенію изъ единицы массы на единицу ускоренія:

I-8.

$$(\text{ед. силы}) = (\text{ед. массы}).(\text{ед. ускорен.}), \ldots\ldots\ldots (27)$$

то тогда, вмѣсто равенства (26), будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$F_B = m_B \dot{v}_B, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

которое имѣетъ тотъ же самый смыслъ, что и равенство (26), но выражаетъ величину силы именованнымъ числомъ въ величинѣ единицы силы.

Единица силы, или, вѣрнѣе, единица величинъ силъ, есть единица сложная, величина которой опредѣляется величинами единицъ длины, времени и массы; символъ ея величины—слѣдующій:

$$(\text{ед. силы}) = \frac{(\text{ед. массы})\ (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})^2} \ldots\ldots\ldots (29)$$

По предложенію образовавшейся при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ особой коммиссіи для выбора и наименованія единицъ величинъ, встрѣчающихся въ математической физикѣ *), принята система сложныхъ единицъ, основанная на слѣдующихъ простыхъ единицахъ: система CGS:

величина единицы длины: сантиметръ,
величина единицы времени: секунда средняго времени,
величина единицы массы: граммъ.

Единицу силы, основанную на этихъ единицахъ длины, времени и массы, предложено называть: dynamy (отъ греческаго слова: δύναμις), или, сокращенно: dyne; мы будемъ называть ее диною.

Дина есть величина силы, которая, будучи однородно приложена къ покоющемуся грамму, заставляетъ каждую точку его пройти 0,5 сантиметра въ первую секунду. (ускореніе = 1)

$$\text{Дина} = \frac{(\text{граммъ}).(\text{сантиметръ})}{(\text{секунда})^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

---

*) Comittee for the Selection and Nomenclature of Dynamical and Electrical Units; эта коммиссія образовалась въ 1874 году изъ слѣдующихъ лицъ: W. Thomson, Profess. Foster, J. C. Maxwell, G. J. Stoney, Fleeming Jenkin, Dr. Siemens, Mr. F. Bramwell, Profess. Everett.

I-8.9.

Въ житейской практикѣ выражаютъ величины силъ въ килограммахъ, пудахъ, фунтахъ и проч., причемъ подъ этими именами понимаютъ вѣса этихъ массъ; конечно, выражаясь такимъ образомъ, не даютъ точнаго понятія о величинѣ силъ, такъ какъ вѣсъ одной и той же массы различенъ въ разныхъ мѣстахъ земли; такъ, вѣсъ одного килограмма подъ широтою λ и на высотѣ h сантиметровъ надъ уровнемъ океана равенъ:

$$1000.(\text{граммъ}).g^{*)}=$$
$$=(980{,}6056-2{,}5028\cos 2\lambda-0{,}000003h).1000.(\text{динам.})$$

Дина есть сила довольно малой величины (такъ что, напр., вѣсъ одного килограмма на экваторѣ равняется 980605 динамъ слишкомъ), поэтому комиссія предложила употребленіе придаточныхъ словъ:

при λ=60° (широта С.Петербурга) при h=0 кгр=981857 дин.

	deca	hecto	kilo	mega	
для обозначенія:	10	100	1000	1000000	единицъ;

напримѣръ, килодина и мегадина суть тысяча и милліонъ динъ; вѣсъ килограмма на экваторѣ почти равенъ одной мегадинѣ.

Для выраженія долей единицы:

0,1	0,01	0,001	0,000001

предложены термины:

deci	centi	milli	micro.

Вѣсъ русскаго фунта въ С.-Петербургѣ (гдѣ $g=981{,}85$):

$$4{,}02\;.\;10^5\,(\text{дин.}).$$

Вѣсъ англійскаго новаго фунта (полагая $g=981\frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$):

$$4{,}45\;.\;10^5\,(\text{дин.}).$$

§ 9. Средняя плотность тѣла. Плотность вещества въ какой-либо точкѣ тѣла.

Величина отношенія между массою тѣла и величиною его объема называется *среднею плотностью тѣла*.

---

*) Величина g приведена на стр. 236 кинематич. части, въ выноскѣ.

Величина единицы плотности выражается слѣдующимъ символомъ:

$$(\text{единица плотности}) = \frac{(\text{ед. массы})}{(\text{ед. длины})^3}.$$

Средняя плотность тѣла равна единицѣ плотности, если масса его во столько разъ болѣе единицы массы, во сколько разъ объемъ его болѣе единицы объема.

Если всякая, даже самая мельчайшая, часть тѣла имѣетъ ту же самую среднюю плотность, какъ и цѣлое тѣло, то такое тѣло называется *тѣломъ однородной плотности;* величину средней плотности такого тѣла называютъ *плотностью* его.

$$\text{Плотность воды при } 4^0 C = 1{,}000013 \frac{(\text{граммъ.})}{(\text{сантиметр.})^3}.$$

Когда плотность σ однороднаго вещества извѣстна, то масса объема V этого вещества опредѣлится чрезъ умноженіе V на σ.

Для вещества неоднородной плотности, средняя плотность части тѣла будетъ имѣть различную величину, смотря по величинѣ взятой части.

Положимъ, что мы беремъ все болѣе и болѣе уменьшающіяся части тѣла, заключающія въ себѣ одну и ту же точку его: $\mathfrak{m}$; пусть Δm есть масса, ΔO—объемъ нѣкоторой такой части.

По мѣрѣ уменьшенія Δm, средняя плотность:

$$\frac{\Delta m}{\Delta O}$$

приближается къ нѣкоторому предѣлу, который называется *плотностью вещества въ точкѣ* $\mathfrak{m}$.

Слѣдовательно, *плотность матеріи въ точкѣ* $\mathfrak{m}$ *тѣла есть средняя плотность безконечно малаго объема* dO, *заключающаго точку* $\mathfrak{m}$ *внутри себя или на своей поверхности:*

$$\sigma = \frac{dm}{dO}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

гдѣ dm есть масса объема dO, а σ плотность матеріи въ точкѣ $\mathfrak{m}$. Для тѣла неоднородной плотности σ есть функція координатъ точки $\mathfrak{m}$.

Масса всего тѣла выразится интеграломъ:

$$M=\int\int\int \sigma dO,$$

взятымъ по всему объему тѣла.

§ 10. Количество движенія тѣла, движущагося поступательно.

Произведеніе изъ скорости тѣла, движущагося поступательно, на его массу, называется *количествомъ движенія* (Quantitas motus. Quantité de mouvement. Bewegungsgrösse. The momentum) этого тѣла; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица колич. движ.})=\frac{(\text{ед. массы})\ (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})}.$$

Подобно однородной силѣ, количество движенія можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ какой-либо точки тѣла по направленію скорости; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія тѣла болѣе единицы количествъ движенія.

Подъ *измѣненіемъ количества движенія* тѣла въ теченіе промежутка времени отъ момента t до другого момента t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между количествами движенія mv_1 и mv тѣла въ моменты t_1 и t, то есть такое количество движенія, которое нужно геометрически сложить съ mv для того, чтобы получить mv_1.

Тогда формулѣ (28) можно дать слѣдующее толкованіе:

Величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, движущемуся поступательно, измѣряется отношеніемъ измѣненія количества движенія тѣла въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени къ величинѣ самаго промежутка.

§ 11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ они приведены Ньютономъ.

Честь открытія начала инерціи и начала параллелограмма силъ въ примѣненіи къ движенію, производимому силами, приписываютъ Галилею

(1564—1642), который высказалъ эти начала и примѣнилъ ихъ къ объясненію движенія брошенныхъ тяжелыхъ тѣлъ въ своемъ сочиненіи: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, изданномъ впервые въ Лейденѣ въ 1638 году.

Повидимому, можетъ показаться страннымъ, что начало инерціи было открыто сравнительно недавно, между тѣмъ, какъ дошедшія до насъ сочиненія Архимеда *), относящіяся къ ученію о равновѣсіи силъ, свидѣтельствуютъ о высокомъ состояніи статики еще у древнихъ; такая отсталость ученія о движущемъ дѣйствіи силъ объясняется долгимъ преобладаніемъ философіи Аристотеля, по ученію котораго самое совершенное и начальное движеніе есть круговое.

Изложеніе основныхъ началъ механики въ томъ видѣ, въ какомъ они примѣняются и до сихъ поръ, было сдѣлано Исаакомъ Ньютономъ (1642—1727) въ его книгѣ: Philosophiae naturalis principia mathematica, изданной въ первый разъ въ 1687 году, то есть 49 лѣтъ спустя послѣ перваго изданія Discorsi. Ньютонъ высказываетъ основныя начала въ видѣ трехъ „законовъ движенія" (Axiomata, sive Leges Motus), но предпосылаетъ имъ нѣсколько опредѣленій (Definitiones) и кромѣ того присоединяетъ къ нимъ примѣчанія (Corollaria). Мы приведемъ здѣсь эти „законы движенія" и нѣкоторыя изъ опредѣленій въ томъ видѣ, какъ они помѣщены въ Principia, но въ иномъ порядкѣ.

Въ первомъ опредѣленіи Ньютонъ даетъ понятіе о количествѣ матеріи тѣла, какъ о произведеніи плотности тѣла на его объемъ; второе опредѣленіе слѣдующее:

Definitio II. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

(Количество движенія измѣряется совокупно скоростью и количествомъ матеріи).

Начало инерціи выражается первымъ изъ „законовъ движенія" совмѣстно съ опредѣленіемъ III-мъ.

Lex. I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi

---

*) Архимедъ жилъ въ III вѣкѣ до Р. X. (родился вѣроятно около 287 г., умеръ въ 212 г. до Р. X.); изъ сочиненій его до насъ дошли слѣдующія:

1) Объ опредѣленіи центровъ инерціи тѣлъ разнаго вида: Ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων.

2) Теорія рычага: de Aequiponderantibus.

3) Гиростатика: de iis quae vehuntur in aqua, возстановленное Commendin'омъ въ 1565 г.

uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

(Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе).

Въ опредѣленіи III-мъ говорится, что тѣло, предоставленное себѣ, имѣетъ стремленіе къ сохраненію своего состоянія покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія вслѣдствіе свойства присущаго матеріи и называемаго: inertia materiae.

Силѣ дается слѣдующее опредѣленіе:

Definitio IV. Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

(Приложенная сила есть производимое на тѣло принужденіе къ измѣненію его состоянія покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія).

Второй „законъ движенія“ говоритъ о величинѣ дѣйствія, производимаго силою, причемъ предполагается, что представленія о величинѣ силы и о направленіи ея понятны сами по себѣ; „законъ“ этотъ выраженъ въ очень сжатой формѣ:

Lex. II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

(Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила).

Эту фразу слѣдуетъ понимать такъ:

Измѣненіе количества движенія (см. § 10) пропорціонально величинѣ приложенной движущей силы и направлено вдоль по ней.

Начало параллелограмма силъ высказано въ слѣдующемъ примѣчаніи:

Corollarium I. Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

(При совокупномъ дѣйствіи двухъ силъ тѣло описываетъ діагональ параллелограмма въ теченіе того же времени, какъ и стороны параллелограмма при дѣйствіи силъ порознь).

Третій „законъ“—слѣдующій:

Lex. III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

(Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ противодѣйствіе, равное и противоположное; то есть дѣйствія двухъ тѣлъ одно на другое всегда равны и направлены противоположно).

§ 12. Говоря о матерьяльномъ тѣлѣ, подверженномъ дѣйствiю однородно-приложенныхъ къ нему силъ и находящемся, либо въ абсолютномъ поступательномъ движенiи, либо въ абсолютномъ покоѣ, мы не имѣли надобности упоминать ни о формѣ тѣла, ни объ его размѣрахъ, ни о плотности вещества его; въ разсужденiяхъ, приведенныхъ въ §§ 1—9, говорилось только о движенiи и ускоренiи которой-либо изъ точекъ тѣла и объ его массѣ.

Распредѣленiе массы вокругъ той точки поступательно-движущагося тѣла, на движенiе которой мы обращаемъ вниманiе, можетъ быть какое угодно; мы можемъ даже вообразить себѣ, что вся масса тѣла сосредоточена въ этой точкѣ.

Масса, сосредоточенная въ одной геометрической точкѣ, есть воображаемый предметъ, извѣстный подъ именемъ *матерьяльной точки* и имѣющiй существенное значенiе въ аналитической механикѣ, какъ будетъ объяснено въ концѣ слѣдующей главы.

ГЛАВА II.

Основныя начала механики свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 13. Матерьяльная точка.

Матерьяльная точка есть масса, которую мы воображаемъ себѣ сосредоточенною въ одной геометрической подвижной точкѣ.

Матерьяльная точка вполнѣ свободна, если она можетъ имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленiю и притомъ скорость ея не зависитъ отъ скоростей какихъ-либо другихъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 14. Основныя начала въ примѣненiи къ свободной матерьяльной точкѣ.

Основныя начала, изложенныя въ предыдущей главѣ, примѣняются къ матерьяльной точкѣ въ слѣдующемъ видѣ:

Основное начало 1-е. (Начало инерціи матерьяльной точки) Всякая матерьяльная точка, по свойству инерціи матеріи, стремится сохранить ту абсолютную скорость, которую она имѣетъ.

Пока на нее не дѣйствуютъ никакія силы, она дѣйствительно сохраняетъ свою абсолютную скорость; если послѣдняя равна нулю, то точка остается въ абсолютномъ покоѣ; если эта скорость не равна нулю, то точка совершаетъ абсолютное движеніе по прямой линіи равномѣрно.

Каждой силѣ, дѣйствующей на матерьяльную точку, мы приписываемъ:

а) *мѣсто приложенія*, которое есть сама матерьяльная точка,

б) *направленіе*,

в) *величину*, измѣряемую въ единицахъ силы (см. § 8, (29)); представленіе о силѣ приложенной къ матерьяльной точкѣ составляется изъ совокупности этихъ трехъ понятій.

Основное начало 2-е. Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ силою, приложенною къ ней, имѣетъ направленіе этой силы и равно величинѣ силы, дѣленной на массу матерьяльной точки.

Основное начало 3-е. (Начало параллелограмма силъ) Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно приложенными къ ней силами, есть геометрическая сумма, составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ порознь.

Эти три начала необходимы и достаточны для того, чтобы, основываясь на нихъ, изложить механику свободныхъ матерьяльныхъ точекъ; первое начало опредѣляетъ свойство, которое мы приписываемъ матерьяльной точкѣ; два послѣднія начала опредѣляютъ дѣйствіе, производимое на матерьяльную точку силами, приложенными къ ней.

§ 15. Цѣль введенія понятія о матерьяльной точкѣ въ механику.

Въ концѣ предыдущей главы было высказано, что, разсматривая движеніе матерьяльной точки, мы смотримъ на нее, какъ на представительницу поступательнаго движенія нѣкотораго тѣла, масса котораго, равная массѣ матерьяльной точки, распредѣлена какимъ бы то ни было образомъ вокругъ той точки, движеніе которой мы разсматриваемъ; приэтомъ силы, которыя мы предполагаемъ приложенными къ матерьяльной точкѣ, должны быть приложены къ тѣлу однородно.

Понятно, что только для этого не стоило бы вводить въ механику понятіе о матерьяльной точкѣ, если бы не имѣлось въ виду дать ей болѣе обширной и существенной роли.

Наиболѣе важныя слѣдствія проистекаютъ изъ того обстоятельства, что матерьяльная точка, подобно геометрической, не имѣетъ размѣровъ.

Поэтому, говоря о матерьяльной точкѣ, мы избѣгаемъ необходимости входить въ какія-либо разсужденія относительно вращательнаго движенія массы, сосредоточенной въ точкѣ; мы даже не можемъ говорить о вращательномъ движеніи точки, то есть того, что не имѣетъ размѣровъ.

По той же причинѣ терминъ: «однородно-приложенная сила» теряетъ значеніе, если рѣчь идетъ о силѣ, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Назначеніе матерьяльной точки въ механикѣ состоитъ въ томъ, чтобы замѣнять собою такія тѣла или части тѣла, размѣрами которыхъ мы пренебрегаемъ сравнительно съ длинами, разсматриваемыми въ вопросѣ.

Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ тѣла разсматриваются какъ собранія частицъ и въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ расчетъ форму и размѣры частицъ, каждую частицу мы воображаемъ себѣ замѣненною матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ частицы.

Точно также, въ тѣхъ вопросахъ небесной механики, въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ вращательныхъ

движеній свѣтилъ вокругъ ихъ осей и можно пренебречь размѣрами тѣлъ по отношенію ко взаимнымъ разстояніямъ между ними, каждое свѣтило замѣняется матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ свѣтила.

Мы увидимъ далѣе, что даже тогда, когда матерьяльныя тѣла принимаются сплошными, намъ приходится, для рѣшенія какихъ-либо кинетическихъ вопросовъ относительно этихъ тѣлъ, или замѣнять каждое тѣло нѣкоторою системою матерьяльныхъ точекъ, или основываться въ нашихъ разсужденіяхъ на результатахъ, полученныхъ изъ механики системы матерьяльныхъ точекъ.

По этимъ причинамъ мы прежде всего должны изложить механику матерьяльныхъ точекъ и системъ матерьяльныхъ точекъ, что и составляетъ содержаніе этой книги.

ГЛАВА III.

Механика свободной матерьяльной точки.

§ 16. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся.

Механика свободной матерьяльной точки основывается на трехъ основныхъ началахъ, выраженныхъ въ § 14-мъ предыдущей главы.

Все, сказанное въ § 3 первой главы относительно однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, примѣняется къ силамъ, одновременно-приложеннымъ къ одной матерьяльной точкѣ.

Равнодѣйствующею нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, называется такая сила, которая одна сообщаетъ точкѣ то же самое ускореніе (той же величины и того же направленія), какое сообщаютъ ей одновременно-приложенныя силы всѣ вмѣстѣ.

Силы, одновременно-приложенныя къ одной матерьяльной точкѣ, называются *составляющими* силами.

Если ускореніе, сообщаемое матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно-приложенными къ ней силами, равно нулю, то приложенныя силы называютъ *взаимно-уравновѣшивающимися*, или *силами находящимися въ равновѣсіи*.

Если силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, находятся въ равновѣсіи въ теченіе конечнаго промежутка времени, то, въ теченіи этого промежутка, матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ, или въ равномѣрномъ прямолинейномъ движеніи по инерціи.

Каждую силу, приложенную къ матерьяльной точкѣ, можно изобразить длиною, отложенною по направленію силы отъ точки приложенія ея и заключающею столько единицъ длины, сколько въ изображаемой силѣ заключается единицъ силы.

Длины, изображающія различныя силы, прилагаемыя къ одной и той же матерьяльной точкѣ, будутъ пропорціональны длинамъ, изображающимъ ускоренія, сообщаемыя этими силами этой точкѣ. *Длина, изображающая равнодѣйствующую нѣсколькихъ составляющихъ силъ, будетъ имѣть величину и направленіе геометрической суммы длинъ, изображающихъ составляющія силы.*

Пусть F означаетъ величину какой-либо силы, приложенной къ нѣкоторой матерьяльной точкѣ; углы, составляемые направленіемъ ея съ положительными направленіями осей координатъ X, Y, Z, означимъ черезъ (F,X), (F,Y), (F,Z).

Величины:

$$F\cos(F,X),\ F\cos(F,Y),\ F\cos(F,Z)$$

называются *проэкціями силы F на оси координатъ X, Y, Z*; онѣ изображаются проэкціями на тѣ же оси длины, изображающей силу F.

Такъ какъ проэкція на какое-либо направленіе длины, изображающей равнодѣйствующую силу, равняется суммѣ проэкцій длинъ, изображающихъ составляющія силы, то отсюда слѣдуетъ, что *проэкція на какое-либо направленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ*

III-16.

составляющихъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, равна суммѣ проэкцій составляющихъ силъ на то же направленіе.

Пусть $F1$, $F2$, $F3$, ... Fk суть величины составляющихъ силъ, а F—величина ихъ равнодѣйствующей; проэкціи ихъ на оси координатъ удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\left.\begin{aligned} F\cos(F,X) &= F1\cos(F1,X)+F2\cos(F2,X)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,X) \\ F\cos(F,У) &= F1\cos(F1,У)+F2\cos(F2,У)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,У) \\ F\cos(F,Z) &= F1\cos(F1,Z)+F2\cos(F2,Z)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,Z) \end{aligned}\right\}, \ldots (32)$$

которыя могутъ быть замѣнены слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\overline{F}=\overline{F}1+\overline{F}2+\ldots+\overline{F}k \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Отсюда, напримѣръ для случая трехъ составляющихъ силъ G, H, K, не лежащихъ въ одной плоскости, слѣдуетъ:

$$F^2=G^2+H^2+K^2+2HK\cos(H,K)+2KG\cos(K,G)+ \\ +2GH\cos(G,H),$$

то есть, что равнодѣйствующая представляется діагональю параллелопипеда, построеннаго на сторонахъ, представляющихъ составляющія силы.

Если

$$K=0,$$

то:

$$F=\sqrt{G^2+2GH\cos(G,H)+H^2};$$

равнодѣйствующая двухъ составляющихъ силъ представляется діаго-

налью параллелограмма, построеннаго на сторонахъ, изображающихъ составляющія силы.

Если G направлена по оси X, H—по оси $У$, K—по оси Z, то равнодѣйствующая будетъ представляться діагональю прямоугольнаго параллелопипеда, построеннаго на этихъ составляющихъ силахъ, параллельныхъ осямъ координатъ; изъ чего слѣдуетъ, что проэкціи какой-либо силы на оси прямоугольныхъ координатъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія этой силы по этимъ осямъ.

Для косоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ проэкціи какой-либо силы на эти оси не равны составляющимъ ея по этимъ осямъ; пусть G есть составляющая силы F по оси X_1, H—составляющая по оси $У_1$, K—составляющая по оси Z_1; проэктируя силу F и составляющія ея на направленія осей X_1, $У_1$, Z_1, получимъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} F\cos(F,X_1) &= G + H\cos(У_1X_1) + K\cos(Z_1X_1) \\ F\cos(F,У_1) &= G\cos(X_1У_1) + H + K\cos(Z_1У_1) \\ F\cos(F,Z_1) &= G\cos(X_1Z_1) + H\cos(У_1Z_1) + K \end{aligned}\right\} \ldots (34)$$

Для равновѣсія силъ $F1$, $F2$, ... Fp, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, необходимо, чтобы сумма проэкцій этихъ силъ на всякое направленіе равнялась нулю; а для этого достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проэкцій ихъ на три какія-либо направленія, не лежащія въ одной плоскости, напримѣръ на оси координатъ.

Символически, эти условія можно изобразить равенствомъ:

$$\overline{F}1 + \overline{F}2 + \overline{F}3 + \ldots + \overline{F}p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Примѣчаніе. Въ послѣдующихъ параграфахъ очень часто придется пользоваться формулами, заключающими выраженія проэкцій силъ, приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ, на координатныя оси различныхъ координатныхъ системъ.

По большей части приходится пользоваться ортогональными координатными системами, то есть такими, координатныя линіи которыхъ пересѣкаются взаимно-перпендикулярно; таковы: прямо-

VII-16.

линейная система координатъ съ прямоугольными осями, сферическая система и кругово-цилиндрическая система координатъ.

Для краткости формулъ мы условимся обозначать проэкціи силъ на координатныя оси тѣми же буквами, которыми обозначаемъ самыя оси, но съ надлежащими значками; напримѣръ, проэкціи силъ $F1$, $F2, \ldots. Fk$ на оси X, $У$, Z мы будемъ обозначать такъ:

$$X1,\ X2, \ldots. Xk$$

$$У1,\ У2, \ldots. Уk$$

$$Z1,\ Z2, \ldots. Zk,$$

а проэкціи на тѣ же оси равнодѣйствующей F этихъ силъ такъ:

$$X = F\cos(F,X) = X1 + X2 + \ldots. + Xk$$

$$У = F\cos(F,У) = У1 + У2 + \ldots. + Уk$$

$$Z = F\cos(F,Z) = Z1 + Z2 + \ldots. + Zk.$$

Проэкціи какой-либо силы Fk на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, неизмѣнно-связанныя съ какою-либо неизмѣняемою средою, мы будемъ обозначать такъ:

$$\Xi k = Fk\cos(Fk,\Xi)$$

$$\Upsilon k = Fk\cos(Fk,\Upsilon)$$

$$\mathbf{Z}k = Fk\cos(Fk,\mathbf{Z}).$$

Проэкціи той же силы на координатныя оси α, β, γ сферической или кругово-цилиндрической системы координатъ мы будемъ обозначать такъ:

$$\mathrm{A}k = Fk\cos(Fk,\alpha)$$

$$\mathrm{B}k = Fk\cos(Fk,\beta)$$

$$\Gamma k = Fk\cos(Fk,\gamma).$$

Такъ какъ во всякой ортогональной системѣ три координатныя оси всякой точки взаимно-перпендикулярны, то проэкціи силы на эти оси суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія ея по нимъ.

Въ косоугольной прямолинейной системѣ координатъ, также какъ и во всякой криволинейной косоугольной системѣ, подобнаго равенства не существуетъ; означая черезъ X, $У$, Z направленія осей прямолинейной косоугольной системы, мы будемъ тогда подъ знаками: Xk, $Уk$, Zk подразумѣвать *составляющія по этимъ осямъ силы* Fk.

§ 17. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки.

На основаніи приведенныхъ въ § 14 основныхъ началъ, ускореніе свободной матерьяльной точки, масса которой равна m и къ которой приложены силы: $F1$, $F2$, ... Fk, должно быть равно величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ, дѣленной на массу точки, и должно быть направлено по равнодѣйствующей; это выражается слѣдующими равенствами:

a) въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X1 + X2 + \ldots + Xk \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= У1 + У2 + \ldots + Уk \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z1 + Z2 + \ldots + Zk \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots (36)$$

b) въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ: (т. I стр. 252)

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right) &= A1 + A2 + \ldots + Ak \\ \frac{m}{\rho}\,\frac{d\left(\rho^2\frac{d\Theta}{dt}\right)}{dt} &= B1 + B2 + \ldots + Bk \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Gamma1 + \Gamma2 + \ldots + \Gamma k \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots (37)$$

III-17.

c) въ сферическихъ координатахъ: (т. I стр. 255)

$$\left.\begin{aligned}
m.\dot{v}.\cos(\dot{v}\alpha) = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right) &= \mathrm{A} \\
m.\dot{v}.\cos(\dot{v}\beta) = m\left(\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} - r\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right) &= \mathrm{B} \\
m.\dot{v}.\cos(\dot{v}\gamma) = \frac{m}{r\sin\varphi}\frac{d\left(r^2\sin^2\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt} &= \Gamma
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (38)$$

Каждое изъ этихъ равенствъ выражаетъ, что проэкція на одну изъ координатныхъ осей равнодѣйствующей F равняется, помноженной на массу, проэкціи ускоренія на ту же ось.

d) Въ прямолинейныхъ *косоугольныхъ* координатахъ равенства:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

выражаютъ, что *составляющія* по осямъ координатъ силы F равняются, помноженнымъ на массу, *составляющимъ* ускоренія.

e) Проэкція равнодѣйствующей на бинормаль*) траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою, должна быть равна нулю, проэкціи же ея на направленіе скорости и на направленіе радіуса кривизны траэкторіи должны быть пропорціональны соотвѣтствующимъ проэкціямъ ускоренія; а именно: (т. I стр. 250)

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= F\cos(Fv) \\
m\frac{v^2}{\rho} &= F\cos(F\rho) \\
0 &= F\cos(Fb)
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots (39)$$

Если извѣстно движеніе матерьяльной точки, то, зная массу ея, мы можемъ, пользуясь вышеприведенными совокупностями равенствъ,

*) Бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны.

опредѣлить для всякаго момента движенія величину и направленіе равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.

На этомъ основаніи могутъ быть рѣшены, напримѣръ, слѣдующіе вопросы.

Примѣръ 1-й. Тяжелая матерьяльная точка описываетъ окружность радіуса R, находящуюся въ вертикальной плоскости; скорость точки постоянна. Опредѣлить величину и направленіе той силы, которая, слагаясь съ вѣсомъ матерьяльной точки, заставляетъ ее совершать такое движеніе.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось Y направимъ вертикально внизъ, ось X — горизонтально въ плоскости круга.

Движеніе точки по окружности радіуса R, съ постоянною скоростью a, выражается въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ, такъ:

$$x = R\cos\left(\frac{a}{R}t\right);\ \ y = R\sin\left(\frac{a}{R}t\right);$$

проэкціи силы тяжести на оси X и Y суть:

$$X1 = 0;\ \ Y1 = mg;$$

проэкціи же другой силы опредѣлятся изъ уравненій (36) и окажутся имѣющими слѣдующія величины:

$$X2 = -m\frac{a^2}{R^2}x;\ \ Y2 = -m\frac{a^2}{R^2}y - mg = -m\frac{a^2}{R^2}\left(y + \frac{gR^2}{a^2}\right).$$

Изъ этихъ выраженій видно, что сила $F2$ постоянно направлена къ точкѣ C, находящейся на отрицательной оси Y въ разстояніи $g\frac{R^2}{a^2}$ отъ начала координатъ; величина же этой силы равна:

$$F2 = m\frac{a^2}{R^2}\overline{MC},$$

гдѣ $\overline{MC}$ есть разстояніе между матерьяльною точкою M и точкою C.

Примѣръ 2-й. Матерьяльная точка совершаетъ слѣдующее движеніе:

$$x = ae^{-kt}\cos\omega t,\ \ y = be^{-kt}\sin\omega t,$$

находясь подъ вліяніемъ двухъ силъ: $F1$, направленной къ началу координатъ, и $F2$, направленной по касательной къ траэкторіи. Требуется опредѣлить эти силы.

Окажется, что:

$$F1 = m(\omega^2 + k^2)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F2 = 2kmv$$

и что сила $F2$ направлена противоположно скорости.

Слѣдовательно, первая сила есть притяженіе, пропорціональное разстоянію точки отъ начала координатъ, вторая же сила пропорціональна скорости точки и направлена противоположно скорости.

Величина и направленіе силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, могутъ измѣняться:

a) съ измѣненіемъ положенія матерьяльной точки въ пространствѣ,

b) въ той же точкѣ пространства съ теченіемъ времени;

c) кромѣ того, они могутъ зависѣть отъ величины и направленія скорости матерьяльной точки.

(Такъ, напримѣръ, сила притяженія, дѣйствующая по закону тяготѣнія на какую-либо матерьяльную точку со стороны однороднаго шара, имѣетъ величину, обратно пропорціональную квадрату разстоянія точки до центра шара; направлена же эта сила къ центру шара. Если шаръ сохраняетъ неподвижное положеніе въ пространствѣ, то сила притяженія имъ матерьяльной точки будетъ функціею только координатъ точки.

Если же центръ шара будетъ совершать какое-либо движеніе въ пространствѣ, то сила притяженія его въ каждой точкѣ пространства будетъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Примѣрами силъ, зависящихъ отъ скоростей, могутъ служить сопротивленія жидкостей и газовъ движенію погруженныхъ въ нихъ тѣлъ: такія силы называются *сопротивленіями срединъ;* въ примѣненіи къ матерьяльной точкѣ, сопротивленіе среды въ большинствѣ случаевъ принимаютъ противоположнымъ скорости точки и зависящимъ отъ скорости точки и плотности среды).

Вообще говоря, силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

Поэтому вторыя части равенствъ (36) суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ x, y, z и проэкцій скорости на оси координатъ;

а слѣдовательно, эти равенства суть три совокупныя дифференціальныя уравненія втораго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\phi_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\phi_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\phi_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (40)$$

(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ)

Эти уравненія называются *дифференціальными уравненіями движенія матерьяльной точки, выраженными въ прямоугольныхъ координатахъ*.

Если вторыя части равенствъ (37) будутъ выражены въ функціяхъ времени, кругово-цилиндрическихъ координатъ ρ, θ, z, и ихъ производныхъ по времени: ρ', θ', z', то будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)&=\Theta_1\left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\\ \frac{m}{\rho}\frac{d\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}&=\Theta_2\left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\Theta_3\left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\},\ldots (41)$$

гдѣ Θ_1, Θ_2, Θ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ.

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки въ сферическихъ координатахъ, если вторыя части равенства (38) будутъ выражены функціями сферическихъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Если вторыя части равенствъ (39) будутъ выражены функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ

пространствѣ, то эти равенства будутъ представлять собою особый видъ дифференціальныхъ уравненій движенія матерьяльной точки.

Вообще *дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки* могутъ быть представлены подъ весьма различнымъ видомъ, но какъ бы они ни были представлены, они *суть аналитическія выраженія того, что ускореніе матерьяльной точки имѣетъ направленіе и равно дѣленной на массу величинѣ равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ силъ, выражаемыхъ нѣкоторыми функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе матерьяльной точки въ пространствѣ.*

§ 18. Интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость матерьяльной точки.

A. Если извѣстны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ данной массы, въ функціяхъ времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ, и требуется опредѣлить движеніе, совершаемое матерьяльною точкою подъ вліяніемъ этихъ силъ, то надо сначала выбрать систему координатъ, наиболѣе удобную для рѣшенія вопроса, и составить дифференціальныя уравненія движенія точки въ этихъ координатахъ.

Напримѣръ:

Примѣръ 3-й. Матерьяльная точка движется въ однородной средѣ, оказывающей сопротивленіе движенію, пропорціональное первой степени скорости; каждая изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей координатъ притягиваетъ матерьяльную точку съ силою, перпендикулярною къ плоскости и пропорціональною первой степени разстоянія отъ нея. Пусть $2km$, λm, μm, νm суть коэффиціэнты: сопротивленія среды и притяженій перпендикулярныхъ къ плоскостямъ YZ, ZX, XY. Требуется опредѣлить движеніе.

Дифференціальныя уравненія движенія, съ составленія которыхъ начинается процессъ рѣшенія вопроса, мы напишемъ въ этомъ случаѣ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ.

Сопротивленіе движенію, равное $2kmv$, направлено противоположно скорости, поэтому проэкція его на ось X равна: $-2mkx'$.

Изъ трехъ притяженій одно параллельно оси X и направлено въ отрицательную сторону ея, если $X>0$; два другія притяженія перпендикулярны къ этой оси.

Поэтому одно изъ дифференціальныхъ уравненій движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x;$$

а два другія:

$$my'' = -2mky' - m\mu y; \quad mz'' = -2mkz' - m\nu z.$$

Для большей опредѣлительности изложенія мы будемъ предполагать, что дифференціальныя уравненія составлены въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ; но все, что будетъ здѣсь сказано, можетъ быть примѣнено съ весьма незначительными измѣненіями ко всякимъ другимъ координатамъ.

Составленныя дифференціальныя уравненія должны послужить для опредѣленія функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, опредѣляющихъ координаты движущейся точки для всякаго момента опредѣляемаго движенія.

Эти функціи должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ для всякаго момента движенія, обращая ихъ въ тождества; то есть функція времени, заключающаяся во второй части каждаго изъ тождествъ:

$$\begin{aligned} mx'' = mf_1''(t) &= \varphi_1\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right) \\ my'' = mf_2''(t) &= \varphi_2\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right) \\ mz'' = mf_3''(t) &= \varphi_3\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right) \end{aligned} \quad - (40\ldots)$$

должна быть тождественна съ функціею времени, заключающеюся въ первой части его.

Для опредѣленія функцій f_1, f_2, f_3 мы можемъ пользоваться составленными дифференціальными уравненіями и всѣми равенствами, изъ нихъ получаемыми.

Дифференціальныя уравненія даютъ намъ только выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ прочихъ семи величинъ (времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ).

Взявъ отъ дифференціальныхъ уравненій производныя по времени и замѣнивъ въ полученныхъ равенствахъ вторыя производныя координатъ ихъ выраженіями, мы получимъ выраженія третьихъ производныхъ координатъ въ функціяхъ тѣхъ же семи величинъ: t, x, y, z, x', y', z'.

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, мы выразимъ производныя какого угодно порядка (выше 1-го) отъ координатъ по времени въ извѣстныхъ намъ функціяхъ отъ t, x, y, z, x', y', z'.

Пусть t_0 есть какой-либо моментъ движенія; x_0, y_0, z_0, — координаты матерьяльной точки и x_0', y_0', z_0', — проэкціи на оси координатъ скорости точки въ этотъ моментъ; какъ сейчасъ сказано, производныя второго и высшихъ порядковъ въ этотъ моментъ выразятся нѣкоторыми извѣстными намъ функціями семи величинъ t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'; означимъ величины этихъ производныхъ такъ:

$$z_0'',\ y_0'',\ z_0'',\ x_0''',\ y_0''',\ z_0''', \ldots .\ x_0^{(n)},\ y_0^{(n)},\ z_0^{(n)}, \ldots .$$

Функціи $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, выражающія непрерывно измѣняющіяся координаты движущейся точки, должны быть непрерывными функціями времени; поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ Тайлорово разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности $(t-t_0)$; означимъ эту разность черезъ ϑ; ряды будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x=f_1(t)&=x_0+x_0'\vartheta+x_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+x_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \\ y=f_2(t)&=y_0+y_0'\vartheta+y_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+y_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \\ z=f_3(t)&=z_0+z_0'\vartheta+z_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+z_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \end{aligned}\right\};\ldots . \quad (42)$$

но такъ какъ вторыя и высшія производныя: x_0'', y_0'', z_0'', x_0''', ... суть функціи отъ t_0, x_0, y_0, z_0, t_0', x_0', y_0', z_0', то эти ряды представляютъ нѣкоторыя функціи отъ t, t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0':

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \\ y&=f_2(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \\ z&=f_3(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \end{aligned}\right\}\ldots\ldots . \quad (43)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность, исходя изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, получить искомыя функціи въ видѣ рядовъ, заключающихъ кромѣ t, еще t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'.

Примѣнимъ этотъ пріемъ къ слѣдующимъ тремъ примѣрамъ:

Примѣръ 4-й. Сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ постоянную величину и направленіе, такъ что проэкціи ея на оси координатъ равны постояннымъ величинамъ A, B, C.

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ:

$$mx'' = A,\quad my'' = B,\quad mz'' = C.$$

Производныя третьяго и высшихъ порядковъ будутъ равны нулю, а потому:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(t-t_0) + \frac{A}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \\ y &= y_0 + y_0'(t-t_0) + \frac{B}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \\ z &= z_0 + z_0'(t-t_0) + \frac{C}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(44)}$$

Примѣръ 5-й. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть притяженія къ плоскостямъ координатъ, такія же, какъ въ примѣрѣ 3-мъ, но коэффиціенты пропорціональности суть: $m\varkappa_1^2$, $m\varkappa_2^2$, $m\varkappa_3^2$.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = -m\varkappa_1^2 x;\quad my'' = -m\varkappa_2^2 y;\quad mz'' = -m\varkappa_3^2 z.$$

Чтобы составить выраженіе для x, мы составляемъ сначала выраженія для производныхъ:

$$x'' = -\varkappa_1^2 x \qquad\qquad x''' = -\varkappa_1^2 x'$$

$$x^{(4)} = -\varkappa_1^2 x'' = \varkappa_1^4 x \qquad\qquad x^{(5)} = -\varkappa_1^2 x''' = \varkappa_1^4 x'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

рядъ, выражающій x, будетъ слѣдующій:

$$x = x_0 + x_0'\vartheta - \varkappa_1^2 x_0 \frac{\vartheta^2}{1.2} - \varkappa_1^2 x_0' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \varkappa_1^4 x_0 \frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} +$$

$$+ \varkappa_1^4 x_0' \frac{\vartheta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots;$$

III-18.

его можно представить такъ:

$$x=x_0\left(1-\frac{(\varkappa_1\vartheta)^2}{1.2}+\frac{(\varkappa_1\vartheta)^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)+$$
$$+\frac{x_0'}{\varkappa_1}\left(\varkappa_1\vartheta-\frac{(\varkappa_1\vartheta)^3}{1.2.3}+\frac{(\varkappa_1\vartheta)^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right).$$

Легко видѣть, что рядъ, помноженный на x_0, равняется $\cos\varkappa_1\vartheta$, а рядъ, помноженный на $(x_0':\varkappa_1)$, равняется синусу той же дуги, слѣдовательно:

$$x=x_0\cos\varkappa_1\vartheta+\frac{x_0'}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (45, a)$$

Такъ же найдемъ выраженія для y и z:

$$y=y_0\cos\varkappa_2\vartheta+\frac{y_0'}{\varkappa_2}\sin\varkappa_2\vartheta, \ldots\ldots\ldots\ldots (45, b)$$

$$z=z_0\cos\varkappa_3\vartheta+\frac{z_0'}{\varkappa_3}\sin\varkappa_3\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (45, c)$$

Чтобы упростить примѣненіе этого пріема къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 3-го, мы преобразуемъ ихъ слѣдующимъ образомъ.

Сокративъ m, помножимъ каждое на e^{kt};
означимъ черезъ φ_1, φ_2, φ_3 слѣдующія произведенія:

$$\varphi_1=xe^{kt},\quad \varphi_2=ye^{kt},\quad \varphi_3=ze^{kt},$$

а чрезъ $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$, $\varkappa_3^2$ слѣдующія разности

$$\varkappa_1^2=\lambda-k^2,\quad \varkappa_2^2=\mu-k^2,\quad \varkappa_3^2=\nu-k^2;$$

тогда дифференціальныя уравненія 3-го примѣра примутъ такой видъ:

$$\varphi_1''=-\varkappa_1^2\varphi_1,\quad \varphi_2''=-\varkappa_2^2\varphi_2,\quad \varphi_3''=-\varkappa_3^2\varphi_3,$$

одинаковый съ видомъ уравненій пятаго примѣра; по этому нетрудно получить для x, y, z слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
x&=e^{-k\vartheta}\left(x_0\cos(\vartheta\sqrt{\lambda-k^2})+\frac{x_0'+kx_0}{\sqrt{\lambda-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\lambda-k^2})\right)\\
y&=e^{-k\vartheta}\left(y_0\cos(\vartheta\sqrt{\mu-k^2})+\frac{y_0'+ky_0}{\sqrt{\mu-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\mu-k^2})\right)\\
z&=e^{-k\vartheta}\left(z_0\cos(\vartheta\sqrt{\nu-k^2})+\frac{z_0'+kz_0}{\sqrt{\nu-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\nu-k^2})\right)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (46)$$

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять функціи f_1, f_2, f_3 путемъ послѣдовательнаго дифференцированія составленныхъ дифференціальныхъ уравненій, мы можемъ идти къ той же цѣли путемъ прямо-противоположнымъ.

Имѣя выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ: времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ, мы можемъ искать выраженія первыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ времени и координатъ; для этого надо данныя дифференціальныя уравненія подвергнуть такимъ преобразованіямъ, чтобы, вмѣсто нихъ, получились три равносильныя *) имъ дифференціальныя уравненія такого вида:

$$\overset{**)}{\frac{d\varphi_1}{dt}}=0,\ \frac{d\varphi_2}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_3}{dt}=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(47)}$$

---

*) Уравненія (47) равносильны дифференціальнымъ уравненіямъ движенія матерьяльной точки въ томъ смыслѣ, что, если мы рѣшимъ первыя относительно x'', y'', z'', то получимъ послѣднія, то есть:

$$x''=\frac{\Phi_1}{m},\ y''=\frac{\Phi_2}{m},\ z''=\frac{\Phi_3}{m};$$

а потому, если въ уравненіяхъ (47) замѣнимъ x'', y'', z'', функціями Φ_1, Φ_2, Φ_3, дѣленными на m, то первыя части этихъ уравненій обратятся въ нуль черезъ взаимное сокращеніе всѣхъ членовъ.

**) Знакъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

служитъ для обозначенія полной производной по времени отъ функціи $\varphi(t, x, y, z, x', y', z')$; то есть:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}.$$

Частныя же производныя функціи φ по входящимъ въ нее перемѣннымъ величинамъ мы будемъ обозначать помощію круглыхъ ∂; напримѣръ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

есть производная по t, явно заключающемуся въ функціи φ.

гдѣ φ_1, φ_2, φ_3 суть нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, x', y', z'; интегрируя эти уравненія, мы получимъ равенства:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t,\ x,\ y\ z,\ x',\ y',\ z')=C_1\\ \varphi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y';\ z')=C_2\\ \varphi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')=C_3\end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots (48)$$

которыя должны служить для выраженія x', y', z' въ функціяхъ отъ t, x, y, z, C_1, C_2, C_3.

Величины C_1, C_2, C_3 суть произвольныя постоянныя, введенныя тремя произведенными интегрированіями и незаключающіяся въ дифференціальныхъ уравненіяхъ.

Каждое изъ равенствъ вида (48) называется *первымъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій движенія.*

Если изъ трехъ первыхъ интеграловъ, послѣ какихъ-либо преобразованій, могутъ быть получены три равносильныя имъ уравненія слѣдующаго вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt}=0,\ \frac{d\Phi_2}{dt}=0,\ \frac{d\Phi_3}{dt}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

гдѣ Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть функціи отъ t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, то изъ нихъ, послѣ новыхъ интегрированій, получимъ *вторые интегралы* дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_1\\ \Phi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_2\\ \Phi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_3\end{aligned}\right\}, \ldots\ldots (50)$$

гдѣ Γ_1, Γ_2, Γ_3 суть три постоянныя произвольныя.

Полученные вторые интегралы должны служить для выраженія x, y, z въ функціяхъ времени и шести постоянныхъ произвольныхъ:

$$\left.\begin{aligned}x=\psi_1(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)\\ y=\psi_2(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)\\ z=\psi_3(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (51)$$

Выраженія для x', y', z' получатся, или непосредственно изъ выраженій (51), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$x'=\psi_1'(t),\ y'=\psi_2'(t),\ z'=\psi_3'(t), \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

или изъ первыхъ интеграловъ (48), если рѣшить ихъ относительно x', y', z' и замѣнить x, y, z функціями ψ_1, ψ_2, ψ_3; выраженія, полученныя тѣмъ и другимъ путемъ, должны быть одинаковы, такъ какъ функціи (51) должны тождественно удовлетворять уравненіямъ (49) или равносильнымъ имъ интеграламъ (48).

Выраженія для x'', y'', z'', полученныя чрезъ двукратное дифференцированіе функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3 по времени:

$$x''=\psi_1''(t),\ y''=\psi_2''(t),\ z''=\psi_3''(t), \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

должны быть тождественны съ выраженіями: (47 bis):

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{m}\Phi_1(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi'_1,\ \psi'_2,\ \psi'_3) \\ y'' &= \frac{1}{m}\Phi_2(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi'_1,\ \psi'_2,\ \psi'_3) \\ z'' &= \frac{1}{m}\Phi_3(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi'_1,\ \psi'_2,\ \psi'_3) \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots \quad (54)$$

потому что функціи (51) должны тождественно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

И такъ далѣе.

Равенства (48) и (51) должны быть справедливы для всякаго момента движенія; примѣняя ихъ къ моменту t_0, въ который координаты точки суть x_0, y_0, z_0, а проэкціи скорости — x_0', y_0', z_0', мы получимъ слѣдующую зависимость между этими постоянными и постоянными произвольными C_1, C_2, ... Γ_3:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') &= C_1 \\ \varphi_2(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') &= C_2 \\ \varphi_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') &= C_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

III-18.

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_1\\ \Phi_2(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_2\\ \Phi_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_3\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (56)$$

Отсюда слѣдуетъ, что x_0, y_0, ... z_0' суть функціи ψ_1, ψ_2, ..., ψ'_3 отъ t_0, C_1, C_2, C_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3:

$$\left.\begin{aligned}x_0=\psi_1(t_0)\\ y_0=\psi_2(t_0)\\ z_0=\psi_3(t_0)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (57)$$

$$\left.\begin{aligned}x_0'=\psi_1'(t_0)\\ y_0'=\psi_2'(t_0)\\ z_0'=\psi_3'(t_0)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (58)$$

а такъ какъ t_0 есть произвольно-выбранный моментъ движенія и C_1, C_2, ... Γ_3 суть постоянныя произвольныя, то и x_0, y_0, ... y_0', z_0' суть величины произвольныя.

Слѣдовательно, *функціи времени, выражающія координаты движущейся свободной матерьяльной точки и удовлетворяющія даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, заключаютъ въ себѣ шесть постоянныхъ произвольныхъ, вслѣдствіе чего координаты и проэкціи скорости точки могутъ быть выбраны по произволу въ одинъ изъ моментовъ движенія.*

Функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 даютъ тѣ же самыя величины для координатъ x, y, z въ моментъ t, какія даютъ функціи f_1, f_2, f_3 (43), если только удовлетворены условія (55), (56), или равносильныя имъ (57), (58); въ этомъ можемъ убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Разложимъ функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 въ ряды по возрастающимъ степенямъ разности $(t-t_0)=\vartheta$; получимъ, напримѣръ для ψ_1, слѣдующій рядъ:

$$\psi_1(t)=\psi_1(t_0)+\psi_1'(t_0)\vartheta+\psi_1''(t_0)\frac{\vartheta^2}{1.2}+\psi_1'''(t_0)\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots;$$

но:

$$\psi_1(t_0)=x_0=f_1(t_0),\ \ \psi_1'(t_0)=x_0'=f_1'(t_0),$$

$$\psi_1''(t_0)=\frac{1}{m}\Phi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0')=f_1''(t_0);$$

также убѣдимся, что $\psi_1'''(t_0)=f_1'''(t_0)$ и такъ далѣе; поэтому предыдущій рядъ есть ни что иное, какъ разложеніе первой изъ функцій (43) по восходящимъ степенямъ разности $(t-t_0)=\theta$, а потому:

$$\psi_1(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)=f_1(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0'),$$

то есть функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются въ функціи f_1, f_2, f_3, если произвольныя постоянныя C_1, C_2, ... Γ_3 будутъ замѣнены величинами t_0, x_0, y_0, ... z_0' при посредствѣ равенствъ (55) (56).

Изъ этого видно, что оба указанные нами пріема даютъ результаты тождественные.

Примѣнимъ второй пріемъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 4-го; мы легко найдемъ, что первые интегралы суть:

$$x'-\frac{A}{m}t=C_1,\ \ y'-\frac{B}{m}t=C_2,\ \ z'-\frac{C}{m}t=C_3;$$

вторые интегралы:

$$x-\frac{A}{m}\frac{t^2}{2}-C_1t=\Gamma_1,\ \ y-\frac{B}{m}\frac{t^2}{2}-C_2t=\Gamma_2,\ \ z-\frac{C}{m}\frac{t^2}{2}-C_3t=\Gamma_3.$$

Составивъ равенства (55) (56) и исключивъ произвольныя постоянныя изъ полученныхъ вторыхъ интеграловъ, мы приведемъ послѣдніе къ виду (44).

B. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки могутъ быть замѣнены совокупностью шести дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x',\ \ \frac{dy}{dt}=y',\ \ \frac{dz}{dt}=z'\\&\frac{dx'}{dt}=\frac{\Phi_1}{m},\ \ \frac{dy'}{dt}=\frac{\Phi_2}{m},\ \ \frac{dz'}{dt}=\frac{\Phi_3}{m}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (59)$$

Каждое изъ равенствъ вида:

$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z') = C,$$

полная производная первой части котораго:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно, когда вмѣсто производныхъ отъ x, y, z, x', y', z' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (59), называется интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій.

Чтобы найти функціи времени, выражающія x, y, z, x', y', z' и тождественно удовлетворяющія уравненіямъ (59), необходимо имѣть шесть такихъ различныхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1,\ \varphi_2 = C_2,\ \varphi_3 = C_3,\ \varphi_4 = C_4,\ \varphi_5 = C_5,\ \varphi_6 = C_6, \ldots\ldots \quad \textbf{(60)}$$

изъ полныхъ производныхъ которыхъ по времени:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_4}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_6}{dt} = 0 \ldots \quad \textbf{(60 bis)}$$

получатся дифференціальныя уравненія (59), если шесть уравненій (60 bis) будутъ рѣшены относительно производныхъ:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ \frac{dx'}{dt},\ \frac{dy'}{dt},\ \frac{dz'}{dt}.$$

Рѣшивъ интегралы (60) относительно x, y, ... z', мы получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ t и шести произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, ... C_6.

Если выраженія для x, y, z суть:

$$x = \psi_1,\ y = \psi_2,\ z = \psi_3, \ldots\ldots \quad \textbf{(61)}$$

гдѣ вторыя части суть функціи отъ t, C_1, C_2, ... C_6, то выраженія для x', y', z' будутъ:

$$x' = \psi_1',\ y' = \psi'_2,\ z' = \psi'_3, \ldots\ldots \quad \textbf{(61 bis)}$$

такъ какъ уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z'$$

должны быть удовлетворены тождественно.

Всякое равенство вида:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6)=C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

есть также интегралъ уравненій (59); въ самомъ дѣлѣ полная производная первой части его:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_6}\frac{d\varphi_6}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ отъ $x, y, \ldots z'$ вторыми частями уравненій (59), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя отъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$.

Изъ этого слѣдуетъ, что если совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть независимыхъ интеграловъ, то они имѣютъ еще кромѣ того безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ собою комбинаціи шести первыхъ.

Всякій новый интегралъ:

$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z)=C$$

совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (59) можетъ быть представленъ подъ видомъ (62); въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ φ вмѣсто $x, y, \ldots z'$ ихъ выраженія (61) и (61 bis), мы обратимъ φ въ нѣкоторую функцію f отъ $t, C_1, C_2, \ldots C_6$; замѣнимъ $C_1, C_2, \ldots C_6$ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$:

$$\varphi=f(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6);$$

полная производная отъ φ или отъ f по t будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial\varphi_6}\frac{d\varphi_6}{dt}:$$

III-18.

она должна тождественно обращаться въ нуль, когда производныя отъ $x, y, z, \ldots z'$ будутъ замѣнены вторыми частями уравненій (59); но тогда обращаются въ нуль также и полныя производныя функцій $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_6$; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0;$$

значитъ:

$$\varphi=f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6)=C.$$

Произвольная постоянная C есть такая же функція произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_6$:

$$C=f(C_1, C_2, \ldots C_6).$$

Слѣдовательно, можно сказать, что *совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ съ шестью независимыми произвольными постоянными* и безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ комбинаціи первыхъ; произвольныя постоянныя послѣднихъ суть такія же комбинаціи независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Къ этому надо еще прибавить: что любые шесть интеграловъ могутъ играть роль самостоятельныхъ, если изъ нихъ, путемъ полнаго дифференцированія по времени, могутъ быть получены дифференціальныя уравненія (59), какъ указано относительно интеграловъ (60).

Д. Если найдены будутъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (59), то, исключивъ изъ нихъ x', y', z', мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія.

Напримѣръ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z'$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{A}{m}, \quad \frac{dy'}{dt}=\frac{B}{m}, \quad \frac{dz'}{dt}=\frac{C}{m}$$

суть три:

$$x'-\frac{A}{m}t=C_1, \quad y'-\frac{B}{m}t=C_2, \quad z'-\frac{C}{m}t=C_3, \ldots \ldots \quad (63)$$

полученные выше, и три новые:

$$(x')^2 - 2\frac{A}{m}x = C_4,\ \ (y')_2 - 2\frac{B}{m}y = C_5,\ \ (z')_2 - 2\frac{C}{m}z = C_6 \dots \textbf{(64)}$$

По исключеніи x', y', z' изъ (63) и (64), мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій примѣра 4-го подъ слѣдующимъ видомъ.

$$x = \frac{A}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + \frac{C_1^2 - C_4}{2A}m,\ \ y = \frac{B}{m}\frac{t^2}{2} + C_2 t + \frac{C_2^2 - C_5}{2B}m,$$

$$z = \frac{C}{m}\frac{t^2}{2} + C_3 t + \frac{C_3^2 - C_6}{2C}m.$$

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ можно получить всѣ шесть самостоятельныхъ интеграловъ, но трудно исключить изъ нихъ x', y', z', тогда совокупность шести первыхъ интеграловъ представляетъ собою рѣшеніе вопроса.

Во всякомъ случаѣ полное рѣшеніе какого-либо вопроса о движеніи свободной матерьяльной точки заключаетъ въ себѣ шесть независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ или величины t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'.

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ; величины x_0, y_0, z_0 называются координатами *начальнаго положенія* матерьяльной точки, а величины x_0', y_0', z_0' — проэкціями на оси координатъ *начальной скорости* точки.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начальнаго момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя координаты будемъ обозначать буквами a, b, c, а проэкціи начальной скорости буквами α, β, γ.

§ 19. Случаи прямолинейныхъ движеній матерьяльной точки.

Начнемъ съ разсмотрѣнія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ неизмѣнное направле-

ніе въ пространствѣ и начальная скорость параллельна тому же направленію; тогда матерьяльная точка совершаетъ движеніе по прямой, параллельной этому направленію.

Въ самомъ дѣлѣ, если ось X сдѣлаемъ параллельною этому направленію и проведемъ ее черезъ начальное положеніе матерьяльной точки, то дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx''=X,\ my''=0,\ mz''=0;$$

первые и вторые интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидно будутъ слѣдующіе:

$$y'=0,\ z'=0,$$

потому что

$$y_0'=0 \text{ и } z_0'=0,$$

и далѣе:

$$y=0,\ z=0,$$

потому что

$$y_0=0,\ z_0=0;$$

слѣдовательно, матерьяльная точка будетъ совершать свое движеніе по оси X.

Въ оставшемся дифференціальномъ уравненіи движенія точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \dots\dots\dots\dots\dots\dots (65)$$

вторая часть X, выражающая величину и знакъ силы, приложенной къ точкѣ, можетъ быть функціею:

a) одной изъ величинъ t, x, x',

b) двухъ изъ нихъ,

c) всѣхъ трехъ;

можемъ поэтому различать случаи семи родовъ:

1) $X=\phi(t)$ 4) $X=\phi(x.\ x')$ 7) $X=\phi(t,\ x,\ x')$.

2) $X=\phi(x)$ 5) $X=\phi(x',\ t)$

3) $X=\phi(x')$ 6) $X=\phi(t,\ x)$

Случаи 1-го рода:

$$mx'' = \phi(t).$$

Первый интегралъ:

$$mx' - \mathit{f}(t) = C; \quad \mathit{f}(t) = \int \phi(t)\,dt.$$

Второй интегралъ:

$$mx - F(t) - Ct = \mathbf{\Gamma}; \quad F(t) = \int \mathit{f}(t)\,dt.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенія:

$$mx_0' - \mathit{f}(t_0) = C, \quad mx_0 - F(t_0) - Ct_0 = \mathbf{\Gamma}.$$

Исключивъ C и Γ изъ перваго и втораго интеграла, мы получимъ:

$$x' = x_0' + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \phi(t)\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(66)}$$

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \phi(t)\,dt \ldots\ldots \textbf{(67)}$$

Примѣры: a) Паденіе матерьяльной точки вертикально сверху внизъ подъ вліяніемъ силы тяжести, принимаемой постоянною (ось X направлена вертикально, сверху внизъ).

$$mx'' = mg, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = \alpha > 0, \quad t_0 = 0.$$

b) Движеніе тяжелой матерьяльной точки, брошенной снизу вверхъ вертикально:

$$mx'' = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = -\alpha, \text{ гдѣ } \alpha > 0.$$

Опредѣлить: высоту поднятія, время подъема и дальнѣйшее движеніе послѣ поднятія на наибольшую высоту.

III-19.

Примѣръ 6-й.

$$X = m\lambda \sin\frac{2\pi}{T}t,\ x_0=0,\ x'_0=0,\ t_0=0.$$

$$x=\frac{\lambda T}{2\pi}t-\lambda\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\sin\frac{2\pi}{T}t;$$

точка совершаетъ колебательное движеніе около центра, движущагося равномѣрно со скоростью $\frac{\lambda T}{2\pi}$.

Случаи 2-го рода.

$$mx''=\phi(x).$$

Это дифференціальное уравненіе можетъ быть замѣнено совокупностью двухъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$m\frac{dx'}{dt}=\phi(x),\ \frac{dx}{dt}=x',$$

которыя могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{mdx'}{\phi(x)}=\frac{dx}{x'}=dt.$$

Первый интегралъ дифференціальнаго уравненія втораго порядка получимъ, интегрируя двучленное уравненіе:

$$mx'dx'=\phi(x)dx.$$

Этотъ интегралъ — слѣдующій:

$$m(x')^2-2\mathcal{f}(x)=C,\ \mathcal{f}(x)=\int\phi(x)dx.$$

Второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка будетъ:

$$\sqrt{m}\int\frac{dx}{\sqrt{C+2\mathcal{f}(x)}}=t+\Gamma.$$

III-19.

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенія:

$$m(x'_0)^2 - 2\phi(x_0) = C$$

$$F(x_0, x_0) = t_0 + \Gamma; \quad F(x, x_0) = \int \frac{\sqrt{m}\,dx}{\sqrt{m(x'_0)^2 + 2\phi(x) - 2\phi(x_0)}} = t + \Gamma;$$

Поэтому:

$$x' = \left((x'_0)^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} \phi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{m}\,dx}{\left(m(x'_0)^2 + 2\int_{x_0}^{x} \phi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Примѣры a и b:

$$X = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = \pm\alpha.$$

Примѣръ 7-й. $X = \mu^2 x$, то есть сила, дѣйствующая на матерьяльную точку, есть сила, отталкивающая ее отъ начала координатъ O, и величина ея пропорціональна разстоянію отъ O.

Положимъ

$$t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha.$$

$$\frac{2}{m}\int_a^x \phi(x)dx = k^2(x^2 - a^2); \quad k = \frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

$$x' = \sqrt{\alpha^2 - k^2a^2 + k^2x^2} = k\sqrt{x^2 + p}; \quad p = \frac{\alpha^2}{k^2} - a^2.$$

Если начальная скорость α настолько велика, что $p > 0$, то x'_1 не обращается въ нуль, а потому и не мѣняетъ своего знака во

III-19.

время движенія; въ этихъ случаяхъ движеніе совершается безъ перемѣны направленія въ одну и ту же сторону оси X, а именно въ положительную, если $\alpha>0$, и въ отрицательную, если $\alpha<0$.

Если же $p<0$, такъ что можно положить: $p=-n^2$, то выраженіе для x' будетъ:

$$x'=k\sqrt{x^2-n^2};$$

оно показываетъ, что наименьшая величина, которую можетъ имѣть x^2, есть n^2, то есть, что матерьяльная точка не можетъ приблизиться къ началу координатъ на разстояніе, меньшее n; когда x будетъ равно $\pm n$, тогда скорость сдѣлается равною нулю и послѣ этого направленіе движенія перемѣнится.

Далѣе:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+p}}=kt,$$

или

$$\log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+p}}{a+\frac{\alpha}{k}}\right]=kt;\ x+\sqrt{x^2+p}=\left(a+\frac{\alpha}{k}\right)e^{kt};\ldots\ldots \quad (70)$$

отсюда

$$\frac{e^{-kt}}{a+\frac{\alpha}{k}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+p}}=\frac{x-\sqrt{x^2+p}}{a^2-\frac{\alpha^2}{k^2}};$$

$$x-\sqrt{x^2+p}=\left(a-\frac{\alpha}{k}\right)e^{-kt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Сложивъ равенства (70) и (71), мы получимъ слѣдующее выраженіе движенія точки:

$$x=a\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}+\frac{\alpha}{k}\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Эта формула можетъ быть представлена въ болѣе сжатой формѣ,

но въ различномъ видѣ, смотря потому, каковы знаки величинъ $(ak+\alpha)$ и $(ak-\alpha)$.

a) Если эти величины имѣютъ одинаковые знаки, то, положивъ:

$$e^{k\tau}=\sqrt{\frac{a-\frac{\alpha}{k}}{a+\frac{\alpha}{k}}},$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x=\frac{\sqrt{a^2k^2-\alpha^2}}{2k}(e^{k\vartheta}+e^{-k\vartheta});\quad \vartheta=t-\tau.$$

Такая зависимость x отъ t изобразится графически кривою линіею такого вида, какъ на чертежѣ 1-мъ, если изображать t абциссами, а x ординатами. Вся кривая находится, или на сторонѣ положительныхъ, или на сторонѣ отрицательныхъ ординатъ; ON изображаетъ τ, т.-е. моментъ, въ который точка находится въ кратчайшемъ разстояніи отъ начала координатъ.

b) Если знаки вышеупомянутыхъ величинъ различны, то положивъ:

$$e^{k\theta}=\sqrt{\frac{\frac{\alpha}{k}-a}{\frac{\alpha}{k}+a}},$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x=\frac{\sqrt{\alpha^2-a^2k^2}}{2k}(e^{k\vartheta}-e^{-k\vartheta});\quad \vartheta=t-\theta.$$

Такая зависимость изобразится кривою такого вида, какъ на чертежѣ 2-мъ. Движеніе совершается со скоростью, не измѣняющею своего направленія; въ моментъ $ON=\theta$ точка проходитъ черезъ начало координатъ.

c) Если

$$ak-\alpha=0,$$

то тогда

$$x=ae^{kt},$$

III-19.

то есть точка ассимптотически удаляется отъ начала координатъ въ безконечность.

d) Если

$$ak + \alpha = 0,$$

тогда

$$x = ae^{-kt},$$

то есть точка ассимптотически приближается къ началу координатъ.

Примѣръ 8-й.

$$X = -\lambda^2 x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha;$$

то есть сила, дѣйствующая на матерьяльную точку, есть притяженіе къ точкѣ O, прямо пропорціональное разстоянію отъ нея.

Въ этомъ случаѣ

$$x' = \omega\sqrt{q^2 - x^2}; \quad \omega = \frac{\lambda}{\sqrt{m}}; \quad q^2 = a^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2};$$

такъ какъ скорость должна имѣть во всякомъ случаѣ дѣйствительное значеніе, то x^2 не можетъ быть болѣе q^2, и когда $x = \pm q$, скорость обращается въ нуль.

Далѣе

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = \omega t,$$

или

$$\arcsin\frac{x}{q} - \arcsin\frac{a}{q} = \omega t;$$

откуда

$$\frac{x}{q} = \sin\left(\omega t + \arcsin\frac{a}{q}\right) = \frac{a}{q}\cos\omega t + \frac{\sqrt{q^2 - a^2}}{q}\sin\omega t;$$

слѣдовательно

$$x = a\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Это выраженіе могло быть получено прямо изъ выраженія (72)

черезъ замѣщеніе величины k величиною $i\omega$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$; кромѣ того, оно согласуется съ выраженіемъ (45, a), удовлетворяющимъ тому же самому дифференціальному уравненію.

Изъ выраженія (73), а еще лучше изъ выраженія:

$$x=q\sin(\omega t+c);\quad c=\arcsin\frac{a}{q}$$

видно, что точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе около начала O, отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ по обѣ стороны его; полный періодъ колебанія равенъ $2T$, гдѣ:

$$T=\frac{\pi}{\omega}=\pi\frac{\sqrt{m}}{\lambda},\quad \frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(73 bis)}$$

Случаи 3-го рода:

$$mx''=\phi(x').$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка можно замѣнить двумя дифференціальными уравненіями перваго порядка, которыя можно представить такъ:

$$\frac{mdx'}{\phi(x')}=\frac{dx}{x'}=dt.$$

Въ случаяхъ этого рода, смотря по обстоятельствамъ, можно рѣшать вопросъ различными способами.

А. Интегрировать уравненіе:

$$m\frac{dx'}{\phi(x')}=dt.$$

Если интегралъ его:

$$m\int\frac{dx'}{\phi(x')}=t+C_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x', которое выразится нѣкоторою функціею ψ отъ $(t+C_1)$, то второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$\int\psi(t+C_1)dt=x+C_2\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

III-19.

B. Интегрировать уравненіе:

$$m\frac{x'dx'}{\varphi(x')}=dx.$$

Если интегралъ его:

$$m\int\frac{x'dx'}{\varphi(x')}=x+C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x', которое выразится нѣкоторою функціею Ψ отъ $(x+C_2)$, то второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$\int\frac{dx}{\Psi(x+C_2)}=t+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

C. Второй интегралъ можно получить или разсматривать, какъ результатъ исключенія x' изъ интеграловъ (74) и (76).

Примѣръ 9-й.

$$X=mg-mkx'.$$

Если положительная ось X направлена вертикально сверху внизъ, то такимъ образомъ будетъ выражаться равнодѣйствующая изъ вѣса матерьяльной точки и сопротивленія воздуха, если принимать послѣднее пропорціональнымъ первой степени скорости.

Въ этомъ примѣрѣ можно, кромѣ предыдущихъ пріемовъ, примѣнить слѣдующій.

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ даннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка:

$$x''=g-kx'$$

будетъ слѣдующій:

$$x'=gt-kx+C$$

или

$$x'-a=gt-k(x-a).$$

Другой получится по формулѣ (74) и будетъ:

$$\int\frac{kdx'}{g-kx'}=kt+C_1,$$

или

$$\log\left(\frac{g-k\alpha}{g-kx'}\right)=kt.$$

Исключивъ x' изъ этихъ двухъ интеграловъ, мы получимъ результатъ:

$$x=a+\frac{g}{k}t-\frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-\alpha\right)\left(1-e^{-kt}\right)\ldots\ldots\ldots (78)$$

Эта формула пригодна, какъ для восходящаго, такъ и для нисходящаго движенія матерьяльной точки; первое имѣетъ мѣсто только при $\alpha<0$ и продолжается только до момента:

$$t_1=\frac{1}{k}\log\left(1-\frac{k\alpha}{g}\right),$$

въ который скорость обращается въ нуль и съ котораго начинается нисходящее движеніе. Во всякомъ случаѣ скорость съ теченіемъ времени ассимптотически приближается къ предѣлу $+\frac{g}{k}$.*).

Примѣръ 10. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально кубу скорости; коэффиціэнтъ сопротивленія среды означимъ черезъ mgk^3.

$$mx''=mg-mg(kx')^3.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx'}{1-(kx')^3}=gdt,\quad \frac{x'dx'}{1-(kx')^3}=gdx$$

составимъ слѣдующее:

$$\frac{dx'}{(kx')^2+kx'+1}=g(dt-kdx),$$

---

*) Изобразивъ зависимость (78) графически, получимъ кривую, изображенную на чертежѣ 3-мъ; выпуклость этой кривой постоянно обращена къ оси абциссъ; она имѣетъ ассимптоту, наклоненную къ оси абциссъ подъ угломъ, тангенсъ котораго есть $\frac{g}{k}$; x имѣетъ наименьшую величину въ точкѣ M.

III-19.

интегралъ котораго есть:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2kx'+1}{\sqrt{3}}\right)=gk(t-kx)+C_1\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Полагая $t_0=0$, $x_0=a$, $x_0'=\alpha$, получимъ для опредѣленія C_1, равенство:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}}\right)=C_1-gk^2a.$$

По исключеніи C_1, равенство (79) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{gk\sqrt{3}}{2}\Big(t-k(x-a)\Big)=\operatorname{arctg}\frac{2kx'+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}}\ldots\ldots (80)$$

Для полученія другаго перваго интеграла мы составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{1+kx'}{1-(kx')^3}dx'=g(dt+kdx),$$

интегралъ котораго — слѣдующій:

$$\log\frac{1-(kx')^3}{(1-kx')^3}=3kg(t+kx)+C_2,\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

или

$$3kg\Big(t+k(x-a)\Big)=\log\frac{1-(kx')^3}{(1-kx')^3}-\log\frac{1-(k\alpha)^3}{(1-k\alpha)^3}\ldots\ldots\ldots (82)$$

Совокупность первыхъ интеграловъ (79) и (81), или (80) и (82) представляетъ рѣшеніе задачи о движеніи тяжелой матерьяльной точки, брошенной вертикально вверхъ или внизъ и движущейся въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально кубу скорости; въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ (80) и (82) можемъ вычислять t и x, соотвѣтствующія различнымъ скоростямъ.

Но можно исключить x' изъ этихъ интеграловъ и тогда получимъ второй интегралъ въ видѣ зависимости между величинами:

$$\xi=\frac{\sqrt{3}}{2}gk\Big(t-k(x-a)\Big),\quad \eta=\frac{3kg}{2}\Big(t+k(x-a)\Big),$$

и этотъ же интегралъ можно получить черезъ интегрированіе уравненія (80); результатъ будетъ слѣдующій:

$$\cos\xi-\frac{1+k\alpha}{1-k\alpha}\sqrt{3}\sin\xi=e^{-\eta}\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Для опредѣленія момента t_1 и положенія x_1 наибольшаго подъема матерьяльной точки при отрицательной начальной скорости, положимъ въ равенствахъ (80) и (82) $x'=0$ и $a=-n$, гдѣ n означаетъ положительную скорость; изъ нихъ получимъ слѣдующія выраженія:

$$t_1=\frac{1}{3gk}\left[\log\frac{1+kn}{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{kn\sqrt{3}}{2-kn}\right]\ldots\ldots (84)$$

$$-(x_1-a)=\frac{1}{3gk^2}\left[\log\frac{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}{1+kn}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{kn\sqrt{3}}{2-kn}\right]\ldots (85)$$

Примѣръ 11-й. Тяжелая матерьяльная точка движется въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости. Въ этомъ случаѣ X выразится неодинаковымъ образомъ при паденіи точки сверху внизъ и при подъемѣ снизу вверхъ:

при паденіи $X=m(g-k^2(x')^2)$,

при подъемѣ $X=m(g+k^2(x')^2)$.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

при паденіи $x''=g-(kx')^2$,

при подъемѣ $x''=g+(kx')^2$;

разница между ними только въ знакѣ у k^2, поэтому мы будемъ интегрировать только уравненіе для паденія точки, а чтобы перейти къ подъему, должны будемъ подставить въ результатъ ik (гдѣ $i=\sqrt{-1}$) вмѣсто k.

Интегрировать уравненіе

$$x''=g-(kx')^2$$

можно по всякому изъ указанныхъ способовъ; по способу А сначала получимъ интегралъ:

$$\int\frac{dx'}{g-(kx')^2}=t+C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}}\log\left(\frac{\sqrt{g}+kx'}{\sqrt{g}-kx'}\right)=t+C_1;$$

III-19.

потому что дробь, стоящая подъ знакомъ интеграла, можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dx'}{g-(kx')^2}=\frac{dx'}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}-kx'}+\frac{1}{\sqrt{g}+kx'}\right).$$

Предыдущее равенство, при положеніи $t_0=0$, $x'=\alpha$, даетъ

$$\frac{1+\varkappa x'}{1-\varkappa x'}=\frac{1+\varkappa\alpha}{1-\varkappa\alpha}e^{2\varepsilon t}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

гдѣ, для краткости, введены обозначенія:

$$\frac{k}{\sqrt{g}}=\varkappa,\quad k\sqrt{g}=\varepsilon.$$

Рѣшивъ равенство (86) относительно x', получится уравненіе:

$$x'=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{(1+\varkappa\alpha)e^{\varepsilon t}-(1-\varkappa\alpha)e^{-\varepsilon t}}{(1+\varkappa\alpha)e^{\varepsilon t}+1-\varkappa\alpha)e^{-\varepsilon t}}\right],$$

которое легко интегрируется и даетъ второй интегралъ дифференціальнаго уравненія движенія:

$$x=a+\frac{1}{\varkappa\varepsilon}\log\left(\frac{e^{\varepsilon t}+e^{-\varepsilon t}}{2}+\varkappa\alpha\frac{e^{\varepsilon t}-e^{-\varepsilon t}}{2}\right)$$

или

$$x=a+\frac{1}{k^2}\log\left(\cos(ikt\sqrt{g})-\frac{k\alpha}{\sqrt{g}}i\sin(ikt\sqrt{g})\right).\ldots. (87)$$

По способу B мы должны начать съ интегрированія уравненія:

$$\frac{x'dx'}{g-(kx')^2}=dx;$$

получимъ

$$\frac{g-(kx')^2}{g-(k\alpha)^2}=e^{2k^2(a-x)};\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

продолжая дальше, мы придемъ къ тому же самому результату (87).

Чтобы получить выраженіе для движенія снизу вверхъ, надо положить скорость α отрицательною и замѣнить k черезъ ik, тогда выраженіе (87) приметъ слѣдующій видъ:

$$x=a-\frac{1}{k^2}\log\left(\cos(kt\sqrt{g})+\frac{kn}{\sqrt{g}}\sin(kt\sqrt{g})\right), \ldots . (89)$$

гдѣ подставлено $\alpha=-n$.

Равенство (88) при движеніи снизу вверхъ замѣняется слѣдующимъ.

$$\frac{g+(kx')^2}{g+(kn)^2}=e^{-2k^2(a-x)} \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Наибольшая высота опредѣлится изъ послѣдняго равенства, положивъ въ немъ $x'=0$; означимъ высоту поднятія $(a-x_1)$ черезъ h.

$$1+\frac{k^2}{g}n^2=e^{2k^2h} \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою по достиженіи ею наибольшей высоты, выразится уравненіями (86)—(88), если подставимъ въ нихъ $(t-t_1)$, x_1 и нуль вмѣсто t, a и α.

Скорость v, съ которою точка возвратится въ положеніе $x=a$, опредѣлится изъ (88):

$$1-\frac{k^2}{g}v^2=e^{2k^2(x_1-a)}=e^{-2k^2h}; \ldots\ldots\ldots (92)$$

скорость эта оказывается меньшею n; въ самомъ дѣлѣ, изъ (91) и (92) получимъ:

$$v=ne^{-k^2h}.$$

Примѣръ 12-й. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой выражается суммою двухъ членовъ: одного, пропорціональнаго первой степени, другаго, пропорціональнаго второй степени скорости.

Предполагая движеніе точки сверху внизъ, напишемъ дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx''=m(g-2kx'-(\mu x')^2);$$

но мы можемъ этому уравненію придать также слѣдующій видъ:

$$\xi''=g+\frac{k^2}{\mu^2}-\mu^2(\xi')^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

III-19.

гдѣ:

$$\xi' = x' + \frac{k}{\mu^2}, \quad \xi = x + \frac{k}{\mu^2} t.$$

Дифференціальное же уравненіе (93) отличается отъ перваго изъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго примѣра только коэффиціентами и значеніемъ зависимой перемѣнной, но не видомъ; а потому ссылаемся на результаты 11-го примѣра.

Въ случаяхъ 4—7 нельзя дать общихъ правилъ, хотя въ нѣкоторыхъ задачахъ можетъ быть произведено одно, а въ другихъ и два интегрированія; мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ такихъ задачъ.

Изъ случаевъ 4-го рода:

$$mx'' = \phi(x', x)$$

Примѣръ 13-й. Матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію отъ него, движется по оси X въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости точки.

Этотъ частный случай примѣра 3-го мы разсмотримъ здѣсь подробнѣе, чѣмъ въ § 18.

Дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x$$

представимъ такъ:

$$x'' + 2kx' + k^2 x = (k^2 - \lambda)x;$$

затѣмъ помножимъ обѣ части равенства на e въ степени kt и означимъ произведеніе изъ x на эту степень e черезъ φ; тогда дифференціальное уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi'' = (k^2 - \lambda)\varphi; \quad \varphi = xe^{kt},$$

а это есть дифференціальное уравненіе примѣра 7-го или 8-го, смотря по тому, каковъ знакъ разности $(k^2 - \lambda)$.

a) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина отрицательная, то, положивъ:

$$k^2 - \lambda = -\omega^2,$$

примѣнимъ формулу (73), которая въ этомъ случаѣ получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi=\varphi_0\cos\omega t+\frac{\varphi'_0}{\omega}\sin\omega t;$$

но, такъ какъ:

$$\varphi_0=a,\ \varphi_0'=ak+\alpha,$$

то искомое выраженіе для x будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x=e^{-kt}\left(a\cos(t\sqrt{\lambda-k^2})+\frac{ak+\alpha}{\sqrt{\lambda-k^2}}\sin(t\sqrt{\lambda-k^2})\right) \ldots\ldots \text{(94)}$$

Движеніе, выражаемое этимъ уравненіемъ, есть колебательное съ уменьшающимися размахами; сумма, заключенная въ большихъ скобкахъ, измѣняется періодически, такъ что въ моменты: t, $t+2T$, $t+4T$, $t+6T$, и т. д., она имѣетъ одну и ту же величину, если T есть слѣдующій промежутокъ времени:

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda-k^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(94 bis)}$$

Въ эти моменты x будетъ имѣть слѣдующія величины:

$$Ae^{-kt},\ Ae^{-kt}.\ e^{-2kT},\ Ae^{-kt}.\ e^{-4kT},\ Ae^{-kt}.\ e^{-6kT},\ldots$$

гдѣ A есть величина упомянутой суммы въ моментъ t.

Отсюда видимъ, что величины x для этихъ моментовъ уменьшаются въ геометрической прогрессіи, отношеніе которой есть:

$$e^{-2kT};\ T=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda-k^2}}.$$

Чертежъ 4-й изображаетъ законъ измѣненія x съ теченіемъ времени, выражаемый формулою (94).

b) Когда $k^2=\lambda$, формула (94) приметъ слѣдующій видъ:

$$x=e^{-kt}(a+(ak+\alpha)t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(95)}$$

потому что, при $k^2=\lambda$:

$$\cos(t\sqrt{\lambda-k^2})=1,\ \frac{\sin(t\sqrt{\lambda-k^2})}{\sqrt{\lambda-k^2}}=t.$$

Изъ формулы (95) получимъ слѣдующее выраженіе скорости:

$$x' = e^{-kt}\left(\alpha - k(ak+\alpha)t\right),$$

изъ котораго видно, что скорость обращается въ нуль при $t = t_1$

$$t_1 = \frac{\alpha}{k(ak+\alpha)}$$

и при $t = \infty$.

Въ моментъ t_1 координата x_1 выражается такъ:

$$x_1 = e^{-kt_1}\left(a + \frac{\alpha}{k}\right).$$

Формулу (95) можно преобразовать къ слѣдующему виду;

$$x = x_1 e^{-k\vartheta}(1 + k\vartheta);\quad \vartheta = t - t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(95 bis)}$$

На чертежѣ 5-мъ проведена кривая, изображающая законъ измѣненія x, выражаемый формулою (95) или (95 bis); наивысшая точка M соотвѣтствуетъ моменту t_1; при $t = t_1 - \frac{1}{k}$ точка проходитъ черезъ начало координатъ, а при $t = t_1 + \frac{1}{k}$ кривая имѣетъ точку перегиба.

c) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина положительная, то выраженіе (94) получитъ слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt}\left(a\cos\left(it\sqrt{k^2-\lambda}\right) + \frac{ak+\alpha}{i\sqrt{k^2-\lambda}}\sin\left(it\sqrt{k^2-\lambda}\right)\right), \ldots \textbf{(96)}$$

или:

$$x = \frac{(aq+\alpha)e^{-pt} - (ap+\alpha)e^{-qt}}{q-p}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(96 bis)}$$

гдѣ $p = k - \sqrt{k^2-\lambda}$ и $q = k + \sqrt{k^2-\lambda}$ суть двѣ положительныя величины.

Въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ функція $\phi\,(x,\,x')$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\phi(x, x') = f(x) + (x')^2\varphi(x),$$

всегда можно найти первый интегралъ дифференціальнаго уравненія движенія; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе:

$$x'' = f(x) + \varphi(x)(x')^2$$

можно представить такъ:

$$x'\frac{dx'}{dx}-(x')^2\varphi(x)=f(x),$$

или такъ:

$$\frac{du}{dx}-2u\varphi(x)=2f(x),\ \ u=(x')^2;$$

а это есть обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, рѣшеніе котораго, какъ извѣстно, есть:

$$(x')^2=u=e^{2\Theta(x)}(C+2\int e^{-2\Theta(x)}f(x)dx),\ \ldots\ldots \quad \textbf{(97)}$$

гдѣ:

$$\Theta(x)=\int\varphi(x)dx.$$

Примѣръ 14-й. Матерьяльная точка притягивается къ началу координатъ силою, прямо пропорціальною разстоянію отъ него; движеніе ея происходитъ въ средѣ, плотность которой обратно пропорціональна разстоянію отъ начала координатъ; эта среда оказываетъ движенію сопротивленіе, пропорціональное плотности и квадрату скорости.

Начальное положеніе точки на положительной оси X въ разстояніи a отъ начала координатъ, начальная скорость равна нулю, опредѣлить движеніе.

Въ этомъ примѣрѣ $f(x)=-\mu^2x$, функція же φ равна

$$\varphi(x)=\frac{k}{x},$$

если точка находится на положительной оси X и скорость ея направлена къ началу координатъ.

По формулѣ (97) составимъ равенство:

$$(x')^2=x^{2k}\Big(C-\frac{\mu^2}{(1-k)}x^{2-2k}\Big);$$

опредѣлимъ C по начальнымъ обстоятельствамъ движенія; окажется:

$$C=\frac{\mu^2}{1-k}a^{2-2k}.$$

III-19.

По извлеченіи корня и по отдѣленіи перемѣнныхъ, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$-\frac{x^{-k}dx}{\sqrt{a^{2-2k}-x^{2-2k}}}=\frac{\mu}{\sqrt{1-k}}dt,$$

интегралъ котораго:

$$\arccos\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}=t\mu\sqrt{1-k}$$

даетъ намъ выраженіе движенія точки:

$$x=a\left(\cos t\mu\sqrt{1-k}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Движеніе, начавшееся въ моментъ $t=0$, кончается въ моментъ T:

$$T=\frac{\pi}{2\mu\sqrt{1-k}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

въ этотъ моментъ точка приходитъ въ начало координатъ и скорость ея обращается въ нуль. Наибольшая скорость, которую имѣетъ точка во время движенія, равна:

$$a\mu k^{\left(\frac{k}{2(1-k)}\right)}.$$

Изъ случаевъ 7-го рода:

$$mx''=\phi(t, x, x').$$

Примѣръ 15. Матерьяльная точка, движущаяся по оси X, притягивается къ точкѣ $Ю$, которая, въ свою очередь, движется по той же прямой по слѣдующему закону:

$$x_ю=\psi(t);$$

сила, притягивающая матерьяльную точку къ точкѣ $Ю$, пропорціональна разстоянію отъ нея, притомъ движеніе происходитъ въ неподвижной средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости.

Очевидно, дифференціальное уравненіе движенія будетъ слѣдующее:

$$mx''=-m(2kx'+\lambda(x-x_ю))$$

или:

$$x'' + 2kx' + \lambda x = \varphi(t); \ \ \varphi(t) = \lambda\psi(t);$$

интегрированіе его не представитъ затрудненій, если извѣстенъ видъ функціи φ.

Примѣръ 16. Заданіе отличается отъ заданія предыдущаго примѣра тѣмъ, что k и λ суть функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условію:

$$\lambda(t) - k^2(t) - \frac{dk(t)}{dt} = n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(99)}$$

гдѣ n есть величина постоянная.

Положивъ:

$$x = \xi e^{-\theta(t)}, \ \ \Theta(t) = \int k(t)dt$$

и принявъ во вниманіе условіе (99), мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему:

$$\xi'' + n^2\xi = \varphi e^{\theta}.$$

Примѣръ 17. Дифференціальное уравненіе движенія:

$$x'' + x'f(t) + x\lambda^2(t) = 0,$$

гдѣ f и λ суть двѣ функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условію:

$$\frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} = 2n; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100)}$$

n — величина постоянная.

Положивъ въ дифференціальномъ уравненіи:

$$x = \xi e^{\int \psi dt},$$

гдѣ ψ есть функція времени, удовлетворяющая дифференціальному уравненію перваго порядка:

$$\psi' + \psi^2 + \psi f + \lambda^2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(101)}$$

мы получимъ, для опредѣленія ξ, слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\xi'' + (2\psi + f)\xi' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(102)}$$

Дифференціальное уравненіе (101), на основаніи условія (100), можетъ быть приведено къ такому виду, при которомъ перемѣнныя могутъ быть отдѣлены и интегрированіе произведено; окажется, что:

$$\psi = -n\lambda + \lambda\sqrt{1-n^2}\,\mathrm{cotg}\left(\sqrt{1-n^2}\int \lambda dt\right);$$

затѣмъ проинтегрируется уравненіе (102) и найдется слѣдующій результатъ:

$$x = Ce^{-n\theta}\sin(\Gamma + \theta\sqrt{1-n^2}); \;\; \theta = \int \lambda dt.$$

Въ тѣхъ вопросахъ, которые требуютъ интегрированія дифференціальнаго уравненія:

$$x'' + x'f(t) + (x')^2\varphi(x) = 0$$

всегда можетъ быть найденъ первый интегралъ; въ самомъ дѣлѣ, положивъ:

$$x' = \xi e^{-\int \varphi dx},$$

мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему;

$$\xi' + \xi f(t) = 0;$$

а поэтому:

$$x' = Ce^{\psi}; \;\; \psi = -\int \varphi(x)dx - \int f(t)dt. \;.\;.\;.\;.\; \textbf{(103)}$$

§ 20. Вопросы объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной матерьяльной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка интегрируется отдѣльно.

Переходя къ задачамъ и вопросамъ, относящимся къ криволинейнымъ движеніямъ матерьяльныхъ точекъ, мы прежде всего упомянемъ о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ опредѣленіе движенія по каждой изъ координатъ можетъ быть произведено въ отдѣльности, то есть, когда каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка заключаетъ время, только одну изъ координатъ и ея производныя.

Къ числу такихъ случаевъ принадлежатъ тѣ, которые приведены въ § 18 подъ названіемъ примѣровъ 3-го, 4-го и 5-го; тамъ получены ихъ интегралы, здѣсь остается показать, каковъ видъ траэкторій.

Въ примѣрѣ 4-мъ сила имѣетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину:

$$P=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Расположимъ оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось $У$ была параллельна направленію силы P, чтобы начало координатъ совпадало съ начальнымъ положеніемъ движущейся точки, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости $XУ$ и чтобы эта скорость составляла острый уголъ съ осью X; тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=P,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

начальныя обстоятельства движенія:

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ \gamma=0;\quad \alpha\neq0;\ \beta\neq0;$$

поэтому вторые интегралы будутъ слѣдующіе:

$$x=\alpha t,\ y=\frac{gt^2}{2}+\beta t,\ z=0;\ \ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

здѣсь g подставлено вмѣсто частнаго: $(P:\ m)$.

Уравненія (104) отличаются отъ уравненій, приведенныхъ на стр. 7-й кинематической части (примѣръ 3-й), только знакомъ передъ произведеніемъ βt.

Означивъ черезъ v_0 величину начальной скорости и черезъ $\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$— уголъ, составляемый ею съ положительною осью $У$, мы получимъ слѣдующее извѣстное уравненіе параболической траэкторіи тяжелой матерьяльной точки, брошенной въ пустотѣ подъ угломъ ω къ горизонту:

$$y=-xtg\omega+\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\omega}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$

III-20.

Въ примѣрѣ 5-мъ мы ограничимся указаніемъ на видъ траэкторіи въ томъ случаѣ, когда:

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa;$$

т.-е. когда на точку дѣйствуетъ притяженіе къ началу координатъ пропорціональное разстоянію отъ него.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varkappa x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varkappa y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\varkappa z;$$

они сохранятъ тотъ же видъ, если мы перемѣнимъ направленія прямоугольныхъ осей какимъ бы то ни было образомъ; то есть, если мы отнесемъ движущуюся точку къ другимъ неподвижнымъ прямоугольнымъ осямъ Ξ, Υ, Z, имѣющимъ то же самое начало, то, въ новыхъ координатахъ ξ, η, ζ дифференціальныя уравненія получатъ тотъ же самый видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\varkappa\xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\varkappa\eta, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\varkappa\zeta.$$

Возьмемъ за плоскость $\Xi\ \Upsilon$ ту плоскость, проходящую черезъ начальное положеніе точки, которая заключаетъ въ себѣ направленіе начальной скорости; тогда $\zeta_0 = 0$, $\zeta_0' = 0$, а потому выраженія (45) будутъ слѣдующія:

$$\xi = \xi_0 \cos \varkappa\vartheta + \frac{\xi_0'}{\varkappa} \sin \varkappa\vartheta$$

$$\eta = \eta_0 \cos \varkappa\vartheta + \frac{\eta_0'}{\varkappa} \sin \varkappa\vartheta$$

$$\zeta = 0.$$

Траэкторія, заключающаяся въ плоскости $\Xi\ \Upsilon$, есть эллипсъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ (см. въ кинематической части на стр. 50 задачу 5-ю).

Если въ примѣрѣ 3-мъ возьмемъ случай:

$$\mu = \nu = \lambda; \quad \lambda - k^2 > 0,$$

то, подобно какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, убѣдимся, что траэкторія будетъ кривая плоская; допустимъ прямо, что траэкторія заключается въ плоскости $X\ Y$, тогда выраженія (46) примутъ слѣдующій видъ:

$$z=0,\ x=e^{-kt}(a\cos\varepsilon t+\alpha_1\sin\varepsilon t),\ y=e^{-kt}(b\cos\varepsilon t+\beta_1\sin\varepsilon t),$$

гдѣ

$$\varepsilon=\sqrt{\lambda-k^2},\ \alpha_1=\frac{\alpha+ka}{\varepsilon},\ \beta_1=\frac{\beta+kb}{\varepsilon};$$

a и b суть координаты начальнаго положенія, α и β—проэкціи начальной скорости на оси координатъ.

Чтобы уяснить себѣ движеніе точки M, представимъ себѣ другую точку N (x_1, y_1), движущуюся по закону:

$$x_1=a\cos\varepsilon t+\alpha_1\sin\varepsilon t,\ y_1=b\cos\varepsilon t+\beta_1\sin\varepsilon t;$$

какъ видно изъ предыдущаго (5-го) примѣра, точка N будетъ описывать нѣкоторый эллипсъ, имѣющій центръ въ началѣ координатъ.

Точка M будетъ находиться на радіусѣ векторѣ точки N, но будетъ ассимптотически приближаться къ началу координатъ, такъ что, если черезъ ρ и ρ_1 означимъ длины радіусовъ векторовъ OM и ON, то будетъ:

$$\rho=\rho_1 e^{-kt};$$

слѣдовательно, точка M описываетъ вокругъ начала координатъ нѣкоторую спираль логариѳмическаго характера (черт. 6).

Примѣръ 18-й. Движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести въ сопротивляющейся средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости.

Ось Z расположимъ вертикально снизу вверхъ, то есть противоположно направленію силы тяжести. Начало координатъ совмѣстимъ съ начальнымъ положеніемъ точки и ось Y направимъ такъ, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости YZ. Тогда начальныя обстоятельства движенія будутъ:

$$t_0=0,\ a=0,\ b=0,\ c=0,\ \alpha=0,\ \beta=v_0\cos\Theta_0,\ \gamma=v_0\sin\Theta_0,$$

гдѣ v_0 означаетъ начальную скорость; Θ_0 — начальный уголъ, составляемый скоростью съ осью Y; съ осью Z она составляетъ уголъ $\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_0\right)$.

III-20.

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk\frac{dy}{dt},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=-m\left(g+k\frac{dz}{dt}\right)$$

первое даетъ, на основаніи начальныхъ условій, результатъ $x=0$, выражающій, что движеніе происходитъ въ плоскости YZ.

Третье дифференціальное уравненіе отличается отъ дифференціальнаго уравненія примѣра 9-го тѣмъ, что вмѣсто x здѣсь находится $(-z)$, возьмемъ поэтому формулу (78) и подставимъ въ нее: $(-z)$, нуль и $(-\gamma)$ вмѣсто x, a и α, получимъ, по измѣненіи знаковъ въ обѣихъ частяхъ равенства:

$$z=\frac{1}{k}\left(\gamma+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)-\frac{g}{k}t \ldots\ldots\ldots \textbf{(106)}$$

Чтобы перейти отъ третьяго дифференціальнаго уравненія ко второму, надо замѣнить g — нулемъ и z черезъ y; поэтому сдѣлаемъ подобныя же замѣщенія въ формулѣ (106) и сверхъ того замѣнимъ γ черезъ β; получимъ тогда второй интегралъ втораго дифференціальнаго уравненія:

$$y=\frac{\beta}{k}\left(1-e^{-kt}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(107)}$$

Полученные результаты (106) и (107) выражаютъ координаты y, z въ функціяхъ времени; составленіе уравненія траэкторіи и разсмотрѣніе вида ея сдѣлано на стр. 50—51 кинематической части (черт. 30 тамъ же). Уравненіе траэкторіи — слѣдующее:

$$z=\left(\frac{g}{k\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)y+\frac{g}{k^2}\log\left(1-\frac{ky}{\beta}\right);$$

если разложить логариѳмъ въ рядъ, то получимъ:

$$z=\frac{\gamma}{\beta}y-g\left(\frac{y^2}{2\beta^2}+\frac{ky^3}{3\beta^3}+\frac{k^2y^4}{4\beta^4}+\ldots\right).$$

Положивъ здѣсь $k=0$, мы получимъ уравненіе траэкторіи въ пустотѣ:

$$z_1=\frac{\gamma}{\beta}y-\frac{gy^2}{2\beta^2}\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(108)}$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ:

$$z = z_1 - g\left(\frac{ky^3}{3\beta^3} + \frac{k^2y^4}{4\beta^4} + \ldots\right),$$

то есть, что, при одной и той же абциссѣ, ордината траэкторіи въ сопротивляющейся средѣ менѣе ординаты параболической траэкторіи.

§ 21. Два пріема преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Общіе способы, слѣдуя которымъ можно было бы рѣшить всякую задачу о криволинейномъ движеніи точки при дѣйствіи какихъ бы то ни было силъ, неизвѣстны; извѣстны только нѣкоторые пріемы преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія, при примѣненіи которыхъ можно получить нѣкоторые изъ первыхъ интеграловъ, если приложенныя къ матерьяльной точкѣ силы удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ.

Одинъ изъ этихъ пріемовъ заключается въ слѣдующемъ.

Помножимъ третье изъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \ldots\ldots\ldots (36)$$

на y и придадимъ къ нему второе, помноженное на $(-z)$; составится равенство:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY, \ldots\ldots\ldots (109)$$

первая часть котораго есть производная отъ

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$$

по t; поэтому равенство это (109) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{d\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]}{dt} = yZ - zY \ldots\ldots\ldots (110\text{ a})$$

Помножимъ первое изъ уравненій (36) на z и придадимъ къ нему третье, помноженное на $(-x)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\right]}{dt}=zX-xZ; \ldots\ldots \quad \textbf{(110 b)}$$

наконецъ, помноживъ второе изъ уравненій (36) на x и придавъ къ нему первое, помноженное на $(-y)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right]}{dt}=xY-yX \ldots\ldots \quad \textbf{(110 c)}$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ будетъ объяснено значеніе разностей, находящихся во вторыхъ частяхъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій (110, a, b, c); затѣмъ будетъ показано, какіе интегралы получаются изъ этихъ уравненій и при какихъ условіяхъ.

2. Другой пріемъ, при посредствѣ котораго изъ уравненій (36) составляется дифференціальное уравненіе, легко интегрирующееся при нѣкоторыхъ условіяхъ, состоитъ въ томъ, что первое изъ уравненій (36) помножается на x', второе — на y', третье — на z' и затѣмъ, по сложеніи, составляется уравненіе:

$$m\left(x'\frac{dx'}{dt}+y'\frac{dy'}{dt}+z'\frac{dz'}{dt}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt},$$

первая часть котораго есть, очевидно, производная по времени отъ слѣдующаго тричлена:

$$\frac{m}{2}\left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right),$$

выражающаго половину произведенія изъ массы на квадратъ скорости матерьяльной точки; поэтому, полученное дифференціальное уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt}=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(111)}$$

Помноживъ обѣ части этого дифференціальнаго уравненія на dt, получимъ:

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right)=Xdx+Ydy+Zdz \ldots\ldots\ldots\ldots (112)$$

Значеніе первой и второй частей этого дифференціальнаго уравненія будетъ объяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ и затѣмъ будетъ указано, какой интегралъ получается изъ этого уравненія и при какихъ условіяхъ.

§ 22. Значеніе вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110). Моментъ силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, вокругъ даннаго центра и вокругъ данной оси.

А. Чтобы объяснить себѣ значеніе разностей:

$$yZ-zY \quad zX-xZ \quad xY-yX, \ldots\ldots\ldots (113)$$

заключающихся во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (110), мы сравнимъ ихъ со вторыми частями формулъ (96) кинематической части (стр. 85), которыя мы напишемъ при предположеніи, что точка $\mathfrak{M}$ (черт. 41 и 42 кинематич. части) взята за начало координатъ; вторыя части равенствъ (96) получатъ тогда слѣдующій видъ:

$$y_{ю}R-z_{ю}Q \quad z_{ю}P-x_{ю}R \quad x_{ю}Q-y_{ю}P \ldots\ldots\ldots (114)$$

Припомнимъ, что эти разности выражаютъ величины проэкцій на оси координатъ вращательной скорости $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$ точки $\mathfrak{M}$ вокругъ полюса $Ю$ и что длина, изображающая эту скорость, направлена изъ точки $\mathfrak{M}$ перпендикулярно къ плоскости, заключающей въ себѣ радіусъ векторъ $\overline{\mathfrak{M}Ю}$ и длину $\overline{Ю\Omega}$ (чертежъ 41 кинематической части), изображающую угловую скорость твердаго тѣла; направлена длина $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$ въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ $\mathfrak{M}$, головою по направленію $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$, смотрящему на точку $Ю$, видно, что длина $\overline{Ю\Omega}$ направлена слѣва на право.

Формулы (96) кинематической части и написанныя здѣсь разности (114) относятся къ кинематикѣ твердаго тѣла, между тѣмъ какъ разности (113) относятся къ движенію свободной матерьяльной точки; первыя приведены здѣсь только для того, чтобы, на основаніи сходства вида ихъ со вторыми, по возможности нагляднѣе объяснить значеніе послѣднихъ.

Если въ разностяхъ (114) замѣнить:

величины $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$ — величинами x, y, z,

величины P, Q, R — величинами X, $У$, Z,

то получатся разности (113).

Однако слѣдуетъ замѣтить, что P, Q, R, какъ проэкціи на оси координатъ угловой скорости Ω, имѣютъ измѣренія:

$$\frac{1}{(\text{единица времени})}=\frac{1}{в},$$

между тѣмъ какъ X, $У$, Z — проэкціи силы F на тѣ же оси координатъ, — имѣютъ измѣренія:

$$\frac{(\text{единица массы})\ (\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2}=\frac{м.д}{в^2}.$$

(Примѣчаніе. Символы: (единица массы), (единица длины), (единица времени) мы условимся обозначать, для краткости, буквами: *м*, *д*, *в* русскаго курсивнаго шрифта).

Для того, чтобы разности (114), имѣющія измѣренія скорости, получили значенія проэкцій длины, необходимо помножить ихъ на величину *в*.

Разности (113) имѣютъ слѣдующія измѣренія:

$$\frac{м.д^2}{в^2};$$

если помножить ихъ на величину:

$$\frac{в^2}{м.д},$$

то полученныя произведенія:

$$(yZ - zY)\frac{в^2}{м.д},\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м.д},\ (xY - yX)\frac{в^2}{м.д} \ldots\ldots (115)$$

будутъ имѣть измѣренія длинъ и *будутъ представлять проэкціи на оси координатъ длины, возстановленной изъ точки O перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ радіусъ векторъ* $\overline{OM}$ (черт. 7) *матерьяльной точки M (x, y, z) и черезъ силу F, приложенную къ точкѣ M; эта длина $\overline{OL}$ направлена въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ O, головою по направленію $\overline{OL}$, смотрящему на точку M, видно, что сила $\overline{MF}$ направлена слѣва на право* (черт. 7).

Такимъ же образомъ, какъ на страницахъ 89 и 90 кинематической части, мы выведемъ, что квадратъ длины $\overline{OL}$ равняется:

$$\left(\overline{OL}\right)^2 = \left[(X^2+Y^2+Z^2)(x^2+y^2+z^2) - (xX+yY+zZ)^2\right]\left(\frac{в^2}{м.д}\right)^2;$$

или

$$\left(\overline{OL}\right)^2 = \left[\left(\overline{MF}\right)^2.\left(\overline{OM}\right)^2 - \left(\overline{MF}.\overline{OM}\cos\left(\overline{MF},\overline{OM}\right)\right)^2\right]\left(\frac{в^2}{м.д}\right)^2.$$

Заключающійся въ этой формулѣ уголъ между направленіями $\overline{OM}$ и $\overline{MF}$ есть уголъ ρMF (черт. 7), синусъ котораго равенъ синусу угла OMF, поэтому:

$$\overline{OL} = \left(\overline{MF}\,.\,\overline{OM}\sin(OMF)\right)\frac{в^2}{м.д}$$

или

$$\overline{OL} = \left(Fr\sin(F,r)\right)\frac{в^2}{м.д},$$

гдѣ r означаетъ величину и направленіе радіуса вектора $\overline{OM}$.

Произведеніе:

$$p = r\sin(F,r)$$

III-22.

выражаетъ длину перпендикуляра $\overline{OD}$, опущеннаго изъ точки O на направленіе силы $\overline{MF}$; этотъ перпендикуляръ, представляющій кратчайшее разстояніе силы $\overline{MF}$ отъ точки O, называется *плечомъ силы* F по отношенію къ центру O.

Произведеніе Fp изъ величины силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, на плечо ея по отношенію къ какому-либо центру называется моментомъ этой силы вокругъ этого центра.

И такъ:

$$\overline{OL} = Fp\,\frac{в^2}{м.д}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(116)}$$

то есть, длина $\overline{OL}$ равняется моменту силы $\overline{MF}$ вокругъ центра O, дѣленному на единицу силы (символъ единицы силы: см. формулу (29)).

Единица моментовъ силъ есть моментъ единицы силы при длинѣ плеча, равной единицѣ; т. е.

$$(\text{единица моментовъ силъ}) = \frac{м.д^2}{в^2}.$$

Моментъ силы вокругъ центра имѣетъ всегда величину положительную.

Длину $\overline{OL}$ можно разсматривать какъ изображеніе момента Fp; изображенный такимъ образомъ моментъ силы можно назвать *линейнымъ изображеніемъ момента* *) *силы вокругъ центра* O.

Величины (115), которыя суть проэкціи длины $\overline{OL}$ на оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned} (yZ - zY)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL}, X) \\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL}, Y) \\ (xY - yX)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL}, Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(117)}$$

*) Произведеніе Fp называютъ различно: статическимъ моментомъ, линейнымъ моментомъ, вращательнымъ моментомъ; надобность въ какомъ либо прилагательномъ къ слову: „моментъ“ явилась вслѣдствіе того, что это слово получило въ механикѣ нѣсколько различныхъ значеній; въ терминѣ, принятомъ въ этой книгѣ, прилагательное замѣняется словами: „вокругъ центра такого-то“.

могутъ быть названы *проэкціями на оси кородинатъ линейнаго изображенія момента силы вокругъ центра O.*

Б. На основаніи равенства (116), изъ предыдущихъ формулъ можно получить слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} yZ - zY &= Fp\cos(\overline{OL},X) \\ zX - xZ &= Fp\cos(\overline{OL}\ Y) \\ xY - yX &= Fp\cos(\overline{OL},Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(118)}$$

Моментъ силы вокругъ центра можетъ быть еще изображенъ удвоенною площадью треугольника OMF, имѣющаго основаніемъ длину $\overline{MF}$, изображающую силу, а высотою — плечо $\overline{OD}$ этой силы по отношенію къ тому центру O, вокругъ котораго составляется моментъ; величина этой площади равна

$$Fp\frac{в^2}{м},$$

а линія $\overline{OL}$ нормальна къ ней; поэтому изъ равенствъ (118) слѣдуетъ, что величины:

$$(yZ - zY)\frac{в^2}{м},\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м},\ (xY - yX)\frac{в^2}{м} \ldots\ldots \textbf{(119)}$$

равны положительно или отрицательно взятымъ проэкціямъ удвоенной площади треугольника OMF на плоскости координатъ:

$$YZ \qquad ZX \qquad XY;$$

знакъ проэкціи опредѣляется знакомъ косинуса угла, составляемаго направленіемъ $\overline{OL}$ съ направленіемъ положительной оси:

$$X \qquad Y \qquad Z.$$

Чтобы выразиться опредѣлительнѣе, означимъ знаками:

$$F_{yz} \qquad F_{zx} \qquad F_{xy}$$

III-22.

величины и направленія проэкцій силы F на вышеозначенныя плоскости координатъ и чрезъ:

$$r_{yz} \qquad r_{zx} \qquad r_{xy}$$

означимъ величины и направленія проэкцій радіуса вектора $\overline{OM}$ на тѣ же плоскости; тогда значеніе разностей (113) можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} yZ - zY = \begin{cases} +F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL},X) > 0 \\ -F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL},X) < 0 \end{cases} \\ zX - xZ = \begin{cases} +F_{zx}r_{zx}\sin(F_{zx},r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Y) > 0 \\ -F_{zx}r_{zx}\sin(F_{zx},r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) < 0 \end{cases} \\ xY - yX = \begin{cases} +F_{xy}r_{xy}\sin(F_{xy},r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) > 0 \\ -F_{xy}r_{xy}\sin(F_{xy},r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) < 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad (120)$$

Въ самомъ дѣлѣ, проэкція площади треугольника OMF на плоскость YZ есть площадь треугольника OM_1F_1 (черт. 8 и 9), двѣ стороны котораго суть: $\overline{OM_1}$ (черт. 8 и 9) — проэкція радіуса вектора $\overline{OM}$ на плоскость YZ, и $\overline{M_1F_1}$ — проэкція силы $\overline{MF}$ на ту же плоскость; величина удвоенной площади треугольника OM_1F_1 выражается произведеніемъ:

$$2 \text{ (площ. } OM_1F_1) = \frac{e^2}{м} F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}),$$

которое есть величина всегда положительная, также какъ и площади OMF и OM_1F_1; поэтому:

$$2(\text{площ. } OMF)\cos(\overline{OL},X) = 2(\text{площ. } OM_1F_1) =$$

$$= \frac{e^2}{м} F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}),$$

если уголъ между направленіемъ $\overline{OL}$ и положительною осью X острый (черт. 8), и

$$2(\text{площ. } OMF)\cos(\overline{OL},X) = -2(\text{площ. } OM_1F_1) =$$

$$= -\frac{\theta^2}{м} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}),$$

если уголъ между направленіемъ $\overline{OL}$ и положительною осью X тупой (черт. 9).

Этимъ объясняется, почему изъ выраженій (118) получаются выраженія (120).

Заключающіяся во вторыхъ частяхъ формулъ (120) произведенія:

$$r_{yz}\sin(F_{yz}, r_{yz}) \quad r_{zx}\sin(F_{zx}, r_{zx}) \quad r_{xy}\sin(F_{xy}, r_{xy}),$$

выражаютъ длины кратчайшихъ разстояній между силою $\overline{MF}$ и осями координатъ X, $У$, Z; мы докажемъ это относительно перваго изъ написанныхъ произведеній.

Произведеніе

$$r_{yz}\sin(F_{yz}, r_{yz})$$

выражаетъ длину $\overline{OD_1}$ (черт. 10) перпендикуляра, опущеннаго изъ точки O на линію $\overline{M_1F_1}$; кратчайшее же разстояніе KE между осью X и линіею $\overline{MF}$ равно и параллельно перпендикуляру $\overline{OD_1}$, потому что, подобно ему, пересѣкаетъ ось X и перпендикулярно къ плоскости MM_1F_1F, проэктирующей линію $\overline{MF}$ на плоскость $УZ$; эта плоскость MM_1F_1F проходитъ черезъ линію $\overline{MF}$ и параллельна оси X, поэтому кратчайшее разстояніе между этими двумя линіями должно быть къ ней перпендикулярно.

Такимъ образомъ оказывается, что каждая изъ разностей (113) есть положительно или отрицательно взятое произведеніе изъ проэкціи силы F на одну изъ плоскостей координатъ и изъ кратчайшаго разстоянія этой силы отъ координатной оси, перпендикулярной къ той плоскости, на которую взята проэкція силы; подобныя произведенія называются моментами силъ вокругъ осей.

Пусть OP есть какая-либо ось, положительное направленіе которой считается отъ O къ P; пусть $\overline{MF}$ есть какая-либо сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ M.

Моментомъ силы $\overline{MF}$ вокругъ оси OP называется произведеніе изъ проэкціи силы на плоскость перпендикулярную къ оси (черт. 11 и 12) *и изъ кратчайшаго разстоянія $\overline{KE}$ между силою и осью; произведенію этому должно дать положительный знакъ, если наблюдателю, стоящему ногами въ K, головою по положительному направленію оси KP, смотрящему на точку M_1, видно, что проэкція силы идетъ слѣва на право* (какъ на черт. 11); *если же наблюдателю видно, что проэкція $\overline{M_1F_1}$ направлена справа на лѣво* (какъ на черт. 13), *то тогда моментъ силы вокругъ оси равняется вышесказанному произведенію, взятому со знакомъ минусъ.*

Моментъ силы вокругъ оси измѣряется тѣми же самыми единицами, какъ и моментъ силы вокругъ центра.

По данному сейчасъ опредѣленію, разности (113) оказываются *моментами силы F вокругъ осей координатъ.*

Другія значенія этихъ разностей опредѣляются формулами (118), которыя мы выразимъ словесно слѣдующимъ образомъ:

Разности (113) *суть проэкціи на оси координатъ момента силы F вокругъ начала координатъ.*

Выражаясь такъ, мы приписываемъ моменту силы вокругъ центра не только величину, но и направленіе, подразумѣвая подъ направленіемъ момента — направленіе его линейнаго изображенія.

Условимся обозначать величину и направленіе момента силы F вокругъ центра O знакомъ:

$$L_0(F).$$

Этимъ знакомъ будемъ пользоваться позднѣе, а именно въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ придется различать моменты различныхъ

силъ, приложенныхъ къ одной или къ нѣсколькимъ точкамъ; такъ, напримѣръ, моменты силъ $F1$, $F2$,... будемъ обозначать знаками:

$$L_0(F1),\ L_0(F2),\ \ldots;$$

въ разсужденіяхъ же, относящихся къ одной силѣ и моменту ея, гдѣ не предвидится возможности смѣшать этотъ моментъ съ другими величинами того же рода, мы упростимъ обозначеніе и вмѣсто $L_0(F)$ будемъ писать L_0.

Изъ того, что сказано въ этомъ параграфѣ, слѣдуетъ: $(yZ - zY)$ есть моментъ силы F, приложенной къ точкѣ M, вокругъ оси X, или проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$yZ - zY = L_0 \cos(L_0 X); \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(121, a)}$$

$(zX - xZ)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Y, или проэкція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$zX - xZ = L_0 \cos(L_0 Y); \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(121, b)}$$

$(xY - yX)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Z, или проэкція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$xY - yX = L_0 \cos(L_0 Z). \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(121, c)}$$

Вообще, *моментъ силы F вокругъ какой-либо оси PO, проходящей черезъ начало координатъ, есть проэкція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:*

$$(\text{мом. силы } F \text{ вокругъ оси } OP) =$$

$$= (yZ - zY)\cos(PX) + (zX - xZ)\cos(PY) + (xY - yX)\cos(PZ) =$$

$$= L_0 \cos(L_0 P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(122)}$$

§ 23. Моментъ количества движенія матерьяльной точки вокругъ центра и вокругъ данной оси. Секторьяльныя скорости проэкцій точки на плоскости координатъ.

Произведеніе изъ скорости матерьяльной точки на массу ея

называется *количествомъ движенія матерьяльной точки;* оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица количествъ движенія}) = \frac{м.д}{в} \ldots\ldots\ (123)$$

Подобно силѣ, количество движенія матерьяльной точки можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки по направленію скорости ея; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія точки болѣе единицы количествъ движенія.

Подъ направленіемъ количества движенія матерьяльной точки мы подразумѣваемъ направленіе изображающей его длины.

Произведенія:

$$m\frac{dx}{dt} \qquad m\frac{dy}{dt} \qquad m\frac{dz}{dt}$$

мы называетъ проэкціями на оси координатъ количества движенія матерьяльной точки.

Изображая количество движенія, подобно силѣ, длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки, мы можемъ ввести понятіе о моментѣ количества движенія вокругъ какого-либо центра и о моментѣ его вокругъ какой-либо оси; понятно, что изложеніе и формулированіе этихъ понятій сведется къ почти дословному повторенію всего того, что изложено въ предыдущемъ параграфѣ, а потому мы ограничимся только слѣдующими указаніями.

Единица моментовъ количествъ движеній имѣетъ иныя измѣренія, чѣмъ единица моментовъ силъ, а именно:

$$(\text{единица моментовъ колич. движ.}) = \frac{м.д^2}{в}.$$

Тѣ величины, производныя которыхъ по времени образуютъ первыя части дифференціальныхъ уравненій (110), имѣютъ слѣдующія значенія:

$(ymz' - zmy')$ есть моментъ вокругъ оси X количества движенія

точки m, или проэкція на ось X момента того же количества движенія вокругъ начала координатъ:

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=l_0\cos(l_0X); \dots\dots\dots \quad \textbf{(124, a)}$$

гдѣ l_0 означаетъ величину и направленіе момента количества движенія точки m вокругъ начала координатъ;

$(zmx'-xmz')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси $У$, или проэкція на ось $У$ момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=l_0\cos(l_0 У); \dots\dots\dots \quad \textbf{(124, b)}$$

$(xmy'-ymx')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Z, или проэкція на ось Z момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=l_0\cos(l_0Z). \dots\dots\dots \quad \textbf{(124, c)}$$

Такова аналогія между значеніями этихъ величинъ и значеніями разностей, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Кромѣ того, величины (124) имѣютъ еще иной смыслъ: каждая изъ нихъ есть удвоенное произведеніе изъ массы матерьяльной точки на производную по времени отъ нѣкоторой площади; мы докажемъ это надъ разностью:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Разность эта, будучи моментомъ количества движенія точки m вокругъ оси Z, можетъ быть выражена такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\pm m v_{xy} r_{xy}\sin(v_{xy}, r_{xy}) \dots\dots \quad \textbf{(125)}$$

Здѣсь долженъ быть взятъ знакъ $+$, если $\cos(l_0Z)$ болѣе нуля и знакъ минусъ, если этотъ косинусъ менѣе нуля; v_{xy} означаетъ проэкцію скорости точки на плоскость $XУ$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ v_{xy} есть скорость проэкціи M_3 на плоскость XY матерьяльной точки m; означивъ черезъ ds_{xy} *положительно-взятую* длину безконечно-малой дуги, пройденную точкою M_3 въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени отъ момента t до момента $(t+dt)$, и принявъ во вниманіе, что:

$$v_{xy}=\frac{ds_{xy}}{dt},$$

можемъ представить равенство (125) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=m\frac{(\pm r_{xy}ds_{xy}\sin(v_{xy},r_{xy}))}{dt}\ \ldots\ldots\ \mathbf{(126)}$$

Разсмотримъ значеніе второй части этого равенства.

Произведеніе:

$$r_{xy}ds_{xy}\sin(v_{xy},\ r_{xy})$$

выражаетъ величину площади, разнящейся на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ отъ удвоенной величины площади сектора $OM_3M'_3$ (чертежи 13 и 14), заключающагося между радіусами векторами OM_3 и OM'_3 и дугою $M_3M'_3$, описанною точкою M_3 въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$. Знаки, поставленные передъ этимъ произведеніемъ въ равенствѣ (126), означаютъ, что удвоенную величину этой площади должно взять со знакомъ плюсъ, если наблюдателю, смотрящему на точку M_3 съ положительной оси Z, скорость v_{xy} ($M_3\ V_3$ на чертежахъ) кажется направленною слѣва на право, какъ на чертежѣ 13); если же скорость $M_3\ V_3$ кажется направленною справа на лѣво (какъ на черт. 14), то величина удвоенной площади $OM_3M'_3$ входитъ въ равенство (126) со знакомъ минусъ.

Можно еще замѣтить, что знакъ плюсъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ уголъ Θ_3, составляемый радіусомъ векторомъ OM_3 съ осью X, увеличивается въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$ (черт. 13); знакъ же минусъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ этотъ уголъ уменьшается (черт. 14).

Интегралъ:

$$2\Pi_{xy}=\int\left(\pm r_{xy}\sin\left(v_{xy},r_{xy}\right)\right)ds_{xy}\ldots\ldots\textbf{(127)}$$

взятый вдоль по кривой, описанной точкою M_3, отъ положенія A, занимаемаго ею въ моментъ t_0, до положенія, занимаемаго ею въ моментъ t, называется *удвоенною площадью сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ точки* M_3 *въ теченіи времени отъ* t_0 *до* t; предполагается, что вышеуказанное правило знаковъ соблюдается для каждаго безконечно-малаго элемента времени.

Если уголъ Θ_3 постоянно увеличивается въ теченіи всего промежутка времени $(t-t_0)$, то тогда интегралъ (127) выражаетъ величину удвоенной площади сектора OAM_3O, заключающейся внутри периметра, образуемаго радіусами векторами OA и OM_3 и траекторіею AM_3 (черт. 13); если уголъ Θ_3 все время уменьшается, то интегралъ (127) выражаетъ отрицательно взятую величину удвоенной площади OAM_3O; если же уголъ Θ_3 то возрастаетъ, то убываетъ (какъ напримѣръ изображено на чертежѣ 15), то интегралъ (127) будетъ состоять изъ положительныхъ и отрицательныхъ частей, напримѣръ, въ случаѣ представленномъ на чертежѣ 15, будетъ:

$$\Pi_{xy}=\text{площ.}\,(OABDO)-\text{площ.}\,(ODM_3O).$$

Во всякомъ случаѣ очевидно, что во второй части равенства (126) заключается производная:

$$\frac{d\Pi_{xy}}{dt},$$

выражающая скорость, съ которою возрастаетъ площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ проэкціи движущейся точки на плоскость XY; эта производная называется *секторьяльною скоростью проэкціи движущейся точки на плоскость* XY; мы будемъ обозначать ее знакомъ:

$$\sigma(xy).$$

III-23.

И такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=2m\sigma(xy)\ldots\ldots\ldots\ldots(128)$$

Къ этому мы должны прибавить еще одно замѣчаніе касательно одного весьма употребительнаго выраженія секторьяльной скорости.

Уголъ θ_3 и радіусъ векторъ r_{xy} (который мы будемъ на время обозначать черезъ r_3) суть полярныя координаты точки M_3 на плоскости XY; означимъ черезъ α_3 и β_3 координатныя оси этихъ координатъ.

Примемъ теперь во вниманіе, что въ случаяхъ, изображенныхъ на чертежѣ 13:

$$v_3\sin(v_3r_3)=v_3\sin(v_3\alpha_3)=v_3\cos(v_3\beta_3),$$

а въ случаяхъ, изображенныхъ на черт. 14:

$$v_3\sin(v_3r_3)=v_3\sin(V_3M_3\alpha_3)=v_3\sin\left((V_3M_3\beta_3)-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-v_3\cos(V_3M_3\beta_3)=-v_3\cos(v_3\beta_3);$$

(гдѣ, также временно, v_{xy} замѣнено чрезъ v_3).

Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ:

$$\pm r_3v_3\sin(v_3r_3)=r_3v_3\cos(v_3\beta_3).$$

По формулѣ же (20 bis) стр. 33-й кинематической части:

$$v_3\cos(v_3\beta_3)=r_3\frac{d\theta_3}{dt};$$

а потому, возстановляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть слѣдующее выраженіе удвоенной секторьяльной скорости:

$$2\sigma(xy)=r^2_{xy}\frac{d\theta_3}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots(129)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность сказать слѣдующее относительно значеній величинъ, образующихъ первыя части равенствъ (124).

Во первыхъ, онѣ суть моменты количества движенія матерьяльной точки вокругъ осей координатъ, или проэкціи на оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ.

Во вторыхъ, онѣ суть удвоенныя произведенія изъ массы точки на секторьяльныя скорости проэкцій радіуса вектора на плоскости координатъ; это выражается формулами:

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=2m\sigma(yz)=mr^2_{yz}\frac{d\theta_1}{dt} \ldots\ldots \textbf{(130, a)}$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=2m\sigma(zx)=mr^2_{zx}\frac{d\theta_2}{dt} \ldots\ldots \textbf{(130, b)}$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=2m\sigma(xy)=mr^2_{xy}\frac{d\theta_3}{dt} \ldots\ldots \textbf{(130, c)}$$

Здѣсь Θ_1 есть уголъ, составляемый съ осью Y проэкціею радіуса вектора движущейся точки на плоскость YZ; $\sigma\,(yz)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость; Θ_2 — уголъ, составляемый съ осью Z проэкціею радіуса вектора на плоскость ZX; $\sigma\,(zx)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость.

§ 24. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (110). Интегралы, выражающіе законъ площадей.

Каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (110) выражаетъ, что производная по времени отъ момента количества движенія вокругъ одной изъ осей координатъ равняется моменту вокругъ той же оси силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Значеніе этихъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть объяснено еще иначе.

Длина l_0, проведенная изъ начала координатъ и представляющая величину и направленіе момента количества движенія матерьяльной точки вокругъ начала координатъ, измѣняетъ во время движенія точки свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ нѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ момента количества движенія.*

Уравненія (110) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ момента количества движенія, равна и параллельна длинѣ, изображающей моментъ силы F.

Если моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю во все время движенія точки, то изъ уравненія (110, a) получимъ слѣдующій интегралъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(131, a)}$$

Моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю или тогда, когда проэкція силы на плоскость YZ равна нулю (тогда $Y=O$, $Z=O$), или тогда, когда проэкція силы на эту плоскость проходитъ черезъ начало координатъ: послѣднее условіе выражается равенствомъ:

$$\frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(132, a)}$$

и требуетъ, чтобы сила F пересѣкала ось X.

Интегралъ (131, а) выражаетъ, что секторьяльная скорость проэкціи радіуса вектора на плоскость YZ имѣетъ постоянную величину, то есть:

$$mr^2_{yz}\frac{d\theta_1}{dt} = C_1,$$

$$\sigma(yz) = \frac{d\Pi_{yz}}{dt} = \frac{C_1}{2m};$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Pi_{yz} = \frac{C_1}{2m}t, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(133, a)}$$

то есть площадь сектора, описываемаго проэкціею радіуса вектора на плоскости YZ, возрастаетъ равномѣрно.

Такъ какъ за ось X можетъ быть взята всякая неподвижная линія, а за плоскость YZ — всякая плоскость перпендикулярная къ ней, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ движущейся матерьяльной точкѣ, проходитъ черезъ какую либо неподвижную прямую линію, то дифференціальныя уравненія движенія этой точки имѣютъ интегралъ, выражающій постоянство секторьяльной скорости проэкціи радіуса вектора

точки на плоскость перпендикулярную къ прямой (началомъ радіуса вектора служитъ пересѣченіе прямой съ плоскостью).

B. Если во все время движенія моменты силы F вокругъ двухъ осей координатъ равны нулю, то движеніе точки совершается въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ.

Положимъ, что равны нулю моменты силы F вокругъ осей X и Y, то есть, что сила F удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

Помноживъ первое равенство на x, второе на y и сложивъ, получимъ равенство:

$$z(yX - xY) = 0,$$

которое тоже должно быть удовлетворено при движеніи точки.

Оно можетъ быть удовлетворено или тѣмъ, что во все время движенія $z = 0$, или тѣмъ, что сила F удовлетворяетъ, кромѣ условій (134), еще условію:

$$xY - yX = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (135)$$

Въ первомъ случаѣ точка движется въ плоскости XY; мы сейчасъ покажемъ, что она движется въ нѣкоторой плоскости и во второмъ случаѣ.

Въ этомъ случаѣ вторыя части всѣхъ трехъ уравненій (110, a, b, c) равны нулю, а потому мы имѣемъ тогда три интеграла:

$$m(yz' - zy') = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (131, a)$$

$$m(zx' - xz') = C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (131, b)$$

$$m(xy' - yx') = C_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (131, c)$$

Помноживъ: первый — на x, второй — на y, третій — на z, и сложивъ, получимъ:

$$0 = C_1x + C_2y + C_3z; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (136)$$

это — уравненіе той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, въ которой должна оставаться движущаяся точка.

Постоянныя C_1, C_2, C_3, пропорціональныя косинусамъ угловъ, составляемыхъ нормалью къ этой плоскости съ осями координатъ, опредѣлятся по начальнымъ обстоятельствамъ движенія: a, b, c, α, β, γ, а именно:

$$C_1 = m(b\gamma - c\beta),\quad C_2 = m(c\alpha - a\gamma),\quad C_3 = m(a\beta - b\alpha) \ldots \quad \mathbf{(137)}$$

Обратимъ вниманіе на эти случаи, въ которыхъ сила F удовлетворяетъ тремъ условіямъ (134) (135) и въ которыхъ, поэтому, дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки имѣютъ три интеграла (131, a, b, c).

Условія (134) и (135) можно представить въ видѣ слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}, \ldots \quad \mathbf{(132)}$$

выражающихъ, что направленіе силы F проходитъ черезъ начало координатъ.

Интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что проэкціи на всѣ три оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ имѣютъ постоянныя величины; изъ этого слѣдуетъ, что моментъ количества движенія l_0 имѣетъ постоянную величину:

$$l_0 = m\left[(b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= m r_0 v_0 \sin(v_0 r_0) \ldots \quad \mathbf{(138)}$$

и постоянное направленіе:

$$\left.\begin{aligned} \cos(l_0 X) &= \frac{m(b\gamma - c\beta)}{l_0} \\ \cos(l_0 Y) &= \frac{m(c\alpha - a\gamma)}{l_0} \\ \cos(l_0 Z) &= \frac{m(a\beta - b\alpha)}{l_0} \end{aligned}\right\} \ldots \quad \mathbf{(139)}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что сек-

торьяльныя скорости проэкцій радіуса вектора на всѣ три плоскости координатъ постоянны:

$$\sigma(yz)=\frac{C_1}{2m},\ \sigma(zx)=\frac{C_2}{2m},\ \sigma(xy)=\frac{C_3}{2m};\ \ldots\ldots\ (140)$$

а отсюда слѣдуетъ, что площади секторовъ, описываемыхъ на плоскостяхъ координатъ проэкціями радіуса вектора на эти плоскости, возрастаютъ равномѣрно:

$$\Pi_{yz}=\frac{C_1}{2m}t,\ \Pi_{zx}=\frac{C_2}{2m}t,\ \Pi_{xy}=\frac{C_3}{2m}t\ \ldots\ldots\ldots\ (141)$$

Секторьяльная скорость проэкціи радіуса вектора на какую бы то ни было неподвижную плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, будетъ также постоянна; въ самомъ дѣлѣ, если перемѣнимъ направленіе осей координатъ такимъ образомъ, чтобы одна изъ новыхъ осей совпала съ направленіемъ OP, перпендикулярнымъ къ этой плоскости $\mathfrak{F}$, то, по предыдущимъ формуламъ, разсматриваемая секторьяльная скорость σ ($\mathfrak{F}$) выразится такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F})=\frac{l_0\cos(l_0P)}{2m}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (142)$$

Отсюда видно, что наибольшая секторьяльная скорость:

$$\sigma=\frac{l_0}{2m}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ (143)$$

будетъ въ плоскости (136), въ которой заключается траэкторія движущейся точки; секторьяльная же скорость проэкціи радіуса вектора на всякую плоскость, проходящую черезъ направленіе l_0, будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *если равнодѣйствующая силъ приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, при всякомъ положеніи точки направлена чрезъ начало координатъ, то движеніе точки совершается въ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и подчиняется тому закону, что площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ, возрастаетъ* равномѣрно; сек-

возбуждаемыхъ движеніемъ проводниковъ и магнитовъ. Такія силы называются *силами сопротивленія движенію*, или просто *сопротивленіями движенію*.

Интегралъ:

$$\int_{s_1}^{s_2} F\cos(F,v)ds,$$

взятый по протяженію нѣкоторой части пути, пройденнаго точкою, называется *работою силы F на этой части пути*.

Работа имѣетъ измѣренія одинаковыя съ моментами силъ: она представляетъ произведеніе изъ величины силы на длину; такъ что:

$$(\text{единица работы}) = (\text{един. силы})\ (\text{един. длины}) = \frac{м.д^2}{в^2} \ldots \textbf{(146)}$$

На практикѣ за единицу работы принимаютъ килограммо-метръ, то есть работу, совершаемую на протяженіи одного метра, вѣсомъ одного килограмма (въ Парижѣ, на уровнѣ моря); но правильнѣе принять за единицу работы ту, которая выражена формулою (146).

Коммиссія при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ (стр. 27) предложила принять за единицу — работу, производимую диною на протяженіи сантиметра (предполагая, конечно, что направленіе силы совпадаетъ постоянно съ направленіемъ скорости); эту единицу работы предложено называть эргъ (erg).

$$\text{Эргъ} = \frac{(\text{граммъ}) \cdot (\text{сантиметръ})^2}{(\text{секунда})^2} \ldots\ldots\ldots \textbf{(147)}$$

Приводимъ здѣсь числовыя выраженія нѣкоторыхъ величинъ работы въ эргахъ.

Килограммометръ = 100000. g. (эргъ).

Килограммометръ въ Парижѣ, на уровнѣ моря = 9,8094. 10^7. (эргъ).

Англійскій фунтофутъ = 13825. g. (эргъ).

Лошадиная сила есть способность произвести 75 килограммометровъ работы въ секунду; если принять $g = 981$ (въ сантиметрахъ

и секундахъ), то лошадиную силу можно опредѣлить какъ способность произвести работу въ 7,36. 10^9 эрговъ въ секунду.

Въ Англіи принята лошадиная сила нѣсколько большая: способность произвести 550 фунтофутовъ работы въ секунду или, принимая $g=981$, способность произвести 7,46. 10^9 эрговъ работы въ секунду.

Первая часть дифференціальнаго уравненія (112) есть дифференціалъ отъ произведенія:

$$\frac{mv^2}{2},$$

называемаго *живою силою* матерьяльной точки или *кинетическою энергіею* ея.

Живая сила имѣетъ тѣ же самыя измѣренія, какъ и работа, а потому эргъ есть также единица кинетической энергіи или живой силы.

Дифференціальное *уравненіе* (112) *выражаетъ, что безконечно малое приращеніе живой силы матерьяльной точки, получаемое ею на протяженіи безконечно-малаго элемента пути ея, равняется элементарной работѣ* (на протяженіи того же элемента пути) *равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ*, элементарная же работа равнодѣйствующей F равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ силъ: $F1, F2, \ldots. Fk$, то есть:

$$F\cos(F,v)ds = F1\cos(F1,v)ds + F2\cos(F2,v)ds + \ldots.$$

$$\ldots. + Fk\cos(Fk,v)ds \ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

Пусть t_1 и t_2 суть два какіе либо момента времени, v_1 и v_2 — скорость матерьяльной точки въ эти моменты, s_1 — разстояніе, считаемое по дугѣ траэкторіи, отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траэкторіи, до того положенія, которое матерьяльная точка занимаетъ въ моментъ t_1, l_{21} — длина пути пробѣгаемаго точкою въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Возьмемъ отъ обѣихъ частей уравненія (112) интегралы въ предѣлахъ, соотвѣтствующихъ моментамъ t_1 и t_2; получимъ:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_{s_1}^{s_{11}} F\cos(F,v)ds, \ldots\ldots\ldots (149)$$

гдѣ:

$$s_{11}=s_1+l_{21}.$$

Это равенство выражаетъ, что *разность между величинами живой силы въ концѣ и въ началѣ пути, пройденнаго свободною матерьяльною точкою въ теченіи какого либо промежутка времени* (t_2-t_1), *равняется работѣ, произведенной на этомъ пути равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.*

Дифференціальное уравненіе (112) и равенство (149) справедливы при всякихъ силахъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ.

§ 26. Законъ живой силы или сохраненія энергіи для одной матерьяльной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня.

Если проэкціи на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, суть такія функціи координатъ, которыя дѣлаютъ тричленъ:

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи $U\ (x,\ y,\ z)$ координатъ, то дифференціальное уравненіе (112) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dU;$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки будутъ имѣть тогда слѣдующій интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2}=U+h, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (150)$$

гдѣ h есть произвольная постоянная.

Условіе:

$$Xdx+Ydy+Zdz=dU \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(151)}$$

требуетъ, чтобы проэкціи силы на оси координатъ были равны производнымъ отъ U по координатамъ; а именно должно быть

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(152)}$$

Функція U отъ x, y, z, производныя которой по x, y, z выражаютъ проэкціи X, Y, Z силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ точкѣ (x, y, z) пространства, называется *потенціальною* или *силовою функціею* этой силы. Сила же, проэкціи которой на оси координатъ суть функціи отъ x, y, z, удовлетворяющія условію (151), называется *силою, имѣющею потенціалъ*.

Если придадимъ опредѣленныя численныя значенія: a, b, c перемѣннымъ величинамъ x, y, z, заключающимся въ функціи U, то послѣдняя получитъ нѣкоторое численное значеніе C.

Уравненіе:

$$U(x,\ y,\ z)=U(a,\ b,\ c)$$

или

$$U(x,\ y,\ z)=C \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(153)}$$

есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ ту точку пространства, координаты которой суть a, b, c; во всѣхъ точкахъ этой поверхности, называемой *поверхностью уровня*, потенціальная функція U имѣетъ одну и ту же постоянную величину C; эта постоянная называется *параметромъ* поверхности уровня.

Придавая параметру C въ уравненіи (153) различныя дѣйствительныя значенія, которыя можетъ получать потенціальная функція U, мы получимъ уравненія различныхъ поверхностей уровня этой функціи. Каждой потенціальной функціи свойственно безчисленное множество поверхностей уровня, совокупность которыхъ образуетъ систему, заполняющую собою все то пространство, внутри котораго потенціальная функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(N_1X) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_1У) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_1Z) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z}, \\ \cos(N_2X) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_2У) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_2Z) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U = +\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1, соотвѣтствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, безконечно близкая къ M; x, y, z — координаты точки M; $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ — координаты точки M_1, гдѣ δx, δy, δz суть проэкціи на оси координатъ какой либо безконечно-малой дуги δs, стягиваемой хордою MM_1. Очевидно, пара-

метръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_1, можетъ отличаться отъ C только на безконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s)\delta s \; . \; . \; . \; . \quad (156)$$

Это выраженіе приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C, въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C, со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F.$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

послѣднія три равенства выражаютъ, что *сила F, имѣющая разсматриваемый потенціалъ и приложенная къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ точкѣ M (x, y, z) пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.*

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (157)$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(N_1X) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x},\\
\cos(N_1Y) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y},\\
\cos(N_1Z) &= \frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z},\\
\cos(N_2X) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x},\\
\cos(N_2Y) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y},\\
\cos(N_2Z) &= \frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U = +\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1, соотвѣтствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, безконечно близкая къ M; x, y, z — координаты точки M; $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ — координаты точки M_1, гдѣ δx, δy, δz суть проэкціи на оси координатъ какой либо безконечно-малой дуги δs, стягиваемой хордою MM_1. Очевидно, пара-

метръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_1, можетъ отличаться отъ C только на безконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s)\delta s \; \ldots \quad \textbf{(156)}$$

Это выраженіе приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C, въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C, со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F,$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

послѣднія три равенства выражаютъ, что *сила F, имѣющая разсматриваемый потенціалъ и приложенная къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ точкѣ M (x, y, z) пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.*

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \; \ldots \ldots \quad \textbf{(157)}$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою

и величиною параметра той поверхности уровня, на которой находится матерьяльная точка, есть величина постоянная во все время движенія.

Этотъ законъ движенія извѣстенъ подъ именемъ *закона живой силы* для одной матерьяльной точки.

Работа силы F, имѣющей потенціалъ U, на пути, начинающемся въ точкѣ M_1 (x_1, y_1, z_1) и кончающемся въ точкѣ M_2 (x_2, y_2, z_2), выразится разностью значеній потенціальной функціи въ этихъ точкахъ; то есть:

$$\int_{s_1}^{s_2} F\cos(F,v)ds = \int (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

$$= \int dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1). \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(158)}$$

Слѣдовательно, величина работы не зависитъ отъ того пути, который опишетъ движущаяся точка между точками M_1 и M_2, а только отъ величинъ параметровъ тѣхъ поверхностей уровня, на которыхъ эти точки находятся.

Точно также, при переходѣ матерьяльной точки по какому бы то ни было пути съ одной поверхности уровня на другую, сила F совершаетъ работу, выражаемую разностью параметровъ этихъ поверхностей; при этомъ параметръ той поверхности, изъ которой вышла точка, играетъ роль вычитаемаго, а параметръ той поверхности, на которую приходитъ точка — роль уменьшаемаго.

Уравненіе (149) предыдущаго параграфа принимаетъ при силахъ, имѣющихъ потенціалъ, слѣдующій видъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(159)}$$

что получается также изъ интеграла (157) или (150), выражающаго законъ живой силы для одной матерьяльной точки.

Примѣрами силъ, имѣющихъ потенціалъ, могутъ служить:

а) постоянная сила. Потенціальная функція ея есть линейная функція координатъ; въ самомъ дѣлѣ, если:

$$X=A,\ \ Y=B,\ \ Z=C,$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, то очевидно:

$$U=Ax+By+Cz+D, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

гдѣ D есть значеніе потенціальной функціи въ началѣ координатъ.

Поверхности уровня этой потенціальной функціи суть параллельныя плоскости.

Другой примѣръ представляетъ:

б) сила, притягивающая матерьяльную точку къ неподвижному центру, находящемуся въ началѣ координатъ, или отталкивающая точку отъ этого центра; величина силы выражается нѣкоторою функціею радіуса вектора точки.

Проэкціи такой силы на оси координатъ выразятся такъ:

$$X=F(r)\frac{x}{r},\ \ Y=F(r)\frac{y}{r},\ \ Z=F(r)\frac{z}{r},$$

гдѣ $F(r)$ есть положительно-взятая величина отталкивательной силы, или отрицательно-взятая величина притягательной силы; подъ r подразумѣвается здѣсь положительно-взятая величина разстоянія матерьяльной точки отъ центра силы; то есть:

$$r=+\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ обозначать тою же буквою также и направленіе изъ центра силы вдоль по радіусу вектору.

Легко видѣть, что косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ r съ осями координатъ, выражаются производными отъ r по соотвѣтственнымъ координатамъ точки, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{x}{r}=\cos(rx)\\ \frac{\partial r}{\partial y}&=\frac{y}{r}=\cos(ry)\\ \frac{\partial r}{\partial z}&=\frac{z}{r}=\cos(rz)\end{aligned}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

поэтому:

$$X=F(r)\frac{\partial r}{\partial x},\quad Y=F(r)\frac{\partial r}{\partial y},\quad Z=F(r)\frac{\partial r}{\partial z},\ \ldots\ldots \quad (162)$$

а отсюда слѣдуетъ, что потенціальная функція этой силы — слѣдующая:

$$U=\int F(r)dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$\frac{dU}{dr}=F(r),$$

то:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=F(r)\frac{\partial r}{\partial x},\ \ldots\ldots\ldots$$

в) Если центръ притяженія или отталкиванія находится не въ началѣ координатъ, а въ какой либо неподвижной точкѣ M_1, координаты которой суть: x_1, y_1, z_1, то тогда подъ r слѣдуетъ подразумѣвать:

$$r=+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2},$$

а подъ направленіемъ r — направленіе изъ центра M_1 къ той точкѣ, на которую дѣйствуетъ разсматриваемая сила.

Потенціальная функція выражается интеграломъ (163), проэкціи же силы на оси координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} X&=F(r)\frac{\partial r}{\partial x}=F(r)\frac{x-x_1}{r}\\ Y&=F(r)\frac{y-y_1}{r}\\ Z&=F(r)\frac{z-z_1}{r}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (164)$$

Въ этомъ случаѣ, также какъ и въ предыдущемъ, поверхности уровня суть концентрическія сферы, имѣющія центръ въ центрѣ силы.

г) На матерьяльную точку могутъ дѣйствовать одновременно нѣсколько такихъ силъ, какъ упомянутая въ предыдущемъ пунктѣ;

тогда потенціальная функція равнодѣйствующей будетъ выражаться суммою потенціальныхъ функцій составляющихъ силъ:

$$U = \int F_1(r_1)dr_1 + \int F_2(r_2)dr_2 + \ldots\ldots + \int F_k(r_k)dr_k, \quad (165)$$

гдѣ:

$$r_1 = +\sqrt{(x-\mathrm{x}_1)^2 + (y-\mathrm{y}_1)^2 + (z-\mathrm{z}_1)^2}$$

$$r_2 = +\sqrt{(x-\mathrm{x}_2)^2 + (y-\mathrm{y}_2)^2 + (z-\mathrm{z}_2)^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_k = +\sqrt{(x-\mathrm{x}_k)^2 + (y-\mathrm{y}_k)^2 + (z-\mathrm{z}_k)^2};$$

x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... x_k, y_k, z_k — суть координаты центровъ, изъ которыхъ дѣйствуютъ составляющія силы.

Проэкція равнодѣйствующей на ось $X^{\text{овъ}}$ выразится такъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = F_1(r_1)\frac{x-\mathrm{x}_1}{r_1} + F_2(r_2)\frac{x-\mathrm{x}_2}{r_2} + \ldots + F_k(r_k)\frac{x-\mathrm{x}_k}{r_k} \ldots (166)$$

д) Сила:

$$X = -\frac{Ky}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{Kx}{x^2+y^2}, \quad Z = 0$$

(гдѣ K — постоянное) имѣетъ слѣдующую потенціальную функцію:

$$U = K \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (167)$$

Отношеніе $(y:x)$ есть тангенсъ угла θ, составляемаго съ осью $X^{\text{овъ}}$ проэкціею радіуса вектора точки на плоскость XY; тотъ же самый тангенсъ имѣютъ углы:

$$\theta \pm 2n\pi,$$

гдѣ n — какое либо цѣлое число; поэтому потенціальная функція (167) имѣетъ въ каждой точкѣ пространства безчисленное множество значеній:

$$U = K\theta \pm 2n\pi K \ldots\ldots\ldots\ldots (168)$$

Когда понадобится, мы обратимъ вниманіе на обстоятельства, проистекающія изъ многократности значеній такой потенціальной функціи.

Законъ живой силы для одной матерьяльной точки представляетъ собою частный случай общаго закона того же имени, относящагося къ движенію системы точекъ; въ своемъ мѣстѣ мы сообщимъ нѣкоторыя историческія свѣдѣнія относительно открытія этого закона.

§ 27. Примѣръ рѣшенія задачи о криволинейномъ движеніи свободной матерьяльной точки подъ вліяніемъ центральной силы, имѣющей потенціалъ.

Мы приведемъ теперь примѣръ рѣшенія такой задачи, въ которой имѣютъ мѣсто законы площадей и живой силы:

Примѣръ 19. Опредѣлить движеніе свободной матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою обратно-пропорціональною квадрату разстоянія отъ него.

Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки суть:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{x}{r} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{y}{r} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{z}{r}, \end{aligned}\right\}, \qquad (169)$$

гдѣ μ есть нѣкоторая постоянная величина.

Такъ какъ сила постоянно направлена къ началу координатъ, то, какъ показано въ § 24, дифференціальныя уравненія имѣютъ три интеграла:

$$(yz' - zy') = \frac{C_1}{m} \qquad (131,\ a)$$

$$(zx' - xz') = \frac{C_2}{m} \qquad (131,\ b)$$

$$(xy' - yx') = \frac{C_3}{m} \qquad (131,\ c)$$

Кромѣ того, такъ какъ сила имѣетъ потенціалъ:

$$U = -\mu m \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu m}{r},$$

то, какъ показано въ § 26, дифференціальныя уравненія имѣютъ еще интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = mh, \qquad (170)$$

выражающій законъ живой силы.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ уже четыре интеграла съ четырьмя произвольными постоянными: C_1, C_2, C_3, h.

Остается произвести еще два интегрированія, которыя введутъ двѣ произвольныя постоянныя, и тогда задача будетъ рѣшена.

Изъ параграфа 24-го извѣстно, что движеніе матерьяльной точки происходитъ въ плоскости:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0, \qquad (136)$$

проходящей черезъ начало координатъ, и секторьяльная скорость радіуса вектора, остающагося постоянно въ этой плоскости, постоянна:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m}, \qquad (143)$$

гдѣ:

$$l_0 = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = mr_0v_0 \sin(v_0r_0) \qquad (138)$$

Выразимъ секторьяльную скорость σ въ полярныхъ координатахъ по формулѣ (144) параграфа 24-го:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2\sigma; \qquad (144)$$

въ интегралѣ (170) выразимъ квадратъ скорости въ полярныхъ же координатахъ по формулѣ (20) кинематической части (стр. 33):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2h + \frac{2\mu}{r}. \qquad (171)$$

Мы будемъ интегрировать дифференціальныя уравненія перваго порядка: (144) (171).

(Аргументъ Θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости дви-

III-27.

женія черезъ начало координатъ; при движеніи точки этотъ уголъ непрерывно увеличивается).

Исключимъ θ' изъ уравненія (171) и рѣшимъ его относительно r'; получимъ:

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{4\sigma^2}{r^2}};\ldots\ldots\ldots\ldots(172)$$

интегрируя это послѣднее уравненіе, найдемъ выраженіе для r въ функціи отъ t.

Вмѣсто того, чтобы интегрировать уравненіе (172), мы его преобразуемъ въ другое, которое легче интегрируется и доставляетъ уравненіе траэкторіи.

Для этого представимъ себѣ, что r выражено функціею отъ θ; поэтому:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

или, на основаніи уравненія (144):

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{2\sigma}{r^2}=-\frac{d\left(\frac{2\sigma}{r}\right)}{d\theta}.$$

Трichленъ, находящійся подъ корнемъ уравненія (172), можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{4\sigma^2}{r^2}=2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}-\left(\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}\right)^2.$$

Сумма:

$$2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}$$

имѣетъ всегда величину положительную; въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ v_0 и r_0 начальную скорость и начальный радіусъ векторъ; по формуламъ (138) (143):

$$4\sigma^2=v_0^2r_0^2\sin^2(v_0r_0);$$

постоянная же h можетъ быть выражена (см. (170)) такъ:

$$h=\frac{v_0^2}{2}-\frac{\mu}{r_0};$$

слѣдовательно:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2(v_0 r_0)}.$$

Такъ какъ квадратъ синуса не можетъ быть болѣе единицы, то дробь:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(v_0 r_0)}$$

не можетъ быть менѣе дроби:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2},$$

то есть, первая дробь или болѣе второй, или равна ей:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geqq \frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2};$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geqq v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0{}^2 r_0{}^2},$$

то есть:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} \geqq \left(v_0 - \frac{\mu}{v_0 r_0}\right)^2;$$

значитъ, разсматриваемая нами сумма дѣйствительно всегда имѣетъ величину положительную.

Раздѣливъ эту сумму на положительную величину $(\mu^2 : 4\sigma^2)$, мы получимъ положительное отношеніе, которое мы означимъ черезъ e^2:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = \frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2$$

$$e^2 = 1 + \frac{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2(v_0 r_0)}{\mu^2}\left(v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) \ldots\ldots\ldots (173)$$

По всѣмъ этимъ причинамъ, уравненіе (172) можно преобразовать въ слѣдующее:

$$-\frac{d\zeta}{d\theta}\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2 - \zeta^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (174)$$

III-27.

гдѣ, для краткости, черезъ ζ обозначена слѣдующая разность:

$$\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}=\zeta.$$

Отдѣливъ перемѣнныя въ уравненіи (174):

$$-\frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2-\zeta^2}}=d\theta$$

и интегрируя, получимъ:

$$\arccos\left(\frac{2\sigma\zeta}{\mu e}\right)=\theta+\mathbf{\Gamma}_1,$$

или:

$$\zeta=\frac{\mu e}{2\sigma}\cos(\theta+\mathbf{\Gamma}_1)$$

$$\frac{2\sigma}{r}=\frac{\mu}{2\sigma}\Big(1+e\cos(\theta+\mathbf{\Gamma}_1)\Big),$$

гдѣ $\mathbf{\Gamma}_1$ есть пятая произвольная постоянная.

Выразимъ r въ функціи отъ θ:

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta+\Gamma_1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

гдѣ:

$$p=\frac{4\sigma^2}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Уравненіе (175) (какъ уже было упомянуто на стр. 42 кинематической части) представляетъ одну изъ кривыхъ линій 2-го порядка, то есть эллипсъ, гиперболу, или параболу; величина эксцентриситета e опредѣляетъ родъ кривой, а именно:
кривая есть *гипербола*, если $e>1$, то есть, если (см. формулу (173)):

$$v_0^2>\frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть *гипербола*, если $e=1$, то есть, если:

$$v_0^2=\frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть *эллипсъ*, если $e<1$, то есть, если:

$$v_0^2<\frac{2\mu}{r_0}.$$

Величина p есть полупараметръ кривой, то есть длина радіуса вектора, перпендикулярнаго къ большой оси эллипса, къ главной оси параболы, или къ дѣйствительной главной оси гиперболы.

Послѣднее интегрированіе произведемъ надъ уравненіемъ (144), въ которомъ замѣнимъ r функціею отъ Θ; уравненіе это, по отдѣленіи перемѣнныхъ, получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma}\frac{d\theta}{(1+e\cos(\theta+\Gamma_1))^2}=dt. \qquad (177)$$

Для краткости, означимъ $(\Theta+\Gamma_1)$ черезъ ψ; двучленъ, заключающійся въ знаменателѣ, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$1+e\cos\psi=\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+e\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)-e\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)=$$

$$=(1+e)\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+(1-e)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

послѣ чего предыдущее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1+e)^2}\frac{d\psi}{\left[1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]^2\cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)}=dt. \qquad (178)$$

Интегрированіе этого уравненія въ случаѣ движенія точки по эллипсу облегчается при помощи слѣдующей подстановки:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \qquad (179)$$

изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}=1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)=\frac{1-e\cos f}{(1-e)\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)}$$

$$\frac{d\psi}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{df}{\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)};$$

III-27.

теперь уравненіе (178) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(f-e\cos f)df=dt.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1-e\sin f)=t-\tau$$

или:

$$f-e\sin f=(t-\tau)\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \dots\dots\dots\dots \quad (180)$$

гдѣ τ есть шестая произвольная постоянная, a — длина большой полуоси эллипса:

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{4\sigma^2}{\mu(1-e^2)}=-\frac{\mu}{2h}\dots\dots\dots\dots \quad (181)$$

Послѣ этого, разсматриваемая задача для случая движенія по эллиптической траэкторіи рѣшена окончательно.

Эта задача играетъ существенную роль въ астрономіи и небесной механикѣ; полученное рѣшеніе выражаетъ движеніе которой либо изъ планетъ вокругъ солнца, если предположить послѣднее неподвижнымъ, массу планеты — сосредоточенною въ одной точкѣ, а притяженіе разсматриваемой планеты прочими — несуществующимъ.

Шесть произвольныхъ постоянныхъ:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ h,\ \Gamma_1,\ \tau$$

нетрудно выразить въ начальныхъ координатахъ и въ проэкціяхъ начальной скорости на оси координатъ.

Первыя четыре произвольныя постоянныя опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты, эксцентриситетъ ея и длину большой полуоси:

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}=\cos I\dots\dots\dots\dots \quad (182)$$

$$\frac{C_1}{C_2}=-\operatorname{tg}\Omega,\dots\dots\dots\dots \quad (183)$$

$$a = -\frac{\mu}{2h}, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(181)}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)}{m^2\mu^2}2h}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(173)}$$

гдѣ I есть уголъ, подъ которымъ плоскость орбиты наклонена къ плоскости $XУ$, Ω — уголъ, составляемый съ осью X линіею пересѣченія этихъ плоскостей.

Произвольная постоянная Γ_1 есть отрицательно взятый аргументъ наименьшаго радіуса вектора; τ — моментъ времени, въ который радіусъ векторъ имѣетъ наименьшую величину.

Въ случаѣ движенія точки по параболѣ, уравненіе (178) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma}\frac{d\psi}{4\cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(184)}$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{(\theta+\Gamma_1)}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{(\theta+\Gamma_1)}{2}\right) = (t-\tau) \ldots\ldots \textbf{(185)}$$

§ 28. Нѣкоторыя другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Предположимъ, что свободная матерьяльная точка постоянно остается въ одной плоскости, которую мы примемъ за плоскость $XУ$.

Изъ предыдущаго намъ извѣстно, что дифференціальныя уравненія движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = У,$$

или замѣняющая ихъ совокупность дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x',\ \frac{dy}{dt} = y',\ m\frac{dx'}{dt} = X,\ m\frac{dy'}{dt} = У \ldots\ldots \textbf{(186)}$$

имѣютъ интегралъ:

$$m(xy' - yx') = C,$$

III - 28.

если сила всегда удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = 0$$

и эти же уравненія имѣютъ интегралъ:

$$\frac{m}{2}\left((x')^2+(y')^2\right) - U = h,$$

если сила имѣетъ потенціалъ.

Мы считаемъ здѣсь умѣстнымъ указать на двѣ другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (186), получаемыя черезъ интегрированіе дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d[m(xy'-yx')]}{dt} = (xY - yX),$$

если силы не зависятъ отъ скорости и времени и удовлетворяютъ нижеприведеннымъ условіямъ; эти интегралы найдены Бертраномъ *).

1) Если сила удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = D, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (187)$$

гдѣ D — постоянное, то изъ послѣдняго дифференціальнаго уравненія получимъ интегралъ:

$$m(xy' - yx') = Dt + C. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

2) Если сила удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

гдѣ f есть какая бы то ни было функція отъ $(y:x)$, то, помноживъ обѣ части послѣдняго дифференціальнаго уравненія на

$$2(xy' - yx'),$$

получимъ:

$$\frac{d}{dt}\left[m(xy' - yx')^2\right] = 2f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right);$$

*) Bertrand. Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique. Journal de Mathématiques pures et appliquées par J. Liouville. Serie 1, Tome XVII. 1852. p. 121—175.

отсюда интегралъ слѣдующаго вида:

$$m(xy'-yx')^2=\int 2f\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)+C\ldots\ldots \textbf{(190)}$$

Примѣчаніе. Сюда же слѣдуетъ отнести и тѣ случаи, въ которыхъ сила удовлетворяетъ условію:

$$(xY-yX)=\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2},\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(191)}$$

потому что, если мы положимъ:

$$\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

то условіе (191) приметъ видъ (189).

Извѣстны еще другія общія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки, подверженной силамъ, удовлетворяющимъ нѣкоторымъ условіямъ; изъ этихъ формъ интеграловъ мы можемъ указать только на слѣдующія.

3) Помножимъ второе изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$mx''=X,\qquad my''=Y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

на x' и затѣмъ вычтемъ изъ него первое, помноженное на y'; получится слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$m(x'y''-y'x'')=x'Y-y'X\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(192)}$$

Если сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, удовлетворяетъ условію:

$$x'Y-y'X=(x')^3f\left(x,\,y,\frac{y'}{x'}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(193)}$$

гдѣ f есть какая нибудь функція отъ x, y, $(y':x')$, то тогда дифференціальное уравненіе (192) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$m\frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt}=x'f\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right).$$

III - 23.

Предполагая, что y выражено функціею отъ x, можемъ исключить изъ этого уравненія дифференціалъ времени, имѣя въ виду, что:

$$\frac{y'}{x'}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx}x'=\frac{d^2y}{dx^2}x';$$

вслѣдствіе этого послѣднее дифференціальное уравненіе получитъ, по сокращеніи на x', видъ:

$$m\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\dots\dots\dots\dots (194)$$

обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

Первые интегралы этого уравненія:

$$\varphi_1\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=C_1,\quad \varphi_2\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=C_2,$$

представятъ собою, по замѣщеніи въ нихъ производной $\frac{dy}{dx}$ — отношеніемъ $(y':x')$, первые интегралы:

$$\varphi_1\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right)=C_1,\quad \varphi_2\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right)=C_2\dots\dots\dots (195)$$

дифференціальныхъ уравненій (A) движенія свободной матерьяльной точки.

Условіе (193) выражаетъ, что проэкція силы на нормаль къ траэкторіи есть однородная функція второй степени отъ скоростей x' и y'; функція эта — слѣдующая:

$$(x')^2\frac{f\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}}\dots\dots\dots\dots (196)$$

Слѣдовательно, *если проэкція силы на нормаль къ траэкторіи есть однородная функція* (196) *второй степени отъ скоростей x' и y', то дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки на плоскости имѣютъ два первые интеграла, не зависящіе отъ времени; эти интегралы получаются изъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка* (194).

Этотъ случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости былъ указанъ проф. А. Н. Коркинымъ *).

Кромѣ того, А. Н. Коркинъ нашелъ еще нѣсколько случаевъ интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія матерьяльной точки на плоскости, въ которыхъ получаются два интеграла; изъ этихъ случаевъ мы можемъ здѣсь привести только одинъ, самый простѣйшій.

4) Если сила не зависитъ отъ времени и скоростей и удовлетворяетъ условію:

$$Y - kX = f(y - kx), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

гдѣ k — постоянное, а f — нѣкоторая функція отъ $(y - kx)$, то тогда составимъ дифференціальное уравненіе:

$$m(y'' - kx'') = Y - kX, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

которое, на основаніи условія (197), приведется къ виду:

$$m(y'' - kx'') = f(y - kx). \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Означимъ $y - kx$ черезъ ξ, тогда уравненіе (199) получитъ видъ:

$$m\xi'' = f(\xi);$$

интегрированіе дифференціальнаго уравненія такого вида показано въ § 19 (см. случаи 2-го рода).

§ 29. Задачи.

1. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки, притягиваемой къ оси $X^{овъ}$ силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея; начальная скорость точки параллельна той же оси.*

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$mx'' = 0, \quad my'' = -\frac{\mu m}{y^2};$$

начальныя координаты и скорости:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = \alpha, \quad y_0 = b, \quad y'_0 = 0.$$

---

*) Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. 1867.

Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. B. II. 1870. S. 13.

III-29.

Второй интегралъ движенія параллельно оси $X^{овъ}$:

$$x=\alpha t. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (200)$$

Первый интегралъ движенія параллельно оси $Y^{овъ}$:

$$(y')^2=2\mu\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right).$$

Для того, чтобы интегрировать уравненіе:

$$-\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{b}}}=dt\sqrt{2\mu},$$

положимъ:

$$y=\frac{b}{2}(1+\cos\omega), \ldots\ldots\ldots\ldots (201)$$

тогда это уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2}\,2\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega=dt\sqrt{2\mu};$$

интегрируя получимъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2}(\omega+\sin\omega)=t\sqrt{2\mu}. \ldots\ldots\ldots\ldots (202)$$

Три уравненія: (200—202) выражаютъ движеніе точки; траэкторія же выражается двумя уравненіями:

$$y=\frac{b}{2}(1+\cos\omega),\quad x=\alpha\sqrt{\frac{b}{2\mu}}\cdot\frac{b}{2}(\omega+\sin\omega).$$

Предлагаемъ сравнить эти уравненія съ уравненіями циклоиды (см. Кинем. часть, стр. 14).

Время, въ теченіе котораго движущаяся точка придетъ на ось $X^{овъ}$, опредѣлится изъ формулы (202), если сдѣлаемъ въ ней $\omega=\pi$:

$$T=\pi\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2\mu}}.$$

2. На матерьяльную точку дѣйствуютъ притяженія, обратно пропорціональныя квадратамъ разстояній, со стороны двухъ неподвижныхъ центровъ O и L; величины этихъ притяженій суть:

$$\varepsilon\frac{Mm}{r_1^2},\quad \varepsilon\frac{\mu m}{r_2^2},$$

гдѣ: m — масса точки, r_1 — разстояніе матерьяльной точки отъ центра O, r_2 — разстояніе ея отъ центра L.

Матерьяльная точка, помѣщенная на линіи $\overline{OL}$, въ разстояніи b отъ точки O, пущена со скоростью α по направленію къ L; опредѣлить, какъ велика должна быть скорость α для того, чтобы движущаяся точка могла остановиться въ той точкѣ K на линіи $\overline{OL}$, въ которой притяженія обоихъ центровъ взаимно уравновѣшиваются.

Равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ въ этомъ случаѣ потенціалъ (см. 165):

$$U=\varepsilon m\left(\frac{M}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right),$$

поэтому движеніе матерьяльной точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}=\varepsilon\left(\frac{M}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right)-\varepsilon\left(\frac{M}{b}+\frac{\mu}{D-b}\right), \ldots\ldots \textbf{(203)}$$

гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами O и L.

Такъ какъ точка совершаетъ движеніе по прямой линіи OL между точками O и L, то r_1 и r_2 должны быть замѣнены величинами x и $D-x$, гдѣ x есть разстояніе движущейся точки отъ центра O.

Означимъ черезъ k разстояніе $\overline{OK}$; такъ какъ въ точкѣ K притяженія обоихъ центровъ должны взаимно уравновѣшиваться, то k должно удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\varepsilon\frac{Mm}{k^2}=\varepsilon\frac{\mu m}{(D-k)^2},$$

изъ котораго слѣдуетъ:

$$k=\frac{D\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{\mu}},\quad D-k=\frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{M}+\sqrt{\mu}} \ldots\ldots \textbf{(204)}$$

Примѣнимъ уравненіе (203) къ тому моменту, въ который матерьяльная точка остановится въ точкѣ K; тогда будутъ: $v=0$, $r_1=k$, $r_2=D-k$; слѣдовательно:

$$\frac{\alpha^2}{2}=\varepsilon\left(\frac{M}{b}+\frac{\mu}{D-b}-\frac{M}{k}-\frac{\mu}{D-k}\right);$$

замѣнивъ здѣсь k и $(D-k)$ выраженіями (204) и произведя надлежащія преобразованія, получимъ:

$$\frac{\alpha^2}{2}=\varepsilon\left(\frac{D-b}{Db}M+\frac{b}{D(D-b)}\mu-\frac{2\sqrt{M\mu}}{D}\right)$$

III-29.

или:

$$\alpha^2=\frac{2\varepsilon}{D}\left(\sqrt{\frac{D-b}{b}}\sqrt{M}-\sqrt{\frac{b}{D-b}}\sqrt{\mu}\right)^2 \ldots\ldots (205)$$

Положимъ, что O и L представляютъ центры земли и луны, что M и μ означаютъ массы этихъ планетъ, D — величину разстоянія между ними, b — среднюю величину земнаго радіуса; тогда формула (205) послужитъ для опредѣленія той скорости, съ которою долженъ быть пущенъ снарядъ съ поверхности земли по направленію къ лунѣ, для того, чтобы онъ могъ дойти до той точки, въ которой притяженіе земли уравновѣшивается притяженіемъ луны. Коэффиціентъ ε, заключающійся въ формулѣ (205), можетъ быть опредѣленъ на основаніи того соображенія, что сила тяжести, приложенная къ массѣ m, находящейся на поверхности земли, выражается двоякимъ образомъ:

$$P=\varepsilon\frac{Mm}{b^2};\quad P=mg,$$

а потому:

$$\varepsilon=\frac{gb^2}{M} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (205 \text{ bis})$$

Подставивъ это выраженіе для ε въ формулу (205), мы найдемъ слѣдующее выраженіе для α:

$$\alpha=\sqrt{2gb}\left(\sqrt{1-\frac{b}{D}}-\frac{b}{\sqrt{D(D-b)}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\right).$$

Если принять во вниманіе, что D почти въ 60 разъ болѣе b и что масса луны почти въ 81 разъ менѣе массы земли, то можно сказать, что приблизительно:

$$\alpha=\sqrt{2gb}$$

3. ***Матерьяльная точка притягивается къ началу координатъ силою:***

$$F=\frac{m\mu r}{2(2p-x)^3},$$

гдѣ μ и p суть ввличины постоянныя; опредѣлить движеніе матерьяльной точки, предполагая, что начальное положеніе ея на оси X, въ разстояніи p отъ начала координатъ, и что начальная скорость ея β параллельна оси $У$.

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$x''=-\frac{\mu x}{2(2p-x)^3},\quad y''=-\frac{\mu y}{2(2p-x)^3}.$$

Такъ какъ сила центральная, то здѣсь имѣетъ мѣсто законъ площадей:

$$xy'-yx'=p\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(206)}$$

Далѣе, первое изъ дифференціальныхъ уравненій интегрируется самостоятельно:

$$(x')^2=C+\mu\frac{p-x}{(2p-x)^2},$$

а такъ какъ при $x=p$, $x'=O$, то $C=O$, поэтому:

$$x'=-\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{p-x}}{2p-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(207)}$$

Исключивъ dt изъ уравненій (206) и (207) и интегрируя получившееся дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$x\frac{dy}{dx}-y=-\frac{p\beta}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{2p-x}{\sqrt{p-x}},$$

или:

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2p\beta}{\sqrt{\mu}}\,d\left(\frac{\sqrt{p-x}}{x}\right),$$

получимъ уравненіе траэкторіи:

$$y^2=\frac{4p^2\beta^2}{\mu}(p-x);$$

это — парабола, имѣющая вершину въ точкѣ $(x=p,\ y=O)$ и ось — по направленію отрицательной оси Y.

Для окончательнаго рѣшенія вопроса остается только интегрировать уравненіе (207); получимъ:

$$(4p-x)\sqrt{p-x}=\frac{3}{2}t\sqrt{\mu}.$$

4. *На матерьяльную точку дѣйствуетъ та же самая сила, что и въ предыдущей задачѣ, но начальныя обстоятельства движенія какія либо другія. Опредѣлить видъ траэкторіи и движеніе точки.*

Для рѣшенія вопроса надо произвести тѣ же самыя дѣйствія, какъ и въ предыдущей задачѣ. Первые интегралы будутъ:

$$xy' - yx' = C_1, \quad (x')^2 = C_2 + \mu \frac{p - x}{(2p - x)^2};$$

вторые:

$$\frac{y}{x} = \Gamma_1 - \frac{2C_1}{(\mu + 4C_2 p)x} \sqrt{\mu(p - x) + C_2(2p - x)^2} \ldots (208)$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{C_2}} \log \frac{2C_2(x - 2p) - \mu - 2\sqrt{C_2}\sqrt{\mu(p - x) + C_2(2p - x)^2}}{\sqrt{\mu(\mu + 4pC_2)}} -$$

$$- \sqrt{\mu(p - x) + C_2(2p - x)^2} = C_2 t + \Gamma_2.$$

Интегралъ (208) есть уравненіе траэкторіи; это — одна изъ кривыхъ втораго порядка. Родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2, если: C_2 болѣе нуля, то траэкторія — гипербола, если C_2 менѣе нуля, то траэкторія — эллипсъ, если $C_2 = O$, то парабола.

5. ***Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:***

$$F = \frac{\mu m r}{2(2p - x\cos\omega - y\sin\omega)^3},$$

гдѣ ω — постоянный уголъ.

Траэкторія — коническое сѣченіе.

6. ***Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:***

$$F = \frac{\mu m r}{\sqrt{x^3 y^3}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\frac{\mu x}{\sqrt{x^3 y^3}}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{\sqrt{x^3 y^3}}.$$

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ выражаетъ законъ площадей:

$$xy' - yx' = C_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (209)$$

другой получается, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x''y'+y''x'=-\frac{\mu(xy'+yx')}{\sqrt{x^3y^3}};$$

онъ будетъ:

$$x'y'=C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots (210)$$

Чтобы произвести дальнѣйшія интегрированія, мы преобразуемъ первые интегралы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ (210) на $4xy$ и замѣнимъ $4xyx'y'$ слѣдующею разностью:

$$4xy'yx'=(xy'+yx')^2-(xy'-yx')^2=\left(\frac{d\,(xy)}{dt}\right)^2-C_1^2;$$

послѣ этого изъ уравненія (210) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d(xy)}{dt}=\sqrt{C_1^2+4xy\left(C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)},\dots\dots\dots (211)$$

интегрируя которое, получимъ выраженіе t въ функціи отъ произведенія xy; это будетъ одинъ изъ вторыхъ интеграловъ.

Исключимъ dt изъ дифференціальнаго уравненія (211) и изъ интеграла (209):

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=\frac{C_1}{xy}\,dt,$$

получимъ дифференціальное уравненіе:

$$d\log\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{C_1\,d\,(xy)}{xy\sqrt{C_1^2+4xy\left(C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}},$$

въ лѣвой части котораго стоитъ полный дифференціалъ, а правая заключаетъ перемѣнную xy; интегрируя это уравненіе, мы найдемъ:

$$\log\sqrt{\frac{y}{x}}=\log\sqrt{\Gamma_1}-\log(z+\sqrt{z^2+p}),$$

гдѣ:

$$z=\frac{C_1}{\sqrt{xy}}+\frac{4\mu}{C_1},\quad p=4C_2-\frac{16\mu^2}{C_1^2}.$$

Рѣшивъ полученное уравненіе относительно z, получимъ:

$$2z=\frac{\Gamma_1 x-yp}{\sqrt{\Gamma_1 xy}},$$

III-29.

или

$$\left(\Gamma_1 x - py - 2C_1\sqrt{\Gamma_1}\right)^2 = \frac{64\mu^2\Gamma_1}{C_1^2}xy \ldots\ldots\ldots (212)$$

Это есть уравненіе кривой втораго порядка; родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2.

7. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее притягательной силы:*

$$F = \frac{m\mu r}{\sqrt{(ax^2+bxy+cy^2)^3}},$$

направленной къ началу координатъ.

Траэкторія — коническое сѣченіе.

8. *Опредѣлить движеніе тяжелой матерьяльной точки, свободно пущенной подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земнаго шара; убѣдиться въ вѣрности формулъ* (186), *приведенныхъ на стр. 168 кинематической части. Центръ земли предполагается неподвижнымъ.*

Если эта матерьяльная точка будетъ неизмѣнно связана съ землею, то она, находясь подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земли O (черт. 73 кинематической части), будетъ имѣть скорость $b\omega$, перпендикулярную къ радіусу $\overline{OB}$ и направленную къ востоку; эту же самую скорость будетъ имѣть матерьяльная точка въ тотъ моментъ, когда она будетъ пущена свободно, то есть, когда связь, прикрѣпляющая ее къ землѣ, будетъ уничтожена.

Проведемъ изъ центра земли неподвижную ось OY черезъ то положеніе B матерьяльной точки, которое она занимаетъ въ пространствѣ въ моментъ освобожденія ея отъ связи съ землею; ось OX проведемъ въ плоскости экватора параллельно направленію скорости $b\omega$; подъ ω мы подразумѣваемъ угловую скорость суточнаго вращенія земли, а подъ b — среднюю величину земнаго радіуса, предполагая, что свободно пущенная точка находилась близъ поверхности земли; поэтому:

$$\omega = 0{,}0000729\frac{1}{\text{секунд.}},\ b = 6370900 \text{ метр.}$$

Повинуясь притяженію къ центру земли:

$$\varepsilon\frac{mM}{r^2}$$

и имѣя начальную скорость:

$$x'_0 = b\omega,\ y'_0 = 0$$

и начальное положенiе:

$$x_0=0,\ y_0=b,$$

матерьяльная точка начнетъ совершать движенiе, разсмотрѣнное нами въ § 27 настоящей главы; нетрудно убѣдиться, что въ настоящемъ случаѣ движенiе будетъ совершаться по эллипсу; въ самомъ дѣлѣ:

$$2h=b^2\omega^2-\frac{2\varepsilon \dot{M}}{b};$$

изъ формулы же (205 bis) задачи 2-й слѣдуетъ:

$$\varepsilon M=gb^2,$$

поэтому:

$$2h=-b\,(2g-b\omega^2);$$

а такъ какъ:

$$2g=1{,}96\,\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},\ b\omega^2=0{,}03385\,\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},$$

то $2h$ менѣе нуля, слѣдовательно, траэкторiя эллиптическая.

Элементы этой орбиты слѣдующiе:

$$I=\pi,\ a=-\frac{\varepsilon M}{2h}=\frac{b}{2-\dfrac{b\omega^2}{g}}=\frac{b}{1+e},$$

$$e=1-\frac{b\omega^2}{g},\quad \tau\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}}=-\pi;$$

кромѣ того, означая черезъ θ уголъ, составляемый радiусомъ векторомъ съ положительною осью X въ и отсчитываемый отъ этой оси въ сторону положительной оси $У$, будемъ имѣть:

$$\theta=\frac{3\pi}{2}-\psi,$$

гдѣ ψ есть уголъ, отсчитываемый отъ направленiя наименьшаго радiуса вектора въ сторону движенiя точки.

Перигелiй орбиты находится на отрицательной сторонѣ оси $У$ и уголъ θ съ теченiемъ времени уменьшается.

Движенiе пущенной точки выражается слѣдующими формулами:

$$x=r\cos\theta=-r\sin\psi;\ \ y=r\sin\theta=-r\cos\psi$$

III-29.

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},\quad f-\pi-e\sin f=t\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}},$$

$$r=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\psi}=a(1-e\cos f);$$

поэтому:

$$x=-a\sqrt{1-e^2}\sin f,\quad y=a(e-\cos f)\ldots\ldots (213)$$

Для того, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ t, составимъ сначала подобное разложеніе для f.

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f-\pi-e\sin f=nt,\quad n=\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}};$$

получимъ:

$$f'(1-e\cos f)=n;$$

повторяя то же дѣйствіе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая далѣе, будемъ получать равенства:

$$0=f''(1-e\cos f)+e(f')^2\sin f$$

$$0=f'''(1-e\cos f)+3ef'f''\sin f+e(f')^3\cos f$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

изъ которыхъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0=\frac{n}{1+e},\quad f_0''=0,\ f_0'''=\frac{en^3}{(1+e)^4},$$

$$f_0^{(4)}=0,\quad f_0^{(5)}=\frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^7},\ldots\ldots$$

для момента $t=0$.

Подставляя эти величины въ Тайлоровъ рядъ:

$$f=f_0+f_0't+f_0''\frac{t^2}{1.2}+\ldots\ldots;$$

получимъ:

$$f=\pi+\frac{nt}{1+e}+\frac{n^3t^3}{(1+e)^4}\frac{e}{1.2.3}+\frac{n^5t^5}{(1+e)^7}\frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5}+\dots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f'}=1+e-\frac{n^2t^2}{(1+e)^3}\frac{e}{1.2}-\frac{n^4t^4}{(1+e)^5}\frac{e(3e-1)}{1.2.3.4}-\dots$$

Отсюда легко получатся ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f=\frac{f-\pi-nt}{e};\quad \cos f=\frac{1}{e}\left(1-\frac{n}{f'}\right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученныя выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^2}{(1+e)^3}=\frac{\varepsilon M}{a^3(1+e)^3}=\frac{g}{b}.$$

$$an\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=a\sqrt{\frac{gb^3}{a^3}}\sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}}=b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x=b\omega t\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(8-9\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4.5}-\dots\right)$$

$$y=b\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(2-3\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4}-\dots\right)$$

Отношеніе $g:b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b}=0{,}00000153\,\frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. *Рѣшить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:*

$$F=\frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

III-29.

a) Когда 2 h болѣе нуля.

Радіусъ векторъ измѣняется съ теченіемъ времени по слѣдующему закону:

$$r\sqrt{2h}=\sqrt{(2ht+\Gamma_1)^2+C^2-\mu},$$

гдѣ:

$$C=\pm v_0 r_0 \sin(v_0 r_0),\quad 2h=v_0^2-\frac{\mu}{r_0^2},\quad \Gamma_1=v_0 r_0 \cos(v_0 r_0).$$

Уравненіе траэкторіи:

1) Если $C^2-\mu$ болѣе нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}}=\frac{\lambda}{\sin\lambda(\theta+\Gamma_2)},\quad \lambda^2=1-\frac{\mu}{C^2};$$

2) если $C^2=\mu$:

$$r(\theta+\Gamma_2)=\frac{C}{\sqrt{2h}};$$

3) если $C^2-\mu$ менѣе нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}}=\frac{2\varkappa}{e^{\varkappa\varphi}-e^{-\varkappa\varphi}},$$

$$\varkappa^2=\frac{\mu}{C^2}-1,\quad \varphi=\theta+\Gamma_2.$$

b) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ равно нулю:

$$v^2=\frac{\mu}{r^2},\quad r^2=r_0^2+2t\sqrt{\mu-C^2}$$

Траэкторія:

$$r=\Gamma e^{\varkappa\theta},\quad \varkappa^2=\frac{\mu}{C^2}-1.$$

c) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ менѣе нуля:

$$r\sqrt{-2h}=\sqrt{\mu-C^2-(\Gamma_1+2ht)^2}.$$

Уравненіе траэкторіи:

$$r\sqrt{\frac{-2h}{C^2}}=\frac{2\varkappa}{e^{\varkappa\varphi}+e^{-\varkappa\varphi}}.$$

10. Такимъ же образомъ могутъ быть разсмотрѣны *всѣ случаи*

движенія матерьяльной точки подъ вліяніемъ слѣдующей силы притяженія къ началу координатъ:

$$F=m\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right).$$

Напримѣръ, уравненіе траэкторіи при $2h$ большемъ нуля и при $(\nu-C^2)$ меньшемъ нуля — слѣдующее:

$$r=\frac{p}{1-e\sin\varkappa(\theta+\Gamma)},$$

гдѣ:

$$p=\frac{C^2\varkappa^2}{\mu},\quad e=\sqrt{1+\frac{C^2\varkappa^2}{\mu^2}2h},\quad \varkappa^2C^2=C^2-\nu.$$

11. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки, къ которой приложена сила*

$$F=m\left(\mu^2r-\frac{\lambda^2}{r^3}\right),$$

состоящая изъ притяженія къ началу координатъ, пропорціональнаго разстоянію отъ него, и изъ отталкивательной силы отъ той же точки, обратно пропорціональной кубу разстоянія.

Если $h^2-\mu^2(\lambda^2+C^2)$ болѣе нуля, то уравненіе траэкторіи:

$$r^2=\frac{q}{1+e\cos 2\varkappa(\theta+\Gamma_1)},$$

$$q=\frac{C^2+\lambda^2}{h},\quad \varkappa^2=1+\frac{\lambda^2}{C^2},\quad e=\sqrt{1-\frac{\mu^2\varkappa^2C^2}{h^2}};$$

законъ измѣненія аргумента θ — слѣдующій:

$$\operatorname{tg}\varkappa(\theta+\Gamma_1)=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\mu(\Gamma_2+t).$$

12. *Движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе, выражающееся такъ:*

$$mg(k+\mu v^n);$$

сопротивленіе это направлено противоположно скорости.

Приводимъ здѣсь то рѣшеніе этой задачи, которое далъ Якоби *).

---

*) Journal Crelle. B. XXIV.

III-29.

Движеніе матерьяльной точки совершается, конечно, въ той вертикальной плоскости, въ которой заключается начальная скорость; эту плоскость примемъ за плоскость XY, начальное положеніе движущейся точки примемъ за начало координатъ, ось Y направимъ параллельно ускоренію силы тяжести.

Въ этой задачѣ возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія вида (39); означивъ черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ скорости съ осью X, будемъ имѣть, по сокращеніи на m:

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\varphi-gk-g\mu v^n \qquad (214)$$

$$\frac{v^2}{\rho}=\mp g\cos\varphi, \qquad (215)$$

гдѣ ρ означаетъ величину радіуса кривизны:

$$\rho=\mp\frac{ds}{d\varphi}=\mp\frac{vdt}{d\varphi} \qquad (216)$$

(Знаки $\mp$ въ обоихъ равенствахъ (215) и (216) должны быть одинаковые).

Изъ равенствъ (215) и (216) слѣдуетъ:

$$dt=\frac{vd\varphi}{g\cos\varphi}; \qquad (217)$$

исключивъ затѣмъ изъ уравненій (214) и (217) дифференціалъ dt, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dv}{vd\varphi}=\operatorname{tg}\varphi-\frac{k}{\cos\varphi}-\frac{\mu}{\cos\varphi}v^n,$$

которое можетъ быть обращено въ обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, если сдѣлаемъ слѣдующую подстановку:

$$\frac{1}{v^n}=z;$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dz}{d\varphi}=-n\left(\operatorname{tg}\varphi-\frac{k}{\cos\varphi}\right)z+\frac{n\mu}{\cos\varphi}.$$

Интегрируя это линейное дифференціальное уравненіе по извѣстному правилу, мы получимъ слѣдующій результатъ:

$$z = \frac{\cos^n \varphi}{\operatorname{tg}^{kn}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\varphi}\right)} \left(C^n + \mu n \int \operatorname{tg}^{kn}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{d\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \right);$$

откуда получимъ выраженіе скорости v въ функціи угла φ:

$$v = \frac{\eta^{k-1}(1+\eta^2)}{2\left(C^n - \frac{\mu n}{2^n} \int \eta^{nk-n-1}(1+\eta^2)^n d\eta\right)^{\frac{1}{n}}}, \quad \ldots . \; (218)$$

гдѣ:

$$\eta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Подставивъ въ уравненіе (217):

$$dt = -\frac{v d\eta}{g\eta} \; \ldots\ldots\ldots\ldots . \; (217 \text{ bis})$$

вмѣсто v вторую часть равенства (218) и интегрируя полученное дифференціальное уравненіе, получимъ зависимость между угломъ φ и временемъ.

Координаты x и y могутъ быть выражены въ функціяхъ угла φ; для этого надо взять равенства:

$$dx = v \cos\varphi \, dt, \quad dy = v \sin\varphi \, dt,$$

выразить въ нихъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ функціями отъ η, а dt исключить при помощи формулы (217 bis):

$$dx = -\frac{2v^2 d\eta}{g(1+\eta^2)}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots . \; (219)$$

$$dy = -\frac{v^2(1-\eta^2)\,d\eta}{g(1+\eta^2)\eta}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots . \; (220)$$

затѣмъ замѣнить v второю частью равенства (218) и полученныя дифференціальныя уравненія интегрировать.

13. *Опредѣлить движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе постоянной величины kmg.*

Рѣшеніе заключается въ формулахъ предыдущей задачи, если въ нихъ сдѣлать μ равнымъ нулю и произвести указанныя интегрированія.

III-29.

Получимъ:

$$v=\frac{\eta^{k-1}(1+\eta^2)}{2C},$$

$$t+\Gamma_1=-\frac{1}{2gC}\left(\frac{\eta^{k-1}}{k-1}+\frac{\eta^{k+1}}{k+1}\right),$$

$$x+\Gamma_2=-\frac{1}{2gC^2}\left(\frac{\eta^{2k-1}}{2k-1}+\frac{\eta^{2k+1}}{2k+1}\right),$$

$$y+\Gamma_3=-\frac{1}{4gC^2}\left(\frac{\eta^{2k-2}}{2k-2}-\frac{\eta^{2k+2}}{2k+2}\right);\ \eta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Разсматривая эти уравненія, можно убѣдиться, что при $k>1$ скорость движущейся точки обращается въ нуль въ той точкѣ траэкторіи, въ которой уголъ φ дѣлается равнымъ $\frac{\pi}{2}$; координаты этой точки суть: $-\Gamma_2$ и $-\Gamma_3$ и движущаяся точка приходитъ туда въ моментъ $(-\Gamma_1)$.

Если $k<1$, но не менѣе $\frac{1}{2}$, то скорость не обращается въ нуль и движущаяся точка направляется въ безконечность, приближаясь, ассимптотически, къ вертикальной линіи: $x=-\Gamma_2$.

Если $k<\frac{1}{2}$, то движущаяся точка направляется въ безконечность, причемъ траэкторія, подобно параболѣ, не имѣетъ ассимптоты.

14. ***Движеніе матерьяльной тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой движенію пропорціонально квадрату скорости.***

Рѣшеніе получается изъ формулъ задачи 12-й, если сдѣлать въ нихъ k равнымъ нулю и n равнымъ двумъ; такъ, формула (218) даетъ слѣдующее выраженіе скорости въ функціи угла φ:

$$\frac{1}{v\cos\varphi}=\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\mu\left(\log\eta-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\right)}\ \ldots\ldots\ldots (221)$$

$$\eta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

(гдѣ v_1 есть скорость въ наивысшей точкѣ траэкторіи).

Кромѣ того можно найти въ этомъ случаѣ другой первый интегралъ, выражающій проэкцію скорости на ось X въ функціи длины дуги траэкторіи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\varphi-g\mu v^2,\ \ v^2=g\frac{ds}{d\varphi}\cos\varphi$$

составимъ уравненіе:

$$\frac{dv}{vd\varphi}\cos\varphi=\sin\varphi-g\mu\cos\varphi\,\frac{ds}{d\varphi},$$

дающее интегралъ:

$$v\cos\varphi=v_1e^{-g\mu s};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(222)$$

гдѣ s есть длина дуги траэкторіи, считаемая отъ самой высшей точки ея въ сторону движенія.

Исключивъ скорость v изъ интеграловъ (221) и (222), получимъ слѣдующую зависимость между длиною дуги s и угломъ φ (или величиною η):

$$\frac{1}{\mu v_1^2}\left(1-e^{2g\mu s}\right)=\log\eta-\frac{1-\eta^4}{4\eta^2}.\ldots\ldots\ldots(223)$$

Эта зависимость показываетъ, что, на сторонѣ положительныхъ дугъ s, касательная къ траэкторіи приближается къ параллельности съ осью Yовъ (потому что при $s=\infty$ величина η должна обратиться въ нуль, а слѣдовательно φ обращается тогда въ $\frac{\pi}{2}$); на сторонѣ отрицательныхъ дугъ s касательная къ траэкторіи приближается къ параллельности съ направленіемъ, составляющимъ съ осью X такой уголъ φ_1, который удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{1}{\mu v_1^2}=\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\cos\varphi_1}.$$

Чтобы рѣшить вопросъ вполнѣ, надо еще интегрировать уравненія (217 bis), (219) и (220).

15. ***Составить уравненіе траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою, притягиваемою къ началу координатъ слѣдующею силою:***

$$F=m\mu\frac{v^2}{r}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x''=-\mu\frac{v^2}{r^2}x,\quad y''=-\mu\frac{v^2}{r^2}y.$$

Такъ какъ сила направлена къ началу координатъ, то законъ площадей имѣетъ мѣсто; поэтому одинъ изъ первыхъ интеграловъ будетъ:

$$r^2\theta'=C_1.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(224)$$

III-29.

Другой первый интегралъ найдемъ, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x'x''+y'y''=-\mu\frac{v^2}{r^2}(xx'+yy');$$

получимъ:

$$v^2=\frac{C^2}{r^{2\mu}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(225)$$

Изъ уравненій (224) и (225) составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 r^{2\mu-4}+r^{2\mu-2}=\frac{C_2}{C_1^2},$$

интегрируя которое, получимъ уравненіе траэкторіи:

$$r^{\mu-1}=\frac{\sqrt{C_2}}{C_1}\sin\left[(\mu-1)(\theta+\Gamma_1)\right].$$

16. ***На матерьяльную точку дѣйствуетъ сила:***

$$F=m\mu\frac{v^2}{r},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ; составить уравненіе траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$x''=-\mu\frac{v^2}{r^2}y,\quad y''=\mu\frac{v^2}{r^2}x.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{x'x''+y'y''}{(x')^2+(y')^2}=\mu\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2};$$

интегрируя его, получимъ:

$$\log v^2=C_1+2\mu\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

или:

$$v^2=v_0{}^2e^{2\mu(\theta-\theta_0)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(226)$$

Другой интегралъ и уравненіе траэкторіи получатся при помощи пріема, указаннаго А. Н. Коркинымъ и приведеннаго здѣсь въ пунктѣ 3-мъ пара-

графа 28; примѣнить этотъ пріемъ здѣсь возможно потому, что сила удовлетворяетъ условію (193):

$$x'Y - y'X = (x')^3 f\left(x,\ y,\frac{y'}{x'}\right); \ldots\ldots\ldots (193)$$

а именно, въ этой задачѣ:

$$f\left(x,\ y,\frac{y'}{x'}\right) = m\mu \frac{\left(x + y\frac{y'}{x'}\right)\left(1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)}{x^2+y^2}.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right);$$

первый интегралъ его будетъ слѣдующій:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{dy}{dx} = \log C_2(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

или:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\log C_2 r^{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots (227)$$

Выразимъ производную отъ y по x въ полярныхъ координатахъ; тогда уравненіе (227) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dr}{rd\theta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta - \log C_2 r^{\mu})},$$

или:

$$\frac{\sin z\, dz}{\sin z + \mu\cos z} = d\theta,\ \ z = \theta - \log C_2 r^{\mu};$$

интегрируя это уравненіе, получимъ уравненіе траэкторіи:

$$C_2^{\frac{1}{\mu}} r\sin(\theta + \operatorname{arc\,tg}\mu - \log C_2 r^{\mu}) = \Gamma_1 e^{-\mu\theta} \ldots\ldots (228)$$

17. ***Къ матерьяльной точкѣ приложено двѣ силы: одна перпендикулярна къ радіусу вектору, равна:***

$$\frac{\mu m}{r}$$

III-29.

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},\quad f-\pi-e\sin f=t\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}},$$

$$r=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\psi}=a(1-e\cos f);$$

поэтому:

$$x=-a\sqrt{1-e^2}\sin f,\quad y=a(e-\cos f)\ldots\ldots (213)$$

Для того, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ t, составимъ сначала подобное разложеніе для f.

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f-\pi-e\sin f=nt,\quad n=\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}};$$

получимъ:

$$f'(1-e\cos f)=n;$$

повторяя то же дѣйствіе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая далѣе, будемъ получать равенства:

$$0=f''(1-e\cos f)+e(f')^2\sin f$$

$$0=f'''(1-e\cos f)+3ef'f''\sin f+e(f')^3\cos f$$

. . . .

. . . . ,

изъ которыхъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0=\frac{n}{1+e},\quad f''_0=0,\ f'''_0=\frac{en^3}{(1+e)^4},$$

$$f_0^{(4)}=0,\quad f_0^{(5)}=\frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^7},\ldots\ldots$$

для момента $t=0$.

Подставляя эти величины въ Тайлоровъ рядъ:

$$f=f_0+f_0'\,t+f_0''\frac{t^2}{1.2}+\ldots\ldots;$$

получимъ:

$$f=\pi+\frac{nt}{1+e}+\frac{n^3t^3}{(1+e)^4}\frac{e}{1.2.3}+\frac{n^5t^5}{(1+e)^7}\frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f'}=1+e-\frac{n^2t^2}{(1+e)^2}\frac{e}{1.2}-\frac{n^4t^4}{(1+e)^5}\frac{e(3e-1)}{1.2.3.4}-\ldots.$$

Отсюда легко получатся ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f=\frac{f-\pi-nt}{e};\quad \cos f=\frac{1}{e}\left(1-\frac{n}{f'}\right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученныя выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^2}{(1+e)^3}=\frac{\varepsilon M}{a^3(1+e)^3}=\frac{g}{b},$$

$$an\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=a\sqrt{\frac{gb^2}{a^3}}\sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}}=b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x=b\omega t\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(8-9\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\right)$$

$$y=b\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(2-3\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)$$

Отношеніе $g:b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b}=0{,}00000153\,\frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. *Рѣшить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:*

$$F=\frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

III-29.

и стремится увеличить уголъ θ, другая сила направлена къ началу координатъ, равна:

$$mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

опредѣлить движенiе.

Въ этомъ случаѣ одинъ изъ первыхъ интеграловъ имѣетъ видъ (188) (см. пунктъ 1-й параграфа 28):

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\mu t+C_1 \dots\dots\dots\dots\dots \mathbf{(229)}$$

Задача рѣшается вполнѣ и уравненiе траэкторiи получается слѣдующаго вида:

$$\log r+\frac{p}{r}=\frac{(r'_0)^2}{\mu}(\theta+\gamma), \dots\dots\dots \mathbf{(230)}$$

гдѣ p и γ суть постоянныя величины.

18. *Къ матерьяльной точкѣ приложена сила:*

$$F_1=m\mu\frac{f(\theta)}{r^3},$$

перпендикулярная къ радiусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ, и другая сила:

$$F_2=mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

направленная къ началу координатъ; опредѣлить движенiе.

Здѣсь получается интегралъ вида (190) (см. пунктъ 2-й параграфа 28):

$$r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C_1+2\mu\phi(\theta), \dots\dots\dots \mathbf{(231)}$$

$$\phi(\theta)=\int f(\theta)\,d\theta.$$

Задача рѣшается вполнѣ и получается слѣдующее уравненiе траэкторiи:

$$\frac{1}{C_2 r}=\Gamma_2-\int\frac{d\theta}{\sqrt{C_1+2\mu\phi(\theta)}} \dots\dots\dots \mathbf{(232)}$$

§ 30. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движенiе матерьяльной точки по отношенiю къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей данное движенiе; даны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ.

Такiя задачи можно рѣшать двоякимъ путемъ:

1) Можно опредѣлить абсолютное движенiе матерьяльной точки, а затѣмъ перейти къ относительному движенiю ея по отношенiю къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ, какъ указано въ § 42 кинематической части.

2) Можно составить дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя матерьяльной точки по отношенiю къ данной неизмѣняемой средѣ; интегрируя эти дифференцiальныя уравненiя, получимъ рѣшенiе задачи.

Обратимъ вниманiе на рѣшенiе такихъ задачъ вторымъ путемъ.

Дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя матерьяльной точки по отношенiю къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ получатся изъ равенствъ (347) кинематической части, — стоитъ лишь помножить эти равенства на m и замѣнить произведенiя:

$$m\dot{v}\cos(\dot{v}\Xi),\quad m\dot{v}\cos(\dot{v}\Upsilon),\quad m\dot{v}\cos(\dot{v}\mathbf{Z})$$

проэкцiями на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ; величины этихъ проэкцiй мы будемъ обозначать буквами: Ξ, $\ddot{\Upsilon}$, $\mathbf{Z}$.

Слѣдовательно, общiй видъ дифференцiальныхъ уравненiй относительнаго движенiя матерьяльной точки, подверженной даннымъ силамъ, по отношенiю къ неизмѣняемой средѣ движущейся даннымъ образомъ, будетъ таковъ:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Xi-m\dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\Xi)-m\zeta\frac{dq}{dt}+m\eta\frac{dr}{dt}-$$

$$-mp(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\xi\Omega^2-2m\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right),\ldots\ (\mathbf{233},\text{ a})$$

III-30.

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Upsilon-mw_{\text{ю}}\cos(\dot{w}_{\text{ю}}\Upsilon)-m\xi\frac{dr}{dt}+m\zeta\frac{dp}{dt}-$$

$$-mq(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\eta\Omega^2-2m\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right), \ldots \textbf{(233, b)}$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\mathbf{Z}-mw_{\text{ю}}\cos(\dot{w}_{\text{ю}}\mathbf{Z})-m\eta\frac{dp}{dt}+m\xi\frac{dq}{dt}-$$

$$-mr(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\zeta\Omega^2-2m\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots \textbf{(233, c)}$$

Для примѣра рѣшенія задачъ вторымъ путемъ возьмемъ слѣдующій вопросъ.

Примѣръ 20-й. Къ матерьяльной точкѣ приложена сила, направленная къ началу координатъ или по продолженію радіуса вектора; проэкція этой силы на ось α (продолженіе радіуса вектора) выражается слѣдующею функціею отъ r:

$$F=m\left(\mu r+\frac{\lambda}{r^3}\right),$$

гдѣ μ и λ суть двѣ постоянныя величины. Начальная скорость матерьяльной точки направлена въ плоскости XY; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, вращающейся съ постоянною угловою скоростью ω вокругъ положительной оси Z.

Предположимъ, что ось $\mathbf{Z}$ совпадаетъ съ осью Z, точка $Ю$ — съ началомъ координатъ, тогда дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки по отношенію къ плоскости $\Xi\,\Upsilon$ будутъ:

$$\xi''=\mu\xi+\frac{\lambda}{r^4}\xi+\omega^2\xi+2\omega\eta'$$

$$\eta''=\mu\eta+\frac{\lambda}{r^4}\eta+\omega^2\eta-2\omega\xi'.$$

Изъ нихъ составимъ дифференціальныя уравненія:

$$\xi\eta''-\eta\xi''=-2\omega(\xi\xi'+\eta\eta'),$$

$$\xi'\xi''+\eta'\eta''=\left((\mu+\omega^2)+\frac{\lambda}{r^4}\right)(\xi\xi'+\eta\eta'),$$

первые интегралы которыхъ суть:

$$\xi\eta' - \eta\xi' = D_1 - \omega r^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (234)$$

$$(\xi')^2 + (\eta')^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \ldots\ldots (235)$$

или:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = D_1 - \omega r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (234 \text{ bis})$$

$$u^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \ldots\ldots\ldots (235 \text{ bis})$$

гдѣ D_1 и H суть произвольныя постоянныя, u — скорость относительнаго движенія точки; φ — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ положительною осью Ξ.

Во второмъ интегралѣ замѣнимъ u^2 суммою:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

Поступая затѣмъ такъ, какъ въ задачахъ 9, 10 и 11-й предыдущаго параграфа, получимъ слѣдующіе вторые интегралы:

$$\int\frac{dr}{R} = t + \Delta_1; \ldots\ldots\ldots\ldots (236)$$

$$\int\left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right)\frac{dr}{R} = \varphi + \Delta_2; \ldots\ldots\ldots (237)$$

здѣсь:

$$R = \sqrt{\mu r^2 + 2(H + \omega D_1) - \frac{(\lambda + D_1^2)}{r^2}}.$$

Тѣ же самые результаты получатся и при рѣшеніи задачи первымъ путемъ; въ самомъ дѣлѣ, первые интегралы абсолютнаго движенія точки суть:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C_1, \quad v^2 = \mu r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2h;$$

III-30.

а вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R_1} = t + \Gamma_1, \quad \int \frac{C_1}{r^2}\frac{dr}{R_1} = \theta + \Gamma_2,$$

гдѣ:

$$R_1 = \sqrt{\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + C_1^2}{r^2}};$$

но такъ какъ:

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad v^2 = u^2 + 2r^2\varphi'\omega + \omega^2 r^2,$$

то окажется, что:

$$D_1 = C_1, \quad 2h = 2D_1\omega + 2H, \quad R_1 = R,$$

$$\Delta_1 = \Gamma_1, \quad \Delta_2 = \Gamma_2 - \omega\Gamma_1.$$

Произведя въ дѣйствительности интегрированіе, означенное въ формулѣ (237), мы получимъ уравненіе траэкторіи относительнаго движенія; видъ этой кривой можетъ быть весьма разнообразенъ въ зависимости отъ знаковъ постоянныхъ μ и λ и отъ величинъ произвольныхъ постоянныхъ D_1 и h. Обратимъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ эта кривая получаетъ видъ логариѳмической спирали.

Уравненіе (237) получитъ видъ:

$$\log r = n(\varphi + \Delta_2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237 \text{ bis})$$

гдѣ n — постоянная величина, если при всякомъ r имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + D_1^2}{r^2} = n^2 r^2 \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right)^2;$$

что можетъ быть только при слѣдующихъ условіяхъ:

$$\mu = n^2\omega^2, \quad \lambda + D_1^2 = -n^2 D_1^2, \quad 2h = -2n^2 D_1\omega;$$

то есть:

$$\mu = n^2\omega^2, \quad \lambda = -(n^2+1)D_1^2, \quad H = -(1+n^2)D_1\omega;$$

первыя два условія показываютъ, что относительное движеніе по логариѳмической спирали возможно тогда, когда сила пропорціональная разстоянію r есть отталкиваніе отъ начала координатъ, а сила обратно-пропорціональная кубу r есть притяженіе къ той же точкѣ.

Возьмемъ теперь другой примѣръ, болѣе сложный.

Примѣръ 21-й. Опредѣлить относительное движеніе (по отношенію къ землѣ) матерьяльной тяжелой точки, брошенной въ данномъ мѣстѣ земной поверхности по какому нибудь направленію и съ какою бы то ни было скоростью; принять во вниманіе суточное вращательное движеніе земли вокругъ ея оси и годовое движеніе центра ея вокругъ солнца. см. стр. 255 примѣръ 41.

Примемъ за точку $Ю$ (черт. 16) ту точку земной поверхности, изъ которой брошена матерьяльная точка; положительную ось $\mathbf{Z}$ проведемъ по продолженію земнаго радіуса R (проведеннаго изъ центра земли C въ точку $Ю$); ось Ξ проведемъ по пересѣченію плоскости горизонта точки $Ю$ съ плоскостью меридіана этой точки и положительную часть этой оси направимъ къ югу; ось Υ будетъ касательною къ параллели точки $Ю$ и положительная часть ея будетъ направлена къ западу горизонта точки $Ю$.

Угловая скорость ω земли направлена параллельно радіусу, идущему изъ центра C земли къ южному полюсу ея S; если провести угловую скорость черезъ точку $Ю$, то окажется, что она будетъ заключаться въ плоскости $\mathbf{Z}\,\Xi$ и будетъ составлять съ положительною осью Ξ уголъ λ, а съ положительною осью $\mathbf{Z}$ уголъ $\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)$, гдѣ λ есть сѣверная широта точки $Ю$; поэтому проэкціи угловой скорости на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ имѣютъ слѣдующія величины:

$$p=\omega\cos\lambda,\ q=0,\ r=-\omega\sin\lambda;$$

величина же угловой скорости вращенія земли равна:

$$\omega=0{,}0000729\frac{1}{(\text{секунда})}.$$

Скорость центра C земли направлена по правую руку наблю-

дателя, стоящаго ногами въ C, головою по направленію къ сѣверному полюсу N земли, и смотрящаго на солнце; ускореніе точки C направлено къ солнцу и равно:

$$\frac{\varepsilon \mathfrak{M}}{\rho^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (238)$$

гдѣ $\mathfrak{M}$ есть масса солнца, а ρ — радіусъ векторъ, проведенный изъ центра солнца къ центру земли.

Скорость точки $Ю$ неизмѣняемой среды, неизмѣнно связанной съ землею, есть геометрическая сумма изъ скорости точки C и изъ вращательной скорости точки $Ю$ вокругъ мгновенной оси, проведенной черезъ точку C.

Ускореніе точки $Ю$ есть геометрическая сумма, составленная изъ ускоренія точки C (направленнаго къ солнцу, т.-е. противоположно направленію радіуса вектора ρ) и изъ центро-стремительнаго ускоренія точки $Ю$, направленнаго по $ЮC_1$ къ центру C_1 (черт. 16 и 17) параллели точки $Ю$ и равнаго $\omega^2 R\cos\lambda$; поэтому проэкціи на оси координатъ Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ ускоренія $\dot{w}_ю$ точки $Ю$ неизмѣняемой среды равны:

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}\Xi) = -\frac{\varepsilon \mathfrak{M}}{\rho^2}\cos(\rho\Xi) - \omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$$

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}\Upsilon) = -\frac{\varepsilon \mathfrak{M}}{\rho^2}\cos(\rho\Upsilon)$$

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}\mathbf{Z}) = -\frac{\varepsilon \mathfrak{M}}{\rho^2}\cos(\rho\mathbf{Z}) - \omega^2 R\cos^2\lambda.$$

Скорость $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$, съ которою брошена матерьяльная точка m, есть скорость относительная по отношенію къ средѣ; абсолютная же начальная скорость точки m есть геометрическая сумма изъ вышесказанной начальной скорости u_0 $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ и изъ скорости точки $Ю$.

Абсолютное ускореніе матерьяльной точки сообщается ей равнодѣйствующею изъ силы притяженія ея къ центру земли:

$$\frac{\varepsilon M m}{(\xi^2+\eta^2+(R+\zeta)^2)}$$

(гдѣ M — масса земли) и изъ силы притяженія ея къ центру солнца,

$$\frac{\varepsilon \mathfrak{M} m}{\rho_1^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (239)$$

Гдѣ ρ_1 есть длина радіуса вектора, проведеннаго изъ центра солнца къ положенію, занимаемому точкою m.

На основаніи всего сказаннаго, уравненія (233) въ настоящемъ случаѣ будутъ имѣть, по сокращеніи на m, слѣдующій видъ:

$$\xi'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3}\xi + S_1 + (\omega^2\chi - 2\eta'\omega)\sin\lambda \dots\dots (240, a)$$

$$\eta'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3}\eta + S_2 + \omega^2\eta + 2\chi'\omega \dots\dots\dots (240, b)$$

$$\zeta'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3}(\zeta + R) + S_3 + (\omega^2\chi - 2\eta'\omega)\cos\lambda; \dots (240, c)$$

здѣсь введены слѣдующія обозначенія:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + R)^2, \quad \chi = \xi\sin\lambda + (\zeta + R)\cos\lambda$$

$$S_1 = \varepsilon \mathfrak{M}\left(\frac{\cos(\rho\Xi)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1\Xi)}{\rho_1^2}\right),$$

$$S_2 = \varepsilon \mathfrak{M}\left(\frac{\cos(\rho\Upsilon)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1\Upsilon)}{\rho_1^2}\right),$$

$$S_3 = \varepsilon \mathfrak{M}\left(\frac{\cos(\rho\mathbf{Z})}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1\mathbf{Z})}{\rho_1^2}\right).$$

Начальное положеніе матерьяльной точки предполагается въ точкѣ $Ю$, поэтому:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Члены S_1, S_2, S_3 суть проэкціи на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ геометрической разности между ускореніями, сообщаемыми притяженіемъ солнца матерьяльной точкѣ и центру земли; эти разности представляютъ собою

ускоренія весьма малыя сравнительно съ ускореніемъ силы тяжести, въ чемъ можемъ убѣдиться на основаніи слѣдующаго разсчета.

Положимъ, что матерьяльная точка находится близъ той части поверхности земли, которая обращена къ солнцу, и что солнце находится въ зенитѣ, такъ что центръ земли, матерьяльная точка и центръ солнца находятся на одной прямой линіи; тогда члены S будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$S_1=0,\ S_2=0,\ S_3=\varepsilon \mathfrak{M}\left(\frac{1}{(\rho-R)^2}-\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Выразивъ ε въ ускореніи силы тяжести на поверхности земли (формула 205 bis) и разложивъ первую дробь, заключающуюся въ большихъ скобкахъ выраженія S_3, въ рядъ, получимъ:

$$S_3=2g\frac{\mathfrak{M}}{M}\left(\left(\frac{R}{\rho}\right)^3+\ldots\ldots\right).$$

Извѣстно, что масса солнца въ 354020 разъ болѣе массы земли, что среднiй радіусъ земли равенъ 859,5 географическимъ милямъ и что среднее разстояніе отъ земли до солнца равно 20680000 географическихъ миль: подставивъ эти цифры въ выраженіе S_3, получимъ:

$$S_3=g\,.\,0{,}000000051=0{,}00000049\,\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2}.$$

Слѣдовательно, S_3 составляетъ половину десятимилліонной доли ускоренія силы тяжести; если матерьяльная точка будетъ свободно падать впродолженіи 100 секундъ, то вслѣдствіе ускоренія g она упадетъ на глубину 49000 метровъ, ускореніе же S_3 уменьшитъ этотъ путь на 2,45 миллиметра, то есть на пять стомилліонныхъ долей всего пути.

Если же точка будетъ брошена снизу вверхъ со скоростью 980 метровъ въ секунду, то она вернется назадъ по истеченіи 200 секундъ, ускореніе же S_3 замедлитъ возвращеніе ея на милліонную долю секунды.

При тѣхъ средствахъ наблюденій, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной милліонной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаемому тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3.

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ:

$$\xi=(x\cos\omega t-y\sin\omega t)\sin\lambda-z\cos\lambda$$

$$\eta=x\sin\omega t+y\cos\omega t$$

$$\zeta+R=(x\cos\omega t-y\sin\omega t)\cos\lambda+z\sin\lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x''=-g\frac{R^2}{\rho^3}x,\ \ y''=-g\frac{R^2}{\rho^3}y,\ \ z''=-g\frac{R^2}{\rho^3}z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матерьяльной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ, которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Примѣняя здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

ξ, η, ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t:

$$\xi=\xi_0{}'t+\xi_0{}''\frac{t^2}{2}+\xi_0{}'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, a)$$

$$\eta=\eta_0{}'t+\eta_0{}''\frac{t^2}{2}+\eta_0{}'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, b)$$

$$\zeta=\zeta_0{}'t+\zeta_0{}''\frac{t^2}{2}+\zeta_0{}'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, c)$$

Выраженія для $\xi_0{}''$, $\eta_0{}''$, $\zeta_0{}''$ получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0{}''=R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda-2\eta_0{}'\omega\sin\lambda$$

$$\eta_0{}''=2\chi_0{}'\omega$$

$$\zeta_0{}''=-g+R\omega^2\cos^2\lambda-2\eta_0{}'\omega\cos\lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ Ξ и $\mathbf{Z}$ такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой $\xi_0{}''$ не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda,\quad R\omega^2\cos^2\lambda-g;$$

онѣ представляютъ проэкціи на оси Ξ и $\mathbf{Z}$ геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія *ЮК*), направленнаго къ центру C земли, и ускоренія $R\omega^2\cos\lambda$, направленнаго по продолженію радіуса C_1*Ю* параллели точки *Ю*. Величину и направленіе геометрической суммы *ЮГ* этихъ двухъ ускореній *ЮК* и *ЮЦ* мы условимся обозначать буквою G; и такъ:

$$G=\sqrt{g^2-2gR\omega^2\cos^2\lambda+R^2\omega^4\cos^2\lambda},\ \ldots\ldots \quad (242)$$

$$G\cos(G\Xi)=R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda,\quad G\cos(G\mathbf{Z})=-g+R\omega^2\cos^2\lambda \quad (242\ \text{bis})$$

Возьмемъ за ось З (за новую ось $\mathbf{Z}$) направленіе противо-

При тѣхъ средствахъ наблюденій, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной милліонной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаемому тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3.

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ:

$$\xi=(x\cos\omega t-y\sin\omega t)\sin\lambda-z\cos\lambda$$

$$\eta=x\sin\omega t+y\cos\omega t$$

$$\zeta+R=(x\cos\omega t-y\sin\omega t)\cos\lambda+z\sin\lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x''=-g\frac{R^2}{\rho^3}x,\ \ y''=-g\frac{R^2}{\rho^3}y,\ \ z''=-g\frac{R^2}{\rho^3}z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матерьяльной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ, которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Примѣняя здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

III-30.

ξ, η, ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t:

$$\xi=\xi_0't+\xi_0''\frac{t^2}{2}+\xi_0'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, a)$$

$$\eta=\eta_0't+\eta_0''\frac{t^2}{2}+\eta_0'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, b)$$

$$\zeta=\zeta_0't+\zeta_0''\frac{t^2}{2}+\zeta_0'''\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (241, c)$$

Выраженія для ξ_0'', η_0'', ζ_0'' получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0''=R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda-2\eta_0'\omega\sin\lambda$$

$$\eta_0''=2\chi_0'\omega$$

$$\zeta_0''=-g+R\omega^2\cos^2\lambda-2\eta_0'\omega\cos\lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ Ξ и $\mathbf{Z}$ такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой ξ_0'' не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda,\quad R\omega^2\cos^2\lambda-g;$$

онѣ представляютъ проэкціи на оси Ξ и $\mathbf{Z}$ геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія *ЮК*), направленнаго къ центру C земли, и ускоренія $R\omega^2\cos\lambda$, направленнаго по продолженію радіуса C_1*Ю* параллели точки *Ю*. Величину и направленіе геометрической суммы *ЮГ* этихъ двухъ ускореній *ЮК* и *ЮЦ* мы условимся обозначать буквою G; и такъ:

$$G=\sqrt{g^2-2gR\omega^2\cos^2\lambda+R^2\omega^4\cos^2\lambda}, \ldots\ldots \quad (242)$$

$$G\cos(G\Xi)=R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda,\quad G\cos(G\mathbf{Z})=-g+R\omega^2\cos^2\lambda \quad (242\ \text{bis})$$

Возьмемъ за ось З (за новую ось $\mathbf{Z}$) направленіе противо-

положное ускоренію G и за ось $\mathfrak{X}$ (за новую ось Ξ) — направленіе перпендикулярное къ оси $\mathfrak{Z}$ и идущее къ югу отъ точки $Ю$; тогда очевидно проэкція G на ось $\mathfrak{X}$ будетъ нуль.

Назовемъ черезъ Δ уголъ, составляемый осью $\mathfrak{Z}$ съ экваторомъ; очевидно:

$$\Delta = \lambda + (\mathfrak{Z}, \mathbf{Z});$$

координаты точки относительно осей $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$ условимся обозначать буквами $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{z}$.

Координаты центра земли C по отношенію къ новымъ осямъ будутъ слѣдующія:

$$-R\sin\alpha, \quad -R\cos\alpha,$$

гдѣ α есть уголъ, составляемый осями $\mathfrak{Z}$ и $\mathbf{Z}$ между собою.

При осяхъ координатъ $\mathfrak{X}$, Υ, $\mathfrak{Z}$, дифференціальныя уравненія относительнаго движенія тяжелой точки будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{x}'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}(\mathfrak{x} + R\sin\alpha) + (\omega\mathfrak{s} - 2\eta')\,\omega\sin\Delta \;\ldots\ldots\; (\mathbf{243}, \text{a})$$

$$\eta'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}\eta + (\omega\eta + 2\mathfrak{s}')\omega, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\mathbf{243}, \text{b})$$

$$\mathfrak{z}'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}(\mathfrak{z} + R\cos\alpha) + (\omega\mathfrak{s} - 2\eta')\omega\cos\Delta; \;\ldots\ldots\; (\mathbf{243}, \text{c})$$

гдѣ:

$$\rho^2 = (\mathfrak{x} + R\sin\alpha)^2 + \eta^2 + (\mathfrak{z} + R\cos\alpha)^2,$$

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{x} + R\sin\alpha)\sin\Delta + (\mathfrak{z} + R\cos\alpha)\cos\Delta.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_0'' &= -2\eta_0'\omega\sin\Delta \\ \eta_0'' &= +2(\mathfrak{x}_0'\sin\Delta + \mathfrak{z}_0'\cos\Delta)\omega \\ \mathfrak{z}_0'' &= -2\eta_0'\omega\cos\Delta - G \end{aligned}\right\}, \;\ldots\ldots\ldots\; (\mathbf{244})$$

Ш-30.

потому что:

$$\mathfrak{s}_0 = R\cos\lambda,\ \ \mathfrak{s}_0' = \mathfrak{x}_0'\sin\Delta + \mathfrak{z}_0'\cos\Delta,$$

$$-g\sin\alpha + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Delta = G\cos(G\mathfrak{X}) = 0$$

$$-g\cos\alpha + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Delta = G\cos(G\mathfrak{Z}) = -G.$$

Далѣе, составивъ третьи производныя и подставивъ въ ихъ выраженія начальныя координаты и скорости, получимъ:

$$\mathfrak{x}_0''' = -g\frac{\mathfrak{x}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\sin\alpha + (\omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'')\,\omega\sin\Delta$$

$$\eta_0''' = -g\frac{\eta_0'}{R} + (\omega\eta_0' + 2\mathfrak{s}_0'')\,\omega$$

$$\mathfrak{z}_0''' = -g\frac{\mathfrak{z}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\cos\alpha + (\omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'')\,\omega\cos\Delta;$$

сюда надо подставить:

$$\rho_0' = \mathfrak{x}_0'\sin\alpha + \mathfrak{z}_0'\cos\alpha,\ \ \omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'' = -3\mathfrak{s}_0'\omega,$$

$$\omega\eta_0' + 2\mathfrak{s}_0'' = -3\eta_0'\omega - 2G\cos\Delta;$$

тогда окажется, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_0''' &= -3\omega^2\mathfrak{s}_0'\sin\Delta - g\frac{\mathfrak{x}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\sin\alpha \\ \eta_0''' &= -3\omega^2\eta_0' - g\frac{\eta_0'}{R} - 2G\omega\cos\Delta \\ \mathfrak{z}_0''' &= -3\omega^2\mathfrak{s}_0'\cos\Delta - g\frac{\mathfrak{z}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\cos\alpha \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (245)$$

Четвертыя производныя координатъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{x}^{(4)} = -g\frac{R^2}{\rho^3}\left(\mathfrak{x}'' - 6\frac{\mathfrak{x}'\rho'}{\rho} + 3(\mathfrak{x} + R\sin\alpha)\frac{4(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2}\right) +$$

$$+ (\omega\mathfrak{s}'' - 2\eta''')\,\omega\sin\Delta;\ \ldots\ldots$$

Чтобы составить выраженія начальныхъ значеній производныхъ четвертаго порядка, составимъ сначала, при помощи предыдущихъ формулъ, выраженія слѣдующихъ величинъ:

$$\mathfrak{z}_0''' = -3\omega^2\mathfrak{z}_0' - \frac{g}{R}\mathfrak{z}_0' + 3\frac{g}{R}\rho_0'\cos\lambda$$

$$\omega\mathfrak{z}_0'' - 2\eta_0''' = 4\omega^2\eta_0' + 2\frac{g}{R}\eta_0' + 3G\omega\cos\Lambda$$

$$\omega\eta_0'' + 2\mathfrak{z}_0''' = -4\omega^2\mathfrak{z}_0' - 2\frac{g}{R}\mathfrak{z}_0' + 6\frac{g}{R}\rho_0'\cos\lambda.$$

Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$\mathfrak{x}^{(4)} = 3G\left(\omega^2\sin\Lambda\cos\Lambda - \frac{g}{R}\sin\alpha\cos\alpha\right) +$$

$$+4\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\omega\eta_0'\sin\Lambda - 6\frac{g}{R}\omega\eta_0'\sin\alpha\cos\lambda +$$

$$+3\frac{g}{R^2}\left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2\right)\sin\alpha + 3\frac{g}{R^2}(3\mathfrak{x}_0'\rho_0' - \mathfrak{z}_0'\varkappa); \;.\;. \quad \mathbf{(246, a)}$$

$$\eta_0^{(4)} = -4\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\omega\mathfrak{z}_0' + 6\frac{g}{R}\omega\rho_0'\cos\lambda + 6\frac{g}{R^2}\eta_0'\rho_0'; \;.\;. \quad \mathbf{(246, b)}$$

$$\mathfrak{z}_0^{(4)} = 3G\left(\omega^2\cos^2\Lambda - \frac{g}{R}\cos^2\alpha\right) + \frac{g}{R}G +$$

$$+4\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\omega\eta_0'\cos\Lambda - 6\frac{g}{R}\omega\eta_0'\cos\alpha\cos\lambda +$$

$$+3\frac{g}{R^2}\left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2\right)\cos\alpha + 3\frac{g}{R^2}(3\mathfrak{z}_0'\rho_0' + \mathfrak{x}_0'\varkappa) \;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(246, c)}$$

$$\varkappa = \mathfrak{x}_0'\cos\alpha - \mathfrak{z}_0'\sin\alpha.$$

Принявъ во вниманіе равенства:

$$\left.\begin{aligned} &G\cos\alpha = g - R\omega^2\cos^2\lambda, \quad G\sin\alpha = R\omega^2\sin\lambda\cos\lambda, \\ &G\cos\Lambda = (g - R\omega^2)\cos\lambda, \quad G\sin\Lambda = g\sin\lambda, \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(247)}$$

можемъ упростить выраженіе перваго члена второй части равенства (246, a); а именно мы найдемъ, что онъ равенъ:

$$-3\frac{g}{G}R\omega^4\sin^3\lambda\cos\lambda.$$

Щ-30.

Составимъ ряды для слѣдующихъ случаевъ:

A) Матерьяльная точка пущена свободно, безъ начальной относительной скорости, то есть:

$$\mathfrak{x}_0'=0,\ \eta_0'=0,\ \mathfrak{z}_0'=0;$$

тогда выраженія для координатъ будутъ слѣдующія:

$$\mathfrak{x}=-\frac{g}{G}R\omega^4\frac{t^4}{8}\sin^3\lambda\cos\lambda+\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(248, a)}$$

$$\eta=-G\omega\frac{t^3}{3}\cos\Lambda+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(248, b)}$$

$$\mathfrak{z}=-G\frac{t^2}{2}+G\left(\frac{g}{3R}+\omega^2\cos^2\Lambda-\frac{g}{R}\cos^2\alpha\right)\frac{t^4}{8}+\ldots \quad \textbf{(248, c)}$$

Второе выраженіе показываетъ, что точка уклоняется въ отрицательную сторону оси Υ (то есть къ *востоку*) отъ плоскости меридіана точки *Ю*; величина этого отклоненія пропорціональна косинусу истинной широты Λ точки *Ю*.

Взявъ $G=9,8$ единицъ ускоренія, Λ равнымъ 51° и $t=5,687$ секунды, получимъ приблизительно:

$$\mathfrak{z}=158,5 \text{ метра},\quad \eta=-27,56 \text{ миллиметра};$$

то есть, при паденіи точки съ высоты 158,5 метровъ подъ широтою въ 51° (сѣверной широты), отклоненіе къ востоку получается въ 27 съ половиною миллиметровъ; по опытамъ, произведеннымъ Рейхомъ въ Фрейбургѣ (находящимся подъ широтою 51 градуса) оказалось, что при паденіи съ этой высоты получается отклоненіе въ 28,3 миллиметра къ востоку; кромѣ того, при тѣхъ же опытахъ, наблюдалось еще нѣкоторое отклоненіе къ югу.

Формула (248, a) даетъ, напротивъ, отклоненіе къ сѣверу и притомъ совершенно ничтожное: для $t=6$ секундамъ, получается 8 милліонныхъ долей миллиметра; поэтому можно сказать, что, по формуламъ (248), движеніе падающей точки совершается приблизительно въ плоскости ЗΥ.

При $t=6$ секундамъ, второй членъ ряда (248, c) представляетъ длину въ 2,6 миллиметра; если пренебречь этимъ членомъ, а также всѣми членами, заключающими степени t выше 3-й, то движеніе свободно падающей точки выразится такъ:

$$\mathfrak{x}=0,\quad \eta=-G\omega\frac{t^3}{3}\cos\Lambda,\quad \mathfrak{z}=-G\frac{t^2}{2};$$

а траэкторія окажется полукубическою параболою, заключающеюся въ плоскости $\mathfrak{z}\mathfrak{r}$.

B) Если начальная относительная скорость направлена по оси $\mathfrak{z}$, то есть, если точка брошена вертикально снизу вверхъ, то выраженія относительныхъ координатъ будутъ имѣть слѣдуюшій видъ:

$$\mathfrak{x}=\frac{gt^3}{2G^2}\mathfrak{z}_0'R\,\omega^4\sin^3\lambda\cos\lambda,$$

$$\eta=\left(\mathfrak{z}_0'-G\frac{t}{3}\right)t^2\omega\cos\Lambda,$$

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0't-G\frac{t^2}{2}-\mathfrak{z}_0'\frac{t^3}{6}\left[3\left(\omega^2\cos^2\Lambda-\frac{g}{R}\cos^2\alpha\right)+\frac{g}{R}\right],$$

если пренебречь членами, заключающими четвертыя и высшія степени времени.

Чтобы составить себѣ хотя приблизительное понятіе о видѣ этого движенія, пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$R\omega^4,\quad \mathfrak{z}_0'\omega^2,\quad \frac{g}{R};$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x}=0,\quad \eta&=\left(\mathfrak{z}_0'-G\frac{t}{3}\right)t^2\omega\cos\Lambda\\ \mathfrak{z}&=\mathfrak{z}_0't-G\frac{t^2}{2}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(249)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что въ тотъ моментъ t_1, въ который точка достигаетъ наибольшей высоты, она будетъ отклонена къ *западу* отъ вертикальной плоскости на длину:

$$\eta_1=\frac{2(\mathfrak{z}')^3}{3G^2}\omega\cos\Lambda;$$

Ш-30.

въ моментъ $t_2=2t$ точка вернется на ось $\mathfrak{Y}$ и будетъ отклонена отъ точки *Ю* къ *западу* на длину:

$$\eta_2=\frac{4(\mathfrak{z}_0')^3}{3G^2}\omega\cos\Lambda=2\eta_1.$$

Вся та часть относительной траэкторіи, которая пробѣгается точкою въ теченіе промежутка времени отъ $t=O$ до $t=t_2$, находится въ квадрантѣ положительныхъ осей $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$.

С. Чтобы составить себѣ приблизительное понятіе о видѣ движенія матерьяльной точки, брошенной съ начальною скоростью u_0 подъ угломъ α къ истинному горизонту точки *Ю* и въ вертикальной плоскости, составляющей азимутъ β съ плоскостью меридіана, мы пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$\omega^2\mathfrak{x}_0',\quad \omega^2\eta_0',\quad \omega^2\mathfrak{z}_0',\quad \frac{g}{R},$$

и всѣми членами высшаго порядка малости; тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}&=\mathfrak{x}_0't-\eta_0't^2\omega\sin\Lambda\\
\eta&=\eta_0't+(\mathfrak{x}_0'\sin\Lambda+\mathfrak{z}_0'\cos\Lambda)t^2\omega-G\frac{t^3}{3}\omega\cos\Lambda\\
\mathfrak{z}&=\mathfrak{z}_0't-\eta_0't^2\omega\cos\Lambda-G\frac{t^2}{2}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (250)$$

$$\mathfrak{x}_0'=u_0\cos\alpha\cos\beta,\quad \eta_0'=u_0\cos\alpha\sin\beta,\quad \mathfrak{z}_0'=u_0\sin\alpha.$$

Сравнивъ эти выраженія съ тѣми, которыя получились бы при неподвижности земли (при $\omega=O$) и при дѣйствіи на точку ускоренія G, направленнаго по отрицательной оси $\mathfrak{Z}$, мы увидимъ, что вращеніе земли оказываетъ слѣдующее вліяніе на полетъ брошеннаго тяжелаго тѣла.

а) Движеніе параллельно оси $\mathfrak{Z}$ совершается не съ ускореніемъ G, но съ ускореніемъ

$$G+2u_0\omega\cos\Lambda\cos\alpha\sin\beta,$$

добавочный членъ котораго пропорціоналенъ косинусу истинной широты Λ и синусу азимута β; поэтому, при одной и той же скорости u_0 и при томъ же углѣ α, брошенное тѣло поднимется на бо́льшую высоту при восточномъ азимутѣ ($\beta < O$), чѣмъ при западномъ ($\beta > O$).

b) Траэкторія не заключается въ вертикальной плоскости:

$$\eta = \mathfrak{x} \operatorname{tg} \beta,$$

какъ было бы при неподвижности земли, но имѣетъ видъ витой кривой линіи; если представить себѣ подвижную вертикальную плоскость, заключающую въ себѣ движущуюся точку, то законъ измѣненія азимута B этой плоскости выразится слѣдующею формулою:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}\beta + t\omega \sin \Lambda}{1 - t\omega \sin \Lambda \operatorname{tg}\beta} + \frac{\left(\mathfrak{z}_0' - G\frac{t}{3}\right)}{\mathfrak{x}_0' - \eta_0' t\omega \sin \Lambda} t\omega \cos \Lambda \; \ldots \; \textbf{(251)}$$

Изъ этой формулы видно, что брошенное тѣло отклоняется, на сѣверномъ полушаріи, *вправо* отъ первоначальнаго направленія; въ самомъ дѣлѣ второй членъ суммы (251) сохраняетъ положительную величину въ теченіи времени отъ $t = 0$ до $t = \frac{3u_0 \sin \alpha}{G}$; поэтому:

$$B > \left(\beta + \operatorname{arctg}\,(t\omega \sin \Lambda)\right).$$

Если тѣло брошено горизонтально, и начальная скорость его настолько велика, что можно пренебречь вторымъ членомъ суммы (251), то тогда:

$$\operatorname{tg}(B - \beta) = t\omega \sin \Lambda;$$

то есть уголъ $(B - \beta)$ возрастаетъ пропорціонально времени и синусу широты Λ, и притомъ это отклоненіе *не зависитъ отъ первоначальнаго азимута* β.

c) Можно показать, что вращеніе земли увеличиваетъ дальность полета при западномъ азимутѣ β и уменьшаетъ при восточномъ.

Выраженія (250) могутъ быть получены также при помощи слѣдующихъ дѣйствій.

III-30.

Пренебрежемъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія (243) членами:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z}$$

и, замѣнивъ ρ черезъ R, пренебрежемъ отношеніями:

$$\frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\mathfrak{z}}{R};$$

тогда получимъ дифференціальныя уравненія слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x}'' &= -2\eta'\omega\sin\Lambda\\ \eta'' &= +2(\mathfrak{x}'\sin\Lambda+\mathfrak{z}'\cos\Lambda)\,\omega\\ \mathfrak{z}'' &= -2\eta'\omega\cos\Lambda - G\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (252)$$

Первые интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}' &= \mathfrak{x}_0' - 2\eta\omega\sin\Lambda\\ \eta' &= \eta_0' + 2(\mathfrak{x}\sin\Lambda+\mathfrak{z}\cos\Lambda)\,\omega\\ \mathfrak{z}' &= \mathfrak{z}_0' - 2\eta\omega\cos\Lambda - Gt;\end{aligned}$$

они даютъ намъ выраженія проэкцій скорости въ функціяхъ времени и координатъ; подставивъ эти выраженія въ уравненія (252) и отбросивъ члены, содержащіе:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z},$$

будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}'' &= -2\eta_0'\omega\sin\Lambda\\ \eta'' &= 2(\mathfrak{x}_0'\sin\Lambda+\mathfrak{z}_0'\cos\Lambda)\,\omega - 2tG\omega\cos\Lambda\\ \mathfrak{z}'' &= -2\eta_0'\omega\cos\Lambda - G;\end{aligned}$$

двукратное интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ (250).

§ 31. Положенія равновѣсія свободной матерьяльной точки. Условія устойчивости.

Свободная матерьяльная точка, подверженная дѣйствію какихъ либо силъ, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ пространства, въ которыхъ силы, приложенныя къ покоящейся точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной точки называются *положеніями равновѣсія* ея.

Напримѣръ, матерьяльная точка, подверженная притяженію, направленному къ неподвижному центру C и прямопропорціональному разстоянію отъ C, будетъ имѣть положеніе равновѣсія въ этомъ центрѣ C.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія даже и тогда, когда, кромѣ притяженія къ нему, на точку будетъ дѣйствовать сопротивленіе среды, пропорціональное первой степени скорости; въ самомъ дѣлѣ, если матерьяльная точка будетъ помѣщена въ центръ C безъ начальной скорости, то обѣ силы будутъ равны нулю, и матерьяльная точка останется въ покоѣ.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія и въ томъ случаѣ, когда, вмѣсто притяженія, на точку дѣйствуетъ сила отталкивающая ее отъ центра и пропорціональная разстоянію отъ него.

Матерьяльная точка, помѣщенная въ положеніи равновѣсія безъ начальной скорости, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока какая либо посторонняя сила или причина не выведетъ ее изъ этого положенія.

Положимъ, что дѣйствіемъ нѣкоторой временной причины, матерьяльная точка будетъ отклонена изъ положенія равновѣсія M_e въ одну изъ близлежащихъ точекъ пространства и будетъ выпущена изъ этой точки M_0 съ начальною скоростью v_0; послѣ этого, дѣйствіе временной причины прекращается, и матерьяльной точкѣ предоставляется совершать движеніе подъ вліяніемъ тѣхъ силъ, которыя взаимно уравновѣшиваются въ точкѣ M_e, но не уравновѣшиваются въ близлежащихъ частяхъ пространства.

Движеніе это можетъ быть различнаго характера, смотря по расположенію силъ въ сосѣдствѣ съ точкою M_e, смотря по величинѣ

и направленію начальнаго отклоненія $\overline{M_eM_0}$ и смотря по величинѣ и направленію начальной скорости v_0.

При нѣкоторыхъ силахъ матерьяльная точка совершаетъ движеніе, не выходя изъ предѣловъ нѣкотораго объема, окружающаго точку M_e; притомъ размѣры этого объема тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе отклоненіе $\overline{M_eM_0}$ и скорость v_0, а если послѣднія (то есть $\overline{M_eM_0}$ и v_0) безконечно-малы, то движеніе совершается въ безконечно-тѣсныхъ предѣлахъ около положенія равновѣсія M_e.

Если движеніе имѣетъ такой характеръ при весьма малыхъ начальныхъ отклоненіяхъ по всевозможнымъ направленіямъ изъ положенія равновѣсія и при всевозможныхъ направленіяхъ весьма малыхъ начальныхъ скоростей, то положеніе равновѣсія называютъ *устойчивымъ*.

При другихъ же силахъ матерьяльная точка въ своемъ движеніи все болѣе и болѣе удаляется отъ положенія равновѣсія, даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ начальныхъ отклоненій и скоростей; такое положеніе равновѣсія называютъ *неустойчивымъ*.

Напримѣръ, центръ C есть положеніе устойчиваго равновѣсія матерьяльной точки, притягиваемой къ нему силою, пропорціональною разстоянію; потому что матерьяльная точка, по отклоненіи ея на разстояніе конечной величины отъ центра C и по сообщеніи ей начальной скорости конечной величины, будетъ совершать движеніе вокругъ C по эллипсу конечныхъ размѣровъ (см. примѣръ 5 на стр. 82).

Напротивъ, тотъ же центръ будетъ положеніемъ неустойчиваго равновѣсія, если онъ отталкиваетъ отъ себя матерьяльную точку силою, пропорціональною разстоянію; потому что движущаяся точка уходитъ въ безконечность даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ отклоненій изъ центра C, какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ:

$$x = x_0\left(\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2}\right),\quad y = y_0\left(\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2}\right),$$

при составленіи которыхъ предполагалось, что центръ C взятъ за начало координатъ, и что начальная скорость равна нулю; изъ этихъ формулъ видно, что, даже при весьма малыхъ началь-

ныхъ отклоненіяхъ x_0, y_0, координаты x и y получаютъ безконечно большія значенія при $t=\infty$.

Устойчивость равновѣсія матерьяльной точки въ центрѣ C, притягивающемъ ее силою, пропорціональною разстоянію, проявляется довольно наглядно въ средѣ, оказывающей движенію матерьяльной точки сопротивленіе, пропорціональное скорости; тогда движущаяся точка будетъ постепенно приближаться къ притягивающему центру, описывая вокругъ него спираль, все болѣе и болѣе съуживающуюся (см. стр. 83, черт. 6).

Б. Положенія равновѣсія матерьяльной точки, на которую дѣйствуютъ силы, имѣющія потенціалъ U, суть всѣ тѣ точки пространства, координаты которыхъ удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=0; \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(253)}$$

это могутъ быть: или изолированныя точки, или сплошныя линіи, поверхности и объемы, напримѣръ:

Примѣръ 22. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть: силы притяженія, пропорціональныя разстояніямъ, къ двумъ центрамъ, находящимся на оси X въ точкахъ $(x_1=a)$ и $(x_2=-a)$, и сила, параллельная положительной оси Z и пропорціональная квадрату разстоянія матерьяльной точки отъ плоскости XY; величины этихъ трехъ силъ — слѣдующія:

$$\mu^2 r_1,\quad \mu^2 r_2,\quad \lambda^2 z^2,$$

гдѣ r_1 и r_2 означаютъ разстоянія матерьяльной точки отъ притягивающихъ центровъ.

Въ этомъ случаѣ потенціальная функція будетъ:

$$U=\frac{\lambda^2}{3}z^3-\frac{\mu^2}{2}\Big((x-a)^2+y^2+z^2\Big)-\frac{\mu^2}{2}\Big((x+a)^2+y^2+z^2\Big).$$

Уравненія (253) будутъ слѣдующаго вида:

$$-2\mu^2 x=0,\quad -2\mu^2 y=0,\quad \lambda^2 z^2-2\mu^2 z=0:$$

III-31.

изъ нихъ находимъ, что равновѣсіе силъ возможно въ двухъ точкахъ пространства:

$$1)\ x=0,\ y=0,\ z=0;$$

$$2)\ x=0,\ y=0,\ z=\frac{2\mu^2}{\lambda^2}.$$

Примѣръ 23. Притяженія тѣ же, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, но вмѣсто силы, параллельной оси Z, дѣйствуетъ сила, отталкивающая матерьяльную точку отъ оси X пропорціонально квадрату разстоянія точки отъ этой оси; величина этой силы:

$$\lambda^2(y^2+z^2).$$

Потенціальная функція здѣсь будетъ слѣдующая:

$$U=\frac{\lambda^2}{3}(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{\mu^2}{2}r_1^{\,2}-\frac{\mu^2}{2}r_2^{\,2};$$

приравнявъ нулю первыя производныя ея, получимъ уравненія:

$$-2\mu^2x=0,\ \left(\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2\right)y=0,\ \left(\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2\right)z=0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что положенія равновѣсія суть:

1) начало координатъ: $x=0,\ y=0,\ z=0,$

2) каждая изъ точекъ круга:

$$x=0,\ y^2+z^2=\frac{4\mu^4}{\lambda^4}.$$

Примѣръ 24. При дѣйствіи силъ, имѣющихъ потенціалъ:

$$U=\mu^2\left(r^2+\frac{\lambda^4}{r^2}\right),$$

положенія равновѣсія матерьяльной точки суть всѣ точки поверхности сферы, имѣющей радіусъ λ.

Въ каждой такой точкѣ пространства, координаты которой удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ (253), равновѣсіе будетъ устойчивымъ или неустойчивымъ, смотря потому, имѣетъ ли потенціальная функція U въ этой точкѣ максимумъ, или минимумъ.

Пусть M_e есть одна изъ точекъ равновѣсія, U_e— численное значеніе, получаемое потенціальною функціею въ этой точкѣ; x_e, y_e, z_e — координаты этой точки, удовлетворяющія тремъ уравненіямъ (253).

Въ точкѣ M $(x_e+\delta x,\ y_e+\delta y,\ z_e+\delta z)$, безконечно-близкой къ точкѣ M_e, потенціальная функція имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_e+\delta^2 U;$$

$$\delta^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\delta x)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\delta y)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\delta z)^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\delta y\delta z+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\delta z\delta x+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\delta x\delta y;$$

гдѣ во вторыя производныя должны быть подставлены координаты точки M_e.

Функція U имѣетъ максимумъ въ точкѣ M_e, если $\delta^2 U$ имѣетъ отрицательныя величины при всякихъ знакахъ безконечно-малыхъ величинъ δx, δy, δz и при всякихъ отношеніяхъ между ними; какъ извѣстно, это можетъ быть только тогда, когда вторыя производныя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} U_{xx}<0,\ \ U_{yy}U_{xx}-U^2_{xy}>0, \\ (U_{yy}U_{xx}-U^2_{xy})(U_{zz}U_{xx}-U^2_{zx})-(U_{xx}U_{yz}-U_{zx}U_{xy})^2>0; \end{array}\right\} \quad (254)$$

(здѣсь вторыя производныя обозначены для сокращенія объема формулъ особыми символами; такъ

$$U_{yz}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}).$$

Если условія (254) удовлетворены, то, въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ точкою M_e, поверхности уровня имѣютъ видъ эллипсоидовъ съ безконечно-малыми осями, имѣющихъ центры въ точкѣ M; параметръ такой поверхности уровня есть: U_e-k^2; а уравненіе ея:

$$-k^2=U_{xx}x^2+U_{yy}y^2+U_{zz}z^2+2U_{yz}yz+2U_{zx}zx+2U_{xy}xy; \quad (255)$$

k есть весьма малая постоянная, имѣющая тѣмъ бóльшую величину, чѣмъ поверхность уровня далѣе отъ точки M_e.

Положимъ, что матерьяльная точка отклонена изъ положенія равновѣсія M_e въ весьма близкую къ нему точку M_0, и здѣсь ей сообщена весьма малая начальная скорость v_0; пусть:

$$U_e - k_0^2$$

есть параметръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_0.

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою, должно удовлетворять закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_e - k^2 - (U_e - k_0^2),$$

или:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2;$$

т. е. всегда $k^2 \leq \frac{mv_e^2}{2} + k_e^2$;

изъ этого уравненія видно, что точка не можетъ выйти внаружу той поверхности уровня, для которой

т. е. задача 255.

$$k^2 = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2,$$

потому что живая сила не можетъ быть отрицательною; поэтому точка M_e, въ которой потенціальная функція имѣетъ максимумъ, есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

Такъ, въ примѣрахъ 22-мъ и 23-мъ начало координатъ есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

ГЛАВА IV.

Механика несвободной матерьяльной точки.

§ 32. Матерьяльная точка несвободна, если существуютъ преграды, не позволяющія ей имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію изъ той точки пространства, въ которой она находится.

Всякія преграды могутъ быть разсматриваемы: однѣ — какъ поверхности тѣлъ непроницаемыхъ матерьяльною точкою, другія — какъ поверхности, удерживающія на себѣ точку.

Каждая преграда перваго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ, находящейся на преграждающей поверхности, сойти съ нея въ сторону непроницаемаго тѣла, дѣйствительнаго или воображаемаго, ограниченнаго этою поверхностью; точка можетъ двигаться вдоль по поверхности или сойти съ нея въ свободную сторону; поэтому такая преграда называется *поверхностью, не удерживающею матерьяльной точки.*

Напримѣръ, матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой, нерастяжимой и неимѣющей массы нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ въ началѣ координатъ, имѣетъ преградою поверхность сферы, радіусъ которой равенъ длинѣ нити, а центръ находится въ началѣ координатъ. Пока нить ненатянута,— матерьяльная точка находится внутри сферы, гдѣ она совершенно свободна; если же нить натянута, то точка, находясь на поверхности сферы, можетъ имѣть движеніе вдоль по сферѣ или внутрь ея; наружу же сферы ея движеніе преграждено нерастяжимостью нити. Эта сфера есть очевидно поверхность, не удерживающая точку отъ перемѣщеній, направленныхъ внутрь ея.

Каждая преграда втораго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ сойти съ нѣкоторой поверхности, ни въ ту, ни въ другую сторону ея, такъ что точка можетъ двигаться только вдоль по

поверхности; такую преграду называютъ *поверхностью, удерживающею на себѣ матерьяльную точку.*

Примѣромъ такой поверхности можетъ служить поверхность сферы, на которой должна оставаться матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу безконечно-тонкаго, вполнѣ твердаго стержня, другой конецъ котораго постоянно находится въ началѣ координатъ; предполагается, что стержень можетъ совершать какое бы то ни было вращательное движенiе вокругъ этой неподвижной точки.

§ 33. Ограниченiе свободы движенiя точки поверхностью, удерживающею ее на себѣ.

Координаты матерьяльной точки должны постоянно удовлетворять уравненiю поверхности, удерживающей ее на себѣ.

Если эта поверхность неподвижна, то уравненiе ея заключаетъ въ себѣ координаты и постоянные параметры.

Если же поверхность движется или измѣняетъ съ теченiемъ времени свой видъ или размѣры, то уравненiе ея будетъ заключать: координаты, постоянные параметры и время t.

Напримѣръ, поверхность сферы, центръ которой движется равномѣрно со скоростью k по оси X, а радiусъ возрастаетъ равномѣрно со скоростью A, выразится слѣдующимъ уравненiемъ:

$$(x-\varkappa-kt)^2+y^2+z^2-(R+At)^2=0.$$

гдѣ $\varkappa$ есть абцисса центра, а R — величина радiуса, въ моментъ $t=0$.

Если матерьяльная точка движется по поверхности, выражаемой уравненiемъ:

$$f(x, y, z, t)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (256)$$

то скорость ея должна удовлетворять слѣдующему уравненiю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \ldots\ldots\ldots \quad (257)$$

или $\frac{\partial x}{\Delta f}\cdot\frac{dT}{V} + \frac{\partial y}{\Delta f}\cdot\frac{dT}{V} + \frac{\partial z}{\Delta f}\cdot\frac{dT}{V} + \frac{\partial t}{\Delta f\cdot V} = 0$ IV-33

~~[illegible]~~

Къ § 33. $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

Ур. кривой $f(x,y,z)=0$

Ур. касательной плоскости въ точкѣ x,y,z этой кривой

$$X\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} + Y\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} + Z\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} = 0$$

Ур. нормали въ точкѣ x,y,z этой кривой

$$X\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = Y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = Z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$

Поэтому cos угловъ между нормалью и осями координатъ

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f},\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f},\ \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

гдѣ $\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$

Значитъ, если по нормали отложимъ отрѣзокъ длиною

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

то проекціи его на оси координатъ будутъ

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Разсм[illegible] которые проведены въ сторону своей нат. пр[illegible] [illegible]

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяетъ и v, потому что матерьяльная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою $\mathfrak{M}$, а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f\, w \cos(w,N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(261)}$$

Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f\Big(v\cos(v,N) - w\cos(w,N)\Big) = 0,$$

или:

$$\Delta f . u \cos(u,N) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(262)}$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣняемо связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, *что скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.*

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой неудерживающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась бо́льшею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства внѣ поверхности, въ которую матерьяльная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R, имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(263)}$$

которое можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Delta f \,.\, v \cos(v.N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (258)$$

гдѣ N есть направленіе положительной нормали, возстановленной къ поверхности (256) изъ той точки ея, въ которой движущаяся матерьяльная точка находится въ моментъ t; косинусы угловъ, составляемыхъ этою нормалью съ осями координатъ, выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(N,X) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \cos(N,Y) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \cos(N,Z) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (259)$$

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (259 \text{ bis})$$

Уравненіе (258) выражаетъ, что проэкція скорости v на направленіе положительной нормали должна имѣть величину:

$$-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (260)$$

Проэкція скорости на касательную плоскость къ поверхности можетъ быть какая угодно.

Частная производная отъ f по t равна нулю, *если поверхность неподвижна*; тогда уравненіе (258) будетъ выражать, что *скорость должна заключаться въ касательной плоскости*, что понятно и само собою.

Если поверхность, не измѣняя ни своего вида, ни размѣровъ, имѣетъ какое либо движеніе, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Означимъ черезъ w скорость той точки $\mathfrak{M}$ поверхности и среды, съ которою матерьяльная точка въ моментъ t совпадаетъ; эта скорость

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяетъ и v, потому что матерьяльная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою $\mathfrak{M}$, а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f w \cos(w,N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(261)}$$

Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f\Big(v \cos(v,N) - w \cos(w,N)\Big) = 0,$$

или:

$$\Delta f . u \cos(u,N) = 0, \; \ldots\ldots\ldots \; (262)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣняемо связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, *что скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.*

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой неудерживающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась бо́льшею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства внѣ поверхности, въ которую матерьяльная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R, имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(263)}$$

если поверхность эта не удерживаетъ матерьяльную точку, находящуюся на ней, отъ перемѣщеній внутрь ея; потому что координаты точекъ, находящихся внутри сферы, дѣлаютъ первую часть этого уравненія болѣе нуля и обращаютъ его въ неравенство:

$$R^2-(x^2+y^2+z^2)>0.$$

Если же та же самая сфера не удерживаетъ матерьяльную точку отъ перемѣщеній внаружу ея, то уравненіе ея станемъ писать такъ:

$$(x^2+y^2+z^2)-R^2=0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots \,\textbf{(264)}$$

для того, чтобы первая часть его дѣлалась большею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ, находящихся внѣ сферы.

При соблюденіи этого условія, въ свободную сторону поверхности будутъ направлены положительныя нормали, возстановленныя изъ точекъ поверхности; въ самомъ дѣлѣ, если близъ точки M $(x,\ y,\ z)$ поверхности:

$$f(x, y, z, t)=0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots \,\textbf{(265)}$$

возьмемъ другую точку M_1 $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$, такую, чтобы направленіе $\overline{MM_1}$ составляло острый уголъ съ направленіемъ положительной нормали N (259, 259 bis), возстановленной изъ точки M, то можемъ утверждать, что произведеніе:

$$\Delta f\,.\,\overline{MM_1}\cos(\overline{MM_1},N)$$

или равный ему трichленъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

болѣе нуля; знакъ же этого трichлена, при безконечной малости величинъ δx, δy, δz, опредѣляетъ собою знакъ величины:

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,t);$$

значитъ эта величина также болѣе нуля, а слѣдовательно точка M_1 находится внѣ поверхности съ свободной стороны ея. Значитъ и положительная нормаль направлена въ свободную часть пространства.

Матерьяльная точка свободна, когда находится внѣ поверхности (265); тогда координаты ея удовлетворяютъ неравенству:

$$f(x, y, z, t) > 0,$$

а скорость ея можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе.

Если въ какой либо моментъ t матерьяльная точка находится на поверхности (265), то въ моментъ $(t+dt)$ координаты ея:

$$x+Dx=x+x'dt+x''\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots.$$

$$y+Dy=y+y'dt+y''\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots.$$

$$z+Dz=z+z'dt+z''\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots.$$

должны удовлетворять, или равенству:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)=0, \ldots\ldots \quad \textbf{(266)}$$

или норавенству:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)>0, \ldots\ldots \quad \textbf{(267)}$$

смотря потому, осталась ли точка на поверхности, или сошла съ нея.

Разложимъ первую часть равенства (266) или неравенства (267) по восходящимъ степенямъ дифференціала dt; припявъ во вниманіе уравненіе (265), получимъ:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)=\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots \quad \textbf{(268)}$$

гдѣ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(269)}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial x}x''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''+Kf \dots\dots\dots (270)$$

. . . .

$$Kf=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x'y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}x'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}x'+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}y'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t}z' \dots\dots\dots (271)$$

Послѣ этого можемъ сказать, что если матерьяльная точка въ моментъ t находится на поверхности (265), то координаты ея, скорость и ускоренія должны удовлетворять равенству

$$\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots=0, \dots\dots\dots (272)$$

или неравенству:

$$\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots>0, \dots\dots\dots (273)$$

смотря потому, остается ли точка къ концу безконечно-малаго промежутка времени dt на той же поверхпости, или сходитъ съ нея.

Отсюда слѣдуетъ, что первая полная производная отъ f по t не можетъ быть отрицательною, такъ какъ знакъ ея (при положительномъ dt) опредѣляетъ знакъ всего ряда; а потому скорость матерьяльной точки, находящейся на неудерживающей поверхности (265), должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}\geqslant 0, \dots\dots\dots (274)$$

то есть:

$$v\cos(v,N)\geqslant -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t} \dots\dots\dots (275)$$

Если поверхность неподвижна, то условіе (275) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$v\cos(v,N)\geqslant 0; \dots\dots\dots (276)$$

это значитъ, что *скорость матерьяльной точки, находящейся на неподвижной неудерживающей поверхности, можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе, составляющее съ положительною нормалью острый или прямой уголъ*, это, конечно, понятно само собою.

Если поверхность движется или деформируется, то мы можемъ себѣ представить нѣкоторую среду (какъ объяснено въ предыдущемъ параграфѣ), переносящую эту поверхность въ пространствѣ; означимъ черезъ $\mathfrak{M}$ ту точку поверхности и среды, съ которою матерьяльная точка совпадаетъ въ моментъ t.

Такъ какъ точка $\mathfrak{M}$ всегда остается принадлежащею поверхности, то скорость ея w удовлетворяетъ уравненію:

$$w\cos(w,N) = -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}; \ldots\ldots\ldots\ldots (261)$$

изъ условія (275) и равенства (261) слѣдуетъ:

$$u\cos(u,N) \geqslant 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (277)$$

это значитъ, что скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ средѣ должна составлять острый или прямой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности.

§ 35. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной удерживающей поверхности.

Кромѣ вышеприведенныхъ условій, ограничивающихъ произвольность скорости движущейся точки, существуютъ еще условія, которымъ должны подчиняться ускоренія ея.

Для точки, остающейся на данной поверхности, условія эти выражаются равенствами:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=0,\ \frac{d^3f}{dt^3}=0,\ \frac{d^4f}{dt^4}=0, \ldots .$$

Разсмотримъ значеніе перваго изъ нихъ.

Оно будетъ имѣть слѣдующій видъ при неподвижности поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + f_2(x', y', z') = 0, \ldots\ldots (278)$$

гдѣ f_2 есть слѣдующая однородная функція второй степени отъ скоростей x', y', z':

$$f_2(x', y', z') = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z')^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y'z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z'x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x'y'.$$

Равенство (278) можетъ быть представлено еще такъ:

$$\Delta f \,.\, \dot{v} \cos(\dot{v}, N) + f_2(x', y', z') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(279)}$$

или:

$$\Delta f \,.\, \frac{dv}{dt} \cos(v, N) + \Delta f \,.\, \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, N) + f_2 = 0,$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою на неподвижной поверхности.

Принявъ во вниманіе, что скорость перпендикулярна въ нормали N, мы найдемъ, что разсматриваемое нами условіе можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{1}{\rho} \cos(\rho, N) = -\frac{f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(280)}$$

гдѣ a_x, a_y, a_z означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ скорости съ осями координатъ X, Y, Z*).

Равенство (279), или равенство:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) = -\frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(279 bis)}$$

опредѣляетъ величину проэкціи ускоренія на нормаль N въ каждой точкѣ поверхности; величина эта зависитъ отъ величины и направленія скорости, такъ что *въ каждой точкѣ поверхности*,

*) Косинусы эти должны удовлетворить равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z = 0.$$

при опредѣленныхъ величинахъ v^2, a_x, a_y, a_z, *проэкція ускоренія на нормаль къ поверхности должна имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.*

2. Равенство (280) опредѣляетъ величину радіуса кривизны траэкторіи въ зависимости отъ направленія скорости и отъ угла, составляемаго плоскостью кривизны траэкторіи съ нормалью къ поверхности.

Б. Подвижную поверхность:

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0$$

неизмѣняемаго вида мы представляемъ себѣ принадлежащею нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ.

Выразимъ абсолютныя координаты x, y, z въ координатахъ ξ, η, ζ относительно нѣкоторыхъ осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, неизмѣнно-связанныхъ со средою; тогда *первая часть уравненія поверхности должна будетъ выразиться нѣкоторою функціею координатъ* ξ, η, ζ, *не заключающею времени явнымъ образомъ*, потому что поверхность находится въ относительномъ покоѣ по отношенію къ средѣ.

Положимъ:

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=\Phi(\xi,\ \eta,\ \zeta).$$

Вслѣдствіе такой перемѣны координатъ, равенство:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial x}x''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''+Kf=0,$$

(гдѣ Kf выражается формулою (271)) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\xi''+\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\eta''+\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\zeta''+\Phi_2(\xi',\eta',\zeta')=0,\ldots \quad (281)$$

аналогичный виду равенства (278).

Отсюда, также какъ и для неподвижной поверхности, получимъ:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N)=-\frac{u^2\Phi_2(\alpha_\xi,\alpha_\eta,\alpha_\zeta)}{\Delta\Phi},\ \ldots\ldots\ldots \quad (282)$$

гдѣ α_ξ, α_η, α_ζ суть косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ относительной скорости u съ осями Ξ, Υ, **Z**; эти косинусы должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\alpha_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\alpha_\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\alpha_\zeta = 0.$$

Подъ Φ_2 и $\Delta\Phi$ мы подразумѣваемъ

$$\Delta\Phi = +\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)^2}, \ldots\ldots \quad \textbf{(283)}$$

$$\Phi_2(\xi', \eta', \zeta') = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}(\xi')^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}\xi'\eta' \ldots \quad \textbf{(284)}$$

Равенство (282) опредѣляетъ величину проэкціи на нормаль относительнаго ускоренія движущейся точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ; въ каждой точкѣ поверхности, при опредѣленныхъ величинахъ u, α_ξ, α_η, α_ζ, проэкція относительнаго ускоренія $\dot{u}$ на нормаль къ поверхности должна имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.

Деформирующуюся поверхность:

$$f(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(285)}$$

мы представляемъ себѣ принадлежащею нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что во все время движенія поверхность состоитъ изъ однѣхъ и тѣхъ же точекъ этой среды.

Буквами x, y, z мы будемъ теперь обозначать координаты матерьяльной точки; координаты же точекъ среды и поверхности мы будемъ обозначать такъ, какъ въ V-й главѣ кинематической части, а именно $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ будутъ означать координаты какой либо точки среды въ моментъ $t = 0$, а $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ — координаты той же самой точки среды въ моментъ t.

Положимъ, что движеніе среды, а съ нею и поверхности, выражается слѣдующими функціями:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t),\ \mathfrak{y} = \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t),\ \mathfrak{z} = \mathfrak{F}_3(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t) \ldots \quad \textbf{(286)}$$

Если въ уравненіе:

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(287)}$$

IV-35.

вмѣсто $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ подставить функціи $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, то должны будемъ получить уравненіе, удовлетворяемое начальными координатами всѣхъ тѣхъ точекъ среды, которыя находятся на разматриваемой поверхности; говоря иначе, по исключеніи величинъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ изъ равенствъ (286) и (287), мы должны получить уравненіе начальнаго положенія поверхности:

$$f(\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ 0)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (288)$$

то есть, уравненіе, не заключающее времени явнымъ образомъ.

Уравненіе (285) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$x=f_1(t),\ \ y=f_2(t),\ \ z=f_3(t),$$

выражающими абсолютное движеніе точки, движущейся по разсматриваемой поверхности; точно также уравненіе (288) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$\mathfrak{a}=\varphi_1(t),\ \ \mathfrak{b}=\varphi_2(t),\ \ \mathfrak{c}=\varphi_3(t),$$

выражающими относительное движеніе той же точки по отношенію къ деформирующейся средѣ (Кинем. часть, стр. 197, строки 15—22 сверху).

Если функція f будетъ приведена къ виду (288), то условія:

$$\frac{df}{dt}=0,\ \ \frac{d^2f}{dt^2}=0$$

выразятся слѣдующими равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (289)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}''+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}''+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}''+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}^2}(\mathfrak{a}')^2+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'=0; \quad (290)$$

съ другой стороны производныя отъ f по $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ могутъ быть получены, разсматривая f какъ функцію отъ x, y, z и t, а x, y, z — какъ функціи (286) отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, t; такъ что:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{a}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}\right)^2+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{a}^2};$$

. . . .

Вслѣдствіе этого, равенства (289) и (290) получатъ такой видъ:

$$\mathfrak{u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\mathfrak{u},X)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\mathfrak{u},Y)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(\mathfrak{u},Z)\right)=0$$

$$\Delta f\,.\,\dot{\mathfrak{u}}\cos(\dot{\mathfrak{u}},N)+\mathfrak{u}^2 f_2(c_1,\ c_2,\ c_3)=0,\ \ldots\ldots\ldots \textbf{(291)}$$

гдѣ $\mathfrak{u}$ есть скорость относительнаго движенія (проэкціи которой на оси координатъ выражаются формулами (240) кинематической части); c_1, c_2, c_3 — косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ этой скорости съ осями координатъ: $\dot{\mathfrak{u}}$ — ускореніе относительнаго движенія точки по отношенію къ деформирующейся поверхности; проэкція этого ускоренія на ось X выражается такъ:

$$\dot{\mathfrak{u}}\cos(\dot{\mathfrak{u}},X)=\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}''+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}''+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}''+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}^2}(\mathfrak{a}')^2+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}^2}(\mathfrak{b}')^2+$$

$$+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}^2}(\mathfrak{c}')^2+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ {}^{*}).\ \ldots \textbf{(292)}$$

Равенство (291) аналогично равенству (279).

---

*) Въ дополненіе къ сказанному въ X-й главѣ (т. I стр. 278) кинематической части слѣдуетъ прибавить, что ускореніе абсолютнаго движенія точки M въ какой либо моментъ t есть геометрическая сумма, составленная:

1) изъ ускоренія $\dot{w}$ той точки измѣняемой среды, съ которою точка M въ этотъ моментъ совпадаетъ,

$$\dot{w}\cos(\dot{w}X)=\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2},$$

2) изъ ускоренія $\dot{\mathfrak{u}}$ относительнаго движенія

и 3) изъ добавочнаго ускоренія, проэкція котораго на ось X выражается такъ:

$$2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}'+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}'+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}'\right).$$

Если среда неизмѣняемая, то добавочное ускореніе есть противоположное поворотному. NB.

§ 36. О кривизнѣ линій, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей.

Формула (280) выражаетъ кривизну линіи, проведенной по поверхности, въ функціи слѣдующихъ величинъ: x, y, z, a_x, a_y, a_z, $\cos(\rho,N)$; первыя три суть координаты той точки, въ которой опредѣляется кривизна кривой, слѣдующія три: a_x, a_y, a_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ касательною къ кривой въ этой точкѣ; послѣдняя величина есть косинусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны кривой съ нормалью къ поверхности въ той же точкѣ.

Изъ формулы этой можно видѣть слѣдующее.

1. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, имѣющія въ этой точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, имѣютъ въ ней одинаковый радіусъ кривизны.

2. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, и имѣющія въ этой точкѣ общую касательную, но различныя плоскости кривизны, имѣютъ въ этой точкѣ такіе радіусы кривизны, что отношеніе:

$$\frac{\cos(\rho,N)}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (293)$$

для всѣхъ ихъ одинаково.

Означимъ черезъ $\mathfrak{R}$ величину радіуса кривизны линіи пересѣченія поверхности плоскостью, проведенною черезъ нормаль N и черезъ общую касательную ко всѣмъ кривымъ; такая кривая называется *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности.

Предыдущее отношеніе (293) равняется единицѣ, дѣленной на $\mathfrak{R}$, если радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія направленъ по N; въ противномъ же случаѣ отношеніе (293) равняется минусъ единицѣ, дѣленной на $\mathfrak{R}$.

Слѣдовательно:

$$\rho = \pm \mathfrak{R} \cos(\rho,N),$$

то есть *радіусъ кривизны какой либо кривой, проведенной по поверхности, равенъ проэкціи на плоскость ея кривизны радіуса кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ касательную къ кривой.*

Для того, чтобы формулы не заключали явнымъ образомъ двойственнаго знака, условимся считать кривизну нормальнаго сѣченія отрицательною, если радіусъ кривизны его направленъ въ сторону отрицательной нормали; обозначать ее будемъ знакомъ $\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{K}=-\frac{f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (294)$$

5. Формула (294) упрощается, если уравненіе поверхности будетъ рѣшено относительно z и представлено подъ видомъ:

$$F(x,\ y)-z=0;$$

тогда будетъ:

$$\Delta f=\sqrt{p^2+q^2+1};f_2=ra_x^2+2sa_xa_y+ta_y^2,$$

гдѣ:

$$p=\frac{\partial F}{\partial x},\ q=\frac{\partial F}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

а потому:

$$\mathfrak{K}=-\frac{ra_x^2+2sa_xa_y+ta_y^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ \ldots\ldots\ldots\ (295)$$

6. Формула (294) упрощается тоже, если ось Z параллельна нормали N; тогда:

$$a_z=0,\ a_x=\cos\varphi,\ a_y=\sin\varphi,\ \frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый касательною къ кривой съ осью Xовъ; будетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{K}=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right)\ldots\ (296)$$

7. Формула (296) послужитъ намъ для сужденія о законѣ, которому слѣдуютъ кривизны нормальныхъ сѣченій, заключающихся въ различныхъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же нормаль; для большей наглядности формулы, преобразуемъ ее слѣдующимъ образомъ.

Квадраты косинуса и синуса угла φ выразимъ въ косинусѣ двойнаго угла φ:

$$\mathfrak{K}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}\cos 2\varphi-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}}\sin 2\varphi,$$

IV-36.

затѣмъ приведемъ коэффиціенты у косинуса и синуса къ слѣдующему виду:

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{D}}{2}\cos 2\varphi_0,\quad \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{D}}{2}\sin 2\varphi_0,$$

тогда получимъ слѣдующее выраженіе кривизны нормальнаго сѣченія·

$$\mathfrak{K}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}-\frac{\mathfrak{D}}{2}\cos 2(\varphi-\varphi_0), \dots\dots \quad (297)$$

гдѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{D}=\sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2} \dots\dots \quad (298)$$

Изъ формулы (297) хорошо видно, какъ измѣняется кривизна нормальнаго сѣченія при вращеніи сѣкущей плоскости вокругъ нормали. Наименьшую кривизну имѣетъ сѣченіе плоскостью, составляющею уголъ φ_0 съ плоскостью ZX; наибольшую — сѣченіе плоскостью перпендикулярною къ первой и составляющею уголъ $\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$ съ плоскостью ZX. Эти нормальныя сѣченія называются *главными*, а кривизны ихъ — *главными кривизнами поверхности* въ разсматриваемой точкѣ.

Обозначимъ наибольшую кривизну знакомъ $\mathfrak{K}_M$, наименьшую — знакомъ $\mathfrak{K}_m$; изъ предыдущихъ формулъ найдемъ слѣдующія выраженія для суммы и произведенія этихъ кривизнъ:

$$\mathfrak{K}_M+\mathfrak{K}_m=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots\dots\dots\dots \quad (299)$$

$$\mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \dots\dots\dots \quad (300)$$

8. Изъ формулы (297) видно также, что сумма кривизнъ двухъ взаимно-ортогональныхъ нормальныхъ сѣченій въ каждой точкѣ поверхности есть величина постоянная, независящая отъ угла φ, опредѣляющаго положеніе сѣченій; формула (299) выражаетъ величину этой суммы.

9. Подобно тому, какъ средняя кривизна какой либо дуги измѣряется отношеніемъ нѣкотораго угла къ длинѣ дуги, аналогично этому средняя кривизна какой либо изогнутой площади измѣряется отношеніемъ нѣкотораго тѣлеснаго угла къ величинѣ площади.

Пусть S величина нѣкоторой площади, взятой на кривой поверхности и ограниченной замкнутымъ контуромъ.

Представимъ себѣ коническую поверхность, имѣющую вершиною начало координатъ, а производящими — линіи параллельныя нормалямъ къ поверхности, проведеннымъ черезъ точки контура площади S.

Представимъ себѣ, кромѣ того, сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ также въ началѣ координатъ.

Пусть Σ есть величина площади той части поверхности сферы, которая заключается внутри вышеозначенной конической поверхности.

Величина тѣлеснаго угла, образуемаго коническою поверхностью при ея вершинѣ, измѣряется отношеніемъ площади Σ въ единицѣ площади.

Отношеніе:

$$\frac{\Sigma}{S}\frac{1}{(\text{един. длины})^2}$$

называется *среднею кривизною* площади S.

Кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея A есть величина средней кривизны безконечно-малой площадки, заключающей въ себѣ (или на своемъ контурѣ) точку A.

Означимъ черезъ ν_x, ν_y, ν_z косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ; координаты точки, находящейся на поверхности вышеозначенной сферы, выразятся величинами:

$$(\text{един. длины})\,\nu_x=\frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(\text{един. длины})\,\nu_y=\frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(\text{един. длины})\,\nu_z=\frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Площади Σ и S выразятся слѣдующими интегралами:

$$\Sigma=(\text{един. длины})^2\int\int\frac{d\nu_x d\nu_y}{\nu_z};\quad S=\int\int\frac{dxdy}{\nu_z}.$$

IV-36.

Косинусы ν_x и ν_y могутъ быть выражены функціями отъ x и y; поэтому:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \int\int \left(\frac{\partial\nu_x}{\partial x}\frac{\partial\nu_y}{\partial y} - \frac{\partial\nu_x}{\partial y}\frac{\partial\nu_y}{\partial x}\right)\frac{dxdy}{\nu_z}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея выразится такъ:

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{\partial\nu_x}{\partial x}\frac{\partial\nu_y}{\partial y} - \frac{\partial\nu_x}{\partial y}\frac{\partial\nu_y}{\partial x}.$$

Если ось Z параллельна нормали, возстановленной изъ точки A поверхности, то, для этой точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\nu_x}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial\nu_y}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \ldots.$$

а поэтому кривизна въ точкѣ A выразится второю частью равенства (300); изъ этого слѣдуетъ, что во всякой точкѣ поверхности:

$$(\text{кривизна поверхности}) = \mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m \ldots\ldots\ \mathbf{(301)}$$

10. Нетрудно составить для суммы кривизнъ ортогональныхъ сѣченій и для кривизны поверхности болѣе общія выраженія, чѣмъ тѣ, которыя приведены выше (формулы (299) (300)); а именно, легко убѣдиться, что:

$$\mathfrak{K}_M + \mathfrak{K}_m = -\frac{\Delta_2 f}{\Delta f} + \frac{f_2\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{(\Delta f)^3}, \ldots\ldots\ \mathbf{(302)}$$

$$\mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m = -\frac{1}{(\Delta f)^4}\begin{vmatrix} 0, & f_x, & f_y, & f_z \\ f_x, & f_{xx}, & f_{xy}, & f_{xz} \\ f_y, & f_{xy}, & f_{yy}, & f_{yz} \\ f_z, & f_{xz}, & f_{yz}, & f_{zz} \end{vmatrix}; \ldots\ \mathbf{(303)}$$

здѣсь, въ опредѣлителѣ, производныя означены сокращенными знаками; въ выраженіи же (302):

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

11. Если уравненіе поверхности будетъ рѣшено относительно z и мы пожелаемъ выразить вышесказанныя величины въ p, q, r, s, t, то получимъ:

$$\mathfrak{K}_M+\mathfrak{K}_m=-\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \ldots\ldots \quad (304)$$

$$\mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (305)$$

§ 37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной неудерживающей поверхности.

Когда точка сходитъ съ поверхности, тогда та изъ ряда производныхъ:

$$\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}, \ldots\ldots$$

которая первая не обращается въ нуль, получаетъ значеніе положительное.

Слѣдовательно, если

$$\frac{df}{dt}=0,$$

то ускореніе точки, находящейся на данной неудерживающей поверхности, должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2}\geqslant 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (306)$$

Это условіе при неподвижной поверхности принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},N)\geqslant-\frac{v^2f_2(a_x,a_y,a_z)}{\Delta f}, \ldots\ldots\ldots \quad (307)$$

при подвижной поверхности неизмѣняемой формы — слѣдующій:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N)\geqslant-\frac{u^2\Phi_2(\alpha_\xi,\alpha_\eta,\alpha_\zeta)}{\Delta\Phi}, \ldots\ldots\ldots \quad (308)$$

а при деформирующейся поверхности — слѣдующій:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N) \geqslant -\frac{u^2 f_2(c_1, c_2, c_3)}{\Delta f} \text{ . . . . } \mathbf{(309)}$$

Если же скорость точки составляетъ острый уголъ съ нормалью, то есть, если

$$\frac{df}{dt} > 0,$$

то ускореніе ея не подлежитъ никакому ограниченію.

§ 38. Итакъ, абсолютная скорость и абсолютное ускореніе матерьяльной точки, стѣсненной въ своемъ движеніи поверхностью:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0,$$

должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ.

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) = -\frac{\partial f}{\partial t} \text{ . . . . } \mathbf{(258)}$$

$$\Delta f \,.\, \dot{v}\cos(\dot{v},N) = -Kf, \text{ . . . . } \mathbf{(310)}$$

гдѣ Kf есть сокращенное обозначеніе слѣдующаго выраженія:

$$v^2 f_2(a_x,\ a_y,\ a_z) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial z}z'\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ . . } \mathbf{(271)}$$

$$v^2 f_2(a_x,\ a_y,\ a_z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2 + \dots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x'y'.$$

2. Если точка находится на поверхности неудерживающей, то абсолютная скорость должна удовлетворять условію:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) \geqslant -\frac{\partial f}{\partial t}; \text{ . . . . } \mathbf{(275)}$$

a) если скорость удовлетворяетъ равенству:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускоренiе точки должно удовлетворять условiю:

$$\Delta f . \dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geqslant -Kf; \qquad (311)$$

b) если же скорость удовлетворяетъ неравенству:

$$\Delta f . v \cos(v, N) > -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускоренiе точки не подлежитъ никакому ограниченiю.

3. Если точка находится внѣ неудерживающей поверхности, то ни скорость, ни ускоренiя ея не подлежатъ никакимъ ограниченiямъ.

§ 39. Реакцiя поверхности.

Три основныя начала (§ 14), *положенныя въ основанiе механики свободной точки, составляютъ также основанiе механики несвободной матерьяльной точки.*

На основанiи этихъ началъ, абсолютное ускоренiе, сообщаемое несвободной матерьяльной точкѣ всѣми силами, одновременно приложенными къ ней, имѣетъ направленiе равнодѣйствующей этихъ силъ и равно величинѣ равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки.

Въ силу тѣхъ же началъ, зная абсолютное ускоренiе несвободной матерьяльной точки, мы дѣлаемъ заключенiе о величинѣ и направленiи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Изъ этого и изъ условiй, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, стѣсненной въ своихъ движенiяхъ поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

удовлетворяетъ слѣдующимъ условiямъ:

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку, то проэкцiя на нормаль къ поверхности *равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна*

$$-m\frac{Kf}{\Delta f} \qquad (312)$$

2. Если поверхность неудерживающая и точка находится на ней и если

a) скорость точки перпендикулярна къ нормали, то проэкція вышесказанной равнодѣйствующей на нормаль

$$\text{не} < -m\frac{Kf}{\Delta f}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(313)}$$

b) если же скорость точки составляетъ острый уголъ съ нормалью, то вышесказанная равнодѣйствующая не подлежитъ никакому ограниченію.

Разсматриваемая поверхность преграждаетъ всякія движенія матерьяльной точки, несогласныя съ существованіемъ преграды.

Причина такого дѣйствія преграды должна заключаться въ образованіи силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, и появляющейся только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ матерьяльную точку преодолѣть преграду *); такая сила называется *реакціею преграды.*

Реакція преграды развивается до такой величины и получаетъ такое направленіе, что равнодѣйствующая, составленная изъ нея и изъ всѣхъ *прочихъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ, удовлетворяетъ тому изъ условій (312), (313), которое свойственно имѣющейся преградѣ.

Эти *прочія* силы мы условимся называть *задаваемыми силами.*

Итакъ, равнодѣйствующая изъ задаваемой силы F, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся на удерживающей поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

и изъ реакціи R этой преграды, должна удовлетворять условію (312), то есть:

$$F\cos(F,N) + R\cos(R,N) = -m\frac{Kf}{\Delta f} \ldots\ldots \quad \textbf{(312)}$$

---

*) Причинами движенія, побуждающими къ этому матерьяльную точку, могутъ быть не только всѣ прочія (за исключеніемъ реакціи преграды) силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, но также и инерція ея.

Это равенство опредѣляетъ только величину проэкціи реакціи на нормаль; проэкція же реакціи на касательную плоскость остается неопредѣленною, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Такой результатъ получили мы, разсматривая преграду, какъ кинематическое условіе, стѣсняющее свободу движенія точки нѣкоторою поверхностью, и не дѣлая никакихъ предположеній, ни относительно вида и физической природы тѣлъ, образующихъ преграду, ни относительно природы вещества матерьяльной точки; поэтому то мы получили вполнѣ опредѣленную величину для той части реакціи, которая существенно необходима для удовлетворенія условію, положенному преградою.

Вслѣдствіе этого мы вправѣ принять, что сила $R\cos(R,N)$, направленная по нормали къ поверхности, есть собственно *реакція поверхности*; составляющую же $R\sin(R,N)$, дѣйствующую въ касательной плоскости, мы отнесемъ къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ тѣлъ, образующихъ преграду; объ этой составляющей будемъ говорить ниже.

Въ силу вышесказаннаго, мы будемъ принимать, что

реакція поверхности на матерьяльную точку, находящуюся на этой поверхности, направлена по нормали къ поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена по положительной или по отрицательной нормали; въ первомъ случаѣ величина ея $\mathfrak{N}$, опредѣляемая по формулѣ:

$$\mathfrak{N} = -m\frac{Kf}{\Delta f} - F\cos(F,N), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

выразится числомъ положительнымъ, во второмъ — отрицательнымъ; сообразно съ этимъ, мы будемъ называть реакцію, направленную по положительной нормали — *положительною*, а направленную по отрицательной нормали — *отрицательною*.

Если движеніе матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности будетъ извѣстно, то формула (312) дастъ намъ величину реакціи во всякій моментъ движенія.

§ 40. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ.

Пусть

$$f(x, y, z, t) = 0$$

есть уравненіе поверхности, m — масса матерьяльной точки, X, Y, Z — проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ.

Проэкціи реакціи на оси координатъ будутъ:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой точки (въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ) будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (314)$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (315)$$

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и гдѣ координаты x, y, z связаны уравненіемъ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (316)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ изъ уравненій (314), вслѣдствіе чего получатся два дифференціальныя уравненія, не заключающія λ; эти уравненія интегрировать, принимая во вниманіе, что x, y, z и t связаны уравненіемъ (316).

Для опредѣленія же λ имѣемъ формулу:

$$\lambda = -\frac{\left(mKf + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{(\Delta f)^2}, \ldots\ldots (317)$$

$\mathfrak{N} = \lambda . \Delta f = \ldots\ldots$

или же можно опредѣлить λ изъ котораго либо изъ уравненій (314).

§ 41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (314) можно составить уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt} = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'\right),$$

если поступить такъ, какъ во второй половинѣ параграфа 21-го. стр. 86.

Это уравненіе получитъ видъ уравненія (111) того же параграфа, если поверхность неподвижна, потому что тогда при всякомъ положеніи точки имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0.$$

Разсуждая затѣмъ такъ же, какъ въ § 26, мы придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной поверхности неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы, выражаемому интеграломъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \ldots\ldots\ldots\ldots (150)$$

§ 42. Геодезическая линія.

Положимъ, что данная поверхность неподвижна и что приложенныя къ матерьяльной точкѣ *задаваемыя силы* взаимно уравновѣшиваются во все время движенія ея, тогда единственная

сила, приложенная къ точкѣ, будетъ реакція поверхности, величина и знакъ которой опредѣляется по формулѣ:

$$\mathfrak{N}=\lambda\Delta f=-m\frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots\dots\dots (318)$$

или (см. формулу 294):

$$\mathfrak{N}=mv^2\mathfrak{K},$$

гдѣ $\mathfrak{K}$ есть величина кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости точки.

Дифференціальныя уравненія (314) получатъ, въ этихъ случаяхъ, слѣдующій общій видъ:

$$mx''=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad my''=\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad mz''=\lambda\frac{\partial f}{\partial z};\ \dots\dots (319)$$

интегралъ, выражающій законъ живой силы, будетъ:

$$\frac{mv^2}{2}=h,$$

или

$$v^2=v_0^2;$$

это означаетъ, что *скорость матерьяльной точки сохраняетъ постоянную величину.*

Такъ какъ скорость постоянна, то проэкція ускоренія на касательную къ траэкторіи равна нулю, а потому проэкціи ускоренія на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$x''=v_0^2\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho X)$$

$$y''=v_0^2\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho Y)$$

$$z''=v_0^2\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho Z).$$

Подставивъ эти выраженія въ дифференціальныя уравненія (319), найдемъ, что они получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial z};\quad \ldots \quad \mathbf{(320)}$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{\cos(\rho,X)}{\cos(N,X)}=\frac{\cos(\rho,Y)}{\cos(N,Y)}=\frac{\cos(\rho,Z)}{\cos(N,Z)},$$

то есть, что *радіусъ кривизны траэкторіи направленъ по нормали къ поверхности, а, слѣдовательно, плоскость кривизны ея проходитъ черезъ нормаль.*

Кривая линія, проведенная по поверхности такимъ образомъ, чтобы плоскость кривизны во всякой точкѣ ея заключала въ себѣ нормаль къ поверхности, возстановленную въ той же точкѣ, называется *геодезическою линіею.*

Слѣдовательно, *если къ матерьяльной точкѣ, удерживаемой неподвижною поверхностью, не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ, то точка, или находится въ покоѣ, или движется съ постоянною скоростью, описывая геодезическую линію;* эта линія проходитъ черезъ начальное положеніе точки и касается къ направленію начальной скорости.

Такимъ образомъ, каждая задача этого рода сводится на задачу о проведеніи по данной поверхности геодезической линіи черезъ данную точку и по данному направленію, проведенному изъ этой точки.

При рѣшеніи какъ этихъ, такъ и многихъ другихъ задачъ о движеніи точки по поверхности, выборъ системы координатъ, наиболѣе подходящей къ вопросу, играетъ весьма существенную роль, такъ какъ очень часто, при удачномъ выборѣ координатъ, формулы не только упрощаются, но и получаютъ бо́льшую наглядность.

Конечно, слѣдуетъ отдавать предпочтеніе такой системѣ координатъ, при которой заданная поверхность есть одна изъ координатныхъ поверхностей; напримѣръ, при движеніи точки по цилиндрической поверхности съ круговымъ сѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ оси, слѣдуетъ отдать предпочтеніе кругово-цилиндрической системѣ координатъ, ось которой совпадаетъ съ осью данной поверхности; движе-

I-42%.

ніе же точки по поверхности шара или по поверхности прямого кругового конуса удобнѣе разматривать въ сферическихъ координатахъ.

Примѣръ 25. Опредѣлимъ движеніе матерьяльной точки по боковой поверхности прямого круговаго конуса, предполагая, что къ ней не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ.

Возьмемъ вершину и ось конуса за полюсъ и за полярную ось сферической системы координатъ; пусть φ_0 есть уголъ между производящими и осью конической поверхности.

Нормалью къ поверхности будетъ служить координатная ось β; реакція $\mathfrak{R}$ будетъ направлена вдоль по β или по ея продолженію.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$r'' - r\sin^2\varphi_0 \,.\, (\psi')^2 = 0,$$

$$-r\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \,.\, (\psi')^2 = \frac{\mathfrak{R}}{m},$$

$$\frac{1}{r\sin\varphi_0}\,\frac{d(r^2\sin^2\varphi_0 \,.\, \psi')}{dt} = 0.$$

(Проэкціи ускоренія на координатныя оси сферическихъ координатъ: см. стр. 255, формулы (203) кинематической части).

Третье изъ этихъ уравненій дастъ интегралъ:

$$r^2\psi' = C_1 = r_0\frac{v_0\cos(v_0\gamma)}{\sin\varphi_0},$$

второе служитъ для опредѣленія величины и знака реакціи:

$$\mathfrak{R} = -\frac{mC_1^2}{r^3}\sin\varphi_0\cos\varphi_0,$$

первымъ же мы не воспользуемся теперь вовсе, такъ какъ уже имѣемъ еще одинъ интегралъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2\sin^2\varphi_0(\psi')^2 = v_0^2.$$

Изъ этихъ первыхъ интеграловъ, слѣдуя обычному пріему, получимъ слѣдующее уравненіе траэкторіи:

$$r\cos(\psi\sin\varphi_0 + \Gamma_1) = \frac{C_1\sin\varphi_0}{v_0}, \qquad \textbf{(321)}$$

гдѣ Γ_1 — произвольная постоянная.

Если коническая поверхность будетъ развернута на плоскость, положеніе точекъ на которой будетъ выражено въ полярныхъ координатахъ:

$$\rho = r, \quad \Theta = \psi \sin \varphi_0,$$

то геодезическая кривая (321) обратится въ прямую линію:

$$\rho \cos(\Theta + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{v_0}.$$

Величина завитія *) геодезической линіи въ какой либо точкѣ ея можетъ быть выражена произведеніемъ изъ полуразности главныхъ кривизнъ поверхности въ этой точкѣ и синуса удвоеннаго угла, составляемаго плоскостью кривизны геодезической линіи съ плоскостью одного изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій; для вывода этой формулы, возьмемъ общее выраженіе завитія какой либо кривой, приведенное на стр. 260 кинематической части, (формулы (311) и (312)), и примѣнимъ его къ геодезической линіи, для которой:

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2} = \cos(N, X); \quad \rho \frac{d^2y}{ds^2} = \cos(N, Y); \quad \rho \frac{d^2z}{ds^2} = \cos(N, Z).$$

Положимъ, что плоскость XY параллельна касательной плоскости къ поверхности въ той точкѣ, къ которой относится нашъ выводъ; тогда, въ этой точкѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \cos(\rho, X) = 0, \quad \cos(\rho, Y) = 0,$$

$$\frac{dx_Ъ}{ds} = 0, \quad \frac{dy_Ъ}{ds} = 0;$$

(послѣднія два равенства слѣдуютъ изъ формулъ (313), стр. 261 кинематической части).

---

*) См. стр. 259 кинематической части.

Кромѣ того, замѣтимъ, что между тремя радіусами кривизны: ρ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{g}$ существуетъ слѣдующая зависимость:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\mathfrak{R}^2}+\frac{1}{\mathfrak{g}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (325)$$

§ 44. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи по данной удерживающей поверхности матерьяльной точки, подверженной заданнымъ силамъ.

Примѣръ 26-й. На боковой поверхности прямого круговаго конуса находится матерьяльная точка, притягиваемая къ оси конуса силою, пропорціональною разстоянію отъ нея; опредѣлить движеніе точки.

Воспользуемся сферическими координатами также, какъ и въ примѣрѣ 25-мъ.

Разстояніе точки до полярной оси выразится произведеніемъ изъ r на синусъ угла φ_0; очевидно, что потенціалъ данной притягивающей силы будетъ:

$$-m\frac{\mu^2}{2}r^2\sin^2\varphi_0,$$

гдѣ μ^2 есть постоянный коэффиціентъ.

По закону живой силы:

$$(r')^2+r^2\sin^2\varphi_0(\psi')^2=2h-\mu^2r^2\sin^2\varphi_0 \ldots\ldots (326)$$

Другой интегралъ, такой же, какъ въ примѣрѣ 25-мъ, получается изъ дифференціальнаго уравненія, выражающаго, что проэкція ускоренія на ось γ равна нулю; этотъ интегралъ:

$$r^2\sin^2\varphi_0\,.\,\psi'=C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (327)$$

Такъ какъ проэкція силы на ось β равна отрицательно-взятой величинѣ ея, помноженной на $\cos\varphi_0$, то реакція по положительной оси β выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{N}=-mr\sin\varphi_0\cos\varphi_0((\psi')^2-\mu^2),$$

то есть слѣдующею функціею отъ r:

$$\mathfrak{N}=-m\cos\varphi_0\left(\frac{C_1^2}{(r\sin\varphi_0)^3}-\mu^2r\sin\varphi_0\right) \ldots\ldots (328)$$

Изъ интеграловъ (326) и (327), при помощи обычнаго пріема, получимъ уравненіе траэкторіи и опредѣлимъ движеніе точки по ней.

Слѣдуетъ замѣтить, что, если развернуть боковую поверхность конуса на плоскость, то точка на поверхности конуса, имѣющая сферическія координаты r, ψ, изобразится на плоскости точкою, имѣющею полярныя координаты r, $\theta = \psi \sin \varphi_0$; для того же, чтобы всякая неразрывная линія, находящаяся на поверхности конуса, изобразилась неразрывною же линіею на плоскости, необходимо представить себѣ, что боковая поверхность конуса состоитъ изъ безчисленнаго множества безконечно-тонкихъ слоевъ, составляющихъ цѣлую поверхность, навернутую на боковую поверхность конуса безчисленное число разъ.

Введя θ въ интегралы (326) и (327), приведемъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$(r')^2 + r^2(\Theta')^2 = 2h - (\mu \sin \varphi_0)^2 r^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(329)}$$

$$r^2\Theta' = \frac{C_1}{\sin \varphi_0}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(330)}$$

а это суть первые интегралы движенія на плоскости матерьяльной точки, подверженной притяженію:

$$(\mu \sin \varphi_0)^2 \cdot r = \mu^2 (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$$

къ началу координатъ *).

Отсюда видно, что рѣшеніе данной задачи сводится на рѣшеніе другой задачи о движеніи матерьяльной точки той же массы на плоскости подъ вліяніемъ силы, направленной по радіусу вектору и равной проэкціи заданной силы на производящую конической поверхности.

Эту вторую точку мы назовемъ изображеніемъ данной. При рѣшеніи задачи о движеніи этого изображенія на плоскости, надо имѣть въ виду, что начальное положеніе его имѣетъ слѣдующія координаты: r_0 и $(\psi_0 \sin \varphi_0)$, гдѣ r_0 и ψ_0 суть начальныя координаты данной точки; кромѣ того, данная точка и ея изображеніе имѣютъ начальныя скорости одинаковой величины и составляющія одинаковые углы съ производящею.

Рѣшивъ задачу о движеніи изображенія на плоскости, можемъ перейти къ рѣшенію данной задачи, представивъ себѣ, что плоскость, съ движущимся по ней изображеніемъ, снова навернута на поверхность конуса;

---

*) Эта сила есть проэкція заданной силы на производящую конуса.

тогда изображенiе будетъ совершать на поверхности конуса то самое движенiе, которое совершаетъ данная точка.

Въ настоящемъ случаѣ изображенiе движется на плоскости по эллипсу, имѣющему центръ въ началѣ координатъ.

Примѣчанiе. Такимъ же образомъ могутъ быть рѣшены и многiе другiе вопросы о движенiи матерьяльной точки по развертываемой на плоскость линейчатой поверхности подъ влiянiемъ заданной силы, направленной вдоль по той производящей, на которой точка находится. Каждая такая задача сводится на задачу о движенiи изображенiя точки по поверхности, развернутой на плоскость, и при дѣйствiи той же силы, направленной по той прямой линiи, которою производящая изобразится.

Предлагаемъ читателю рѣшить, напримѣръ, вопросъ о движенiи по данной конической поверхности матерьяльной точки, притягиваемой къ вершинѣ поверхности силою, обратно пропорцiональною квадрату разстоянiя отъ нея.

Примѣръ 27-й. Движенiе тяжелой матерьяльной точки по поверхности неподвижной сферы.

Возьмемъ полюсъ сферическихъ координатъ въ центрѣ сферы, полярную ось направимъ параллельно направленiю силы тяжести.

Такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенцiалъ mgz, поверхность же неподвижна, то движенiе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2 = 2h + 2gz, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (331)$$

или:

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (332)$$

Проэкцiя силы тяжести на координатную ось γ равна нулю; поэтому:

$$R^2 \sin^2\varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} = C = Rv_0 \sin\varphi_0 \cos(v_0\gamma); \ldots\ldots \quad (333)$$

(332) и (333) суть первые интегралы движенiя.

Реакцiя, направленная по координатной оси α или противоположно ей, выразится формулою:

$$\frac{\mathfrak{R}}{m} = -g\cos\varphi - \frac{v^2}{R} = -\frac{(gz + v^2)}{R} \ldots\ldots\ldots \quad (334)$$

Далѣе, для опредѣленiя движенiя точки, произведемъ слѣдующiя дѣйствiя:

Исключимъ ψ' изъ интеграла (331):

$$R^2(\varphi')^2+R^2\sin^2\varphi(\psi')^2=2h+2gz$$

изъ интеграла (333); получимъ:

$$(R\sin\varphi\,.\,\varphi')^2=\frac{2g}{R^2}\,U, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (335)$$

гдѣ U есть слѣдующій многочленъ третьей степени отъ z:

$$U=\left(\frac{h}{g}+z\right)(R^2-z^2)-\frac{C^2}{2g}, \quad \ldots\ldots\ldots (336)$$

а координата z равняется $R\cos\varphi$.

Изъ дифференціальнаго уравненія (335) видно, что координата z движущейся точки не можетъ сдѣлать многочленъ U отрицательнымъ, такъ какъ это противорѣчило бы знаку первой части этого уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что движущаяся точка не можетъ пройти ни черезъ нижнюю, ни черезъ верхнюю точку сферы, потому что въ нихъ $z^2=R^2$ и многочленъ (336) получаетъ отрицательное значеніе.

При $z=z_0$ многочленъ получаетъ положительное значеніе, а именно:

$$U_0=\frac{v_0^2}{2g}R^2\sin^2\varphi_0\sin^2(v_0\gamma).$$

Изъ этого видно, что U должно имѣть одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между $z=-R$ и $z=z_0$ и одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между z_0 и $z=+R$; первый корень означимъ черезъ z_2 или $R\cos\alpha$, второй — чрезъ z_1 или $R\cos\beta$.

Многочленъ U получаетъ положительныя значенія для всякихъ z, заключающихся между предѣлами z_1 и z_2, а потому траэкторія движенія расположена между параллельными кругами: нижнимъ $\varphi_1=\beta$ и верхнимъ $\varphi_2=\alpha$ *).

Третій корень z_3 многочлена U имѣетъ величину отрицательную, меньшую $(-R)$; это видно изъ того, что при $z=-\infty$ многочленъ обращается въ $+\infty$, а при $z=-R$ получаетъ отрицательное значеніе.

Изъ двухъ параллельныхъ круговъ, служащихъ предѣлами траэкторіи,

---

*) При $\cos(v_0\gamma)=1$ можетъ быть три случая:

1) $z_0=z_1$, 2) $z_0=z_2$, 3) $z_1=z_2=z_0$.

IY-44.

верхній можетъ находиться на верхней или на нижней полусферѣ (т.-е. z_2 можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ), нижній же параллельный кругъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть на верхней полусферѣ, что сейчасъ докажемъ.

Между коэффиціентами многочлена U и корнями уравненія $U=O$ существуетъ зависимость, выражаемая тремя равенствами:

$$z_1+z_2+z_3=-\frac{h}{g}$$

$$z_1z_2+(z_1+z_2)z_3=-R^2$$

$$z_1z_2z_3=\frac{h}{g}R^2-\frac{C^2}{2g}.$$

Изъ втораго получимъ:

$$z_3=-\frac{z_1z_2+R^2}{z_1+z_2}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (337)$$

исключивъ же изъ всѣхъ трехъ, какъ z_3, такъ и $\frac{h}{g}$, найдемъ слѣдующее равенство:

$$-\frac{(z_1z_2+R^2)^2}{z_1+z_2}+(z_1+z_2)R^2=-\frac{C^2}{2g},$$

или:

$$\frac{(R^2-z_1^2)(R^2-z_2^2)}{z_1+z_2}=\frac{R^4\sin^2\beta\sin^2\alpha}{z_1+z_2}=\frac{C^2}{2g}\ldots\ldots \quad (338)$$

Отсюда видно, что сумма (z_1+z_2) должна быть непремѣнно величиною положительною; а такъ какъ и разность (z_1-z_2) болѣе нуля, то z_1 не можетъ быть величиною отрицательною.

Такъ какъ z, находящееся въ уравненіи (335), должно быть не болѣе z_1 и не менѣе z_2, то выразимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$z=z_1\cos^2\eta+z_2\sin^2\eta=z_1-(z_1-z_2)\sin^2\eta;\ldots \quad (339)$$

тогда будутъ:

$$z-z_1=-(z_1-z_2)\sin^2\eta,\quad z-z_2=(z_1-z_2)\cos^2\eta,$$

$$z-z_3=\frac{R^2+2z_1z_2+z_1^2}{z_1+z_2}(1-k^2\sin^2\eta),$$

$$-R\sin\varphi d\varphi=dz=-2(z_1-z_2)\sin\eta\cos\eta d\eta,\ldots \quad (340)$$

гдѣ:

$$k^2 = \frac{z_1^2 - z_2^2}{R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2}; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (341)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (335) получитъ такой видъ:

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R}\left(\frac{R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2}{2R(z_1 + z_2)}\right)(1 - k^2\sin^2\eta),$$

откуда:

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm\sqrt{1 - k^2\sin^2\eta}\sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{(R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2)}{2R(z_1 + z_2)}} \ldots \quad (342)$$

Разность $(1 - k^2\sin^2\eta)$ не можетъ обратиться въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ η, потому что, какъ сейчасъ покажемъ, k^2 менѣе единицы, если только корни z_1 и z_2 не равны.

Въ самомъ дѣлѣ, составивъ выраженіе для $(1 - k^2)$:

$$1 - k^2 = \frac{R^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2} = \frac{R^2 - z_1^2 + (z_1 + z_2)^2}{R^2 - z_2^2 + (z_1 + z_2)^2}$$

и принявъ во вниманіе, что z_1^2 болѣе z_2^2, мы заключимъ, что k^2 менѣе единицы.

Такъ какъ вторая часть уравненія (342) не можетъ обратиться въ нуль, то производная η' не можетъ измѣнить своего знака ни разу во все время движенія; такъ что знакъ начальнаго значенія ея η'_0 опредѣляетъ знакъ корня второй части уравненія (342).

Начальное значеніе производной η' выражается формулою:

$$\eta_0' = \frac{-z_0'}{2(z_1 - z_2)\sin\eta_0\cos\eta_0},$$

а начальная величина z_0 опредѣляетъ величину квадрата синуса η_0:

$$\sin^2\eta_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2}; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (343)$$

знаки же величинъ $\sin\eta_0$ и $\cos\eta_0$ предыдущими формулами не опредѣляются и могутъ быть выбраны по нашему произволу; если мы условимся, что:

$$\left.\begin{array}{l} 0 > \eta_0 > -\frac{\pi}{2} \text{ при } z_0' > 0, \\ 0 < \eta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ при } z_0' < 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (344)$$

то η'_0 будетъ во всякомъ случаѣ болѣе нуля, а потому корню второй части уравненія (342) должны будемъ приписать знакъ положительный.

Слѣдовательно, при соблюденіи условій (344), уголъ η будетъ непрерывно возрастать вмѣстѣ съ временемъ по закону, выражаемому формулою:

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{2R(z_1+z_2)}{R^2+2z_1z_2+z_1^2}}\Big(F(\eta,k)-F(\eta_0,k)\Big),\ \ldots\ (345)$$

гдѣ $F(\eta,k)$ означаетъ слѣдующій интегралъ:

$$F(\eta,k)=\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}},\ \ldots\ldots\ldots\ (346)$$

$F(\eta_0,k)$ — такой же интегралъ, имѣющій η_0 верхнимъ предѣломъ.

Интегралъ $F(\eta,k)$, называемый эллиптическимъ интеграломъ перваго рода, выражаетъ нѣкоторую трансцендентную функцію отъ η; намъ должно ознакомиться съ нѣкоторыми свойствами этого интеграла.

1) Во первыхъ, очевидно:

$$F(-\eta,k)=-F(\eta,k)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (347)$$

2) Во вторыхъ, замѣнивъ, подъ интеграломъ (346), η черезъ $(\zeta-\pi)$ получимъ слѣдующее равенство:

$$\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}=\int_{\pi}^{\eta+\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}},$$

или:

$$F(\eta,k)=\int_0^{\eta+\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}}-\int_0^{\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}},$$

то есть:

$$F(\eta,k)=F(\eta+\pi,k)-F(\pi,k)$$

$$F(\eta+\pi,k)=F(\eta,k)+F(\pi,k)\ \ldots\ldots\ldots\ (348)$$

3) Положивъ въ послѣдней формулѣ η равнымъ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и принявъ во вниманіе, что на основаніи формулы (347):

$$F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right)=-F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\frac{1}{2}F(\pi, k)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(349)}$$

4) Далѣе, изъ формулъ (348) и (349) найдемъ:

$$F\left(\frac{3\pi}{2}, k\right)=3F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

и такъ далѣе; такъ что, если n есть цѣлое число, то:

$$F\left(\frac{n\pi}{2}, k\right)=nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(350)}$$

5) Пусть $\eta=n\pi+\lambda\pi$, гдѣ n есть цѣлое число, а λ — дробь, меньшая единицы; примѣняя n разъ формулу (348), найдемъ:

$$F(\eta, k)=F(\lambda\pi, k)+nF(\pi, k)\ldots\ldots\ldots \textbf{(351)}$$

6) Наконецъ, положимъ въ формулѣ (348) $\eta=-\lambda\pi$, гдѣ λ — дробь, меньшая половины:

$$F(\pi-\lambda\pi, k)=F(-\lambda\pi, k)+F(\pi, k);$$

отсюда, на основанiи равенствъ (347) и (349), получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)-F(\lambda\pi, k)=F(\pi-\lambda\pi, k)-F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\ldots \textbf{(352)}$$

Знанiе этихъ свойствъ интеграла (346) позволяетъ намъ вывести слѣдующiя заключенiя изъ равенствъ (346) и (339).

Назовемъ черезъ τ тотъ моментъ времени, въ который, при отрицательномъ η_0, уголъ η обращается въ нуль; при положительномъ η_0 моментъ τ будетъ отрицательнымъ.

Проэкцiя скорости движущейся точки на ось β будетъ обращаться въ нуль каждый разъ, какъ она приходитъ на одну изъ крайнихъ параллелей; это будетъ въ слѣдующiе моменты:

$$t=\tau,\ \tau+\frac{T}{2},\ \tau+T,\ \tau+\frac{3}{2}T,\ \tau+2T,\ \tau+\frac{5}{2}T, \ldots$$

гдѣ:

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{2R(z_1+z_2)}{R^2+2z_1z_2+z_1^2}}\,F\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

IV-44.

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi = \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \ldots\ldots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соотвѣтствуетъ уголъ φ_1, опредѣляемый по формулѣ:

$$\cos\varphi_1 = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\eta_1; \ldots\ldots, \quad (353)$$

наконецъ, пусть t_1 есть соотвѣтствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau + \frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи матерьяльная точка поднимется до параллели α, гдѣ будетъ въ моментъ $\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2, въ который η возрастетъ до величины $\eta_2 = (\pi - \eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin\eta_2 = \sin\eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - t_1 = t_2 - \left(\tau + \frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi = \beta$, снова начнетъ подыматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3, въ который η возрастетъ до величины $\eta_3 = \pi + \eta_1$, потому что тогда тоже $\sin\eta_3 = \sin\eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3 - t_1 = T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измѣненія угла ψ, возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{R^2\sqrt{2g}\sin\beta\sin\alpha}{(R^2 - z^2)\sqrt{z_1 + z_2}}, \ldots\ldots\ldots \quad (354)$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(v_0\gamma)$ болѣе нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ менѣе нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2}} \left(\frac{2Rd\eta}{(R^2 - z^2)\Delta\eta}\right) \ldots \ldots (355)$$

гдѣ, для краткости, принято временно обозначеніе:

$$\Delta\eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встрѣчавшейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціальномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - z^2} = \frac{1}{R + z} + \frac{1}{R - z}, \ldots \ldots \ldots (355 \text{ bis})$$

затѣмъ выразимъ z въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta = 0$ до η; получимъ:

$$\psi - \Psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1z_2 + z_1^2}} \left[\frac{1}{(R + z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_1 \sin^2\eta)\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(R - z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_2 \sin^2\eta)\Delta\eta}\right], \ldots \ldots \ldots (356)$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{z_1 - z_2}{R + z_1}, \quad n_2 = \frac{z_1 - z_2}{R - z_1},$$

а Ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ τ.

Входящіе въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F, свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \quad L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \quad L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

IV-44.

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi=\beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \ldots\ldots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соотвѣтствуетъ уголъ φ_1, опредѣляемый по формулѣ:

$$\cos\varphi_1=\cos\beta-(\cos\beta-\cos\alpha)\sin^2\eta_1; \ldots\ldots, \quad (353)$$

наконецъ, пусть t_1 есть соотвѣтствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau+\frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи матерьяльная точка поднимется до параллели α, гдѣ будетъ въ моментъ $\left(\tau+\frac{T}{2}\right)$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2, въ который η возрастетъ до величины $\eta_2=(\pi-\eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin\eta_2=\sin\eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau+\frac{T}{2}\right)-t_1=t_2-\left(\tau+\frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi=\beta$, снова начнетъ подыматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3, въ который η возрастетъ до величины $\eta_3=\pi+\eta_1$, потому что тогда тоже $\sin\eta_3=\sin\eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3-t_1=T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измѣненія угла ψ, возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt}=\pm\frac{R^2\sqrt{2g}\sin\beta\sin\alpha}{(R^2-z^2)\sqrt{z_1+z_2}}, \ldots\ldots\ldots \quad (354)$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(v_0\tau)$ болѣе нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ менѣе нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \left(\frac{2R d\eta}{(R^2 - z^2)\Delta\eta}\right) \ldots\ldots (355)$$

гдѣ, для краткости, принято временно обозначеніе:

$$\Delta\eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встрѣчавшейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціальномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - z^2} = \frac{1}{R+z} + \frac{1}{R-z}, \ldots\ldots\ldots (355 \text{ bis})$$

затѣмъ выразимъ z въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta = 0$ до η; получимъ:

$$\psi - \Psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \left[\frac{1}{(R+z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_1 \sin^2\eta)\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(R-z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_2 \sin^2\eta)\Delta\eta}\right], \ldots\ldots\ldots (356)$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{z_1 - z_2}{R + z_1}, \quad n_2 = \frac{z_1 - z_2}{R - z_1},$$

а Ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ τ.

Входящіе въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F, свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \; L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \; L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

IV-44.

На основаніи этихъ свойствъ, можемъ вывести изъ предыдущихъ уравненій слѣдующее заключеніе относительно закона измѣненія угла ψ.

Во время каждаго перехода точки отъ одной изъ крайнихъ параллелей до другой, уголъ ψ возрастаетъ на одну и ту же величину ω, выражаемую опредѣленнымъ интеграломъ:

$$\omega = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{(R^2 - z^2)\Delta\eta} \cdot \ldots\ldots \quad (357)$$

Можно показать, что абсолютная величина угла ω болѣе прямаго угла.

Для того, чтобы доказать это, мы примемъ во вниманіе, что:

$$\frac{2R}{R^2 \sin^2\varphi} \cdot \frac{1}{\Delta\eta} > \frac{2R}{R^2 \sin^2\varphi},$$

такъ какъ $\Delta\eta$ менѣе единицы; поэтому:

$$+\sqrt{\omega^2} > \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2};$$

примѣнивъ, къ подъинтегральной функціи этого интеграла, разложеніе (355 bis) и выразивъ z функціею отъ η по формулѣ (339), мы легко опредѣлимъ величину каждаго изъ получившихся интеграловъ и найдемъ слѣдующее:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2} = \frac{\pi}{R} \frac{\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)}{\sin\alpha \cos\beta},$$

поэтому:

$$+\sqrt{\omega^2} > \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2R^2 + 2z_1 z_2 + 2R^2 \sin\alpha \sin\beta}{2R^2 + 2z_1 z_2 - R^2 \sin^2\beta}};$$

но этотъ корень, очевидно, болѣе единицы, такъ какъ $(+2\sin\alpha)$ болѣе, чѣмъ $(-\sin\beta)$, а потому и подавно абсолютная величина угла ω болѣе, чѣмъ $\frac{\pi}{2}$.

На чертежѣ 19-мъ представлена проэкція на горизонтальную плоскость траэкторіи, описываемой точкою въ одномъ изъ такихъ движеній; наружный и внутренній круги суть проэкціи предѣльныхъ параллелей; углы a_1Ob_1, b_1Oa_2, a_2Ob_2, . . . равны ω.

Реакція $\mathfrak{N}$ по координатной оси z (т.-е. по продолженію радіуса вектора) выразится функціею одного z, если v^2, заключающееся въ формулѣ (334), будетъ исключено изъ нея при помощи выраженія (331); тогда получимъ:

$$\mathfrak{N}=-m\frac{(3gz+2h)}{R}\dots\dots\dots\dots\dots(358)$$

Обратимъ вниманіе на слѣдующіе случаи движенія точки.

Если корни z_1 и z_2 равны другъ другу, то многочленъ U можетъ быть представленъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$U=-(z-z_1)^2\frac{(R^2-z^2+(z+z_1)^2)}{2z_1},$$

а такъ какъ z_1 болѣе нуля, то при всякихъ z, относящихся къ точкамъ поверхности сферы, многочленъ U получаетъ отрицательныя значенія; исключеніе составляютъ лишь точки параллельнаго круга $z=z_1$, для которыхъ U обращается въ нуль.

Такъ какъ изъ уравненія (335) слѣдуетъ, что тогда (при $z=z_1$) производная φ' равна нулю, то точка будетъ двигаться по параллельному кругу и уголъ φ будетъ постоянно равенъ своей начальной величинѣ $\varphi_0 (z_1=R\cos\varphi_0)$.

Изъ выраженія (338) слѣдуетъ тогда:

$$C^2=gR^3\frac{\sin^4\varphi_0}{\cos\varphi_0},$$

съ другой же стороны, такъ какъ начальная скорость должна быть касательною къ кругу параллели $\varphi=\varphi_0$, изъ выраженія (333) получимъ

$$C^2=v_0^2R^2\sin^2\varphi_0;$$

изъ сравненія этихъ выраженій найдемъ, что квадратъ начальной скорости долженъ имѣть слѣдующую величину:

$$v_0^2=gR\frac{\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0};$$

эта скорость остается постоянною во все время движенія.

Движеніе по углу ψ опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{C}{R^2\sin^2\varphi_0}=\sqrt{\frac{g}{R\cos\varphi_0}};$$

слѣдовательно, движеніе равномѣрно и продолжительность одного полнаго оборота по окружности равна:

$$2\pi\sqrt{\frac{R\cos\varphi_0}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (359)$$

§ 45. Реакція неудерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена какъ по положительной, такъ и по отрицательной нормали.

1. Реакція направлена по положительной нормали тогда, когда:

см. 311

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}<0; \ldots\ldots\ldots (360)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по отрицательную сторону ея; а точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F, такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы слѣдующему неравенству:

$$\Delta f.\,\dot{v}\cos(\dot{v},N)+Kf<0,$$

то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2}<0.$$

2. Реакція направлена по отрицательной нормали тогда, когда:

см. 312

$$-N = F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}>0; \ldots\ldots\ldots (361)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по положительную сторону ея; точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F, такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы неравенству:

$$\Delta f.\,\dot{v}\cos(\dot{v},N)+Kf>0,$$

то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2} > 0,$$

Неудерживающая поверхность не оказываетъ никакого противодѣйствія причинамъ, побуждающимъ точку сойти съ поверхности по положительную сторону ея; а потому, если скорость точки, находящейся на поверхности, удовлетворяетъ равенству (258) (§ 38), а задаваемыя силы — неравенству (361), то реакція будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *неудерживающая поверхность не оказываетъ реакціи, направленной по отрицательной нормали; реакція ея можетъ быть направлена только по положительной нормали.*

3. Если скорость точки удовлетворяетъ равенству (258), а задаваемыя силы — неравенству (360), то неудерживающая поверхность оказываетъ реакцію по положительной нормали, противодѣйствуя точкѣ сойти внутрь непроницаемаго тѣла (дѣйствительнаго или воображаемаго), ограниченнаго этою поверхностью; величина реакціи, выражаемая формулою:

$$\mathfrak{N} = -F\cos(F,N) - m\frac{Kf}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

такова, что ускореніе точки, сообщаемое ей равнодѣйствующею силы F и реакціи $\mathfrak{N}$, удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 0.$$

Точка движется по неудерживающей поверхности до тѣхъ поръ, пока задаваемыя силы удовлетворяютъ неравенству (360); въ той точкѣ A поверхности, въ которой скорость точки и задаваемыя силы удовлетворятъ равенству:

$$F\cos(F,N) + m\frac{Kf}{\Delta f} = 0,$$

реакція обращается въ нуль.

Если, при дальнѣйшемъ движеніи точки по поверхности, сумма

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}$$

становится положительною, то движеніе точки по поверхности возможно только при существованіи реакціи, направленной по отрицательной нормали; но такой реакціи неудерживающая поверхность оказать не можетъ, а потому *точка должна сойти съ поверхности.*

Она сходитъ съ поверхности въ точкѣ A и движется далѣе свободно внѣ поверхности подъ вліяніемъ приложенныхъ къ ней заданныхъ силъ; начальною скоростью на этомъ свободномъ движеніи матерьяльной точки служитъ та скорость, съ которою она пришла въ точку A.

Такое движеніе продолжается до встрѣчи точки съ поверхностью.

Положимъ, что сфера, по которой движется тяжелая матерьяльная точка (примѣръ 27-й), не удерживаетъ точку отъ перемѣщеній внутрь ея полости; по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го, положительная нормаль въ этомъ случаѣ должна быть направлена къ центру сферы, то есть противоположно направленію положительной координатной оси z; въ примѣрѣ 27-мъ мы получили выраженіе (334) для реакціи по этой оси, поэтому реакція $\mathfrak{R}_N$ по положительной нормали къ сферѣ:

$$R^2-(x^2+y^2+z^2)=0$$

выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{R}_N=\frac{m}{R}(v^2+gz)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(362)$$

Изъ этой формулы видно, что движущаяся точка можетъ сойти съ поверхности сферы только въ тѣхъ точкахъ ея, въ которыхъ сумма (v^2+gz) обращается въ нуль, и послѣ того становится отрицательною.

Поэтому, если $z_2>0$, такъ что все движеніе точки совершается по нижней полусферѣ, то точка не оставитъ сферы.

Если же $z_2<0$ и притомъ сумма $(v_2^2+gz_2)$ тоже менѣе нуля, то движущаяся точка должна будетъ оставить поверхность, еще не дойдя до этой верхней параллели.

§ 46. Треніе матерьяльной точки о поверхность.

При движеніи одного тѣла по другому, будетъ ли это скольженіе или катаніе, является сопротивленіе движенію, называемое треніемъ.

Свѣдѣнія наши о законахъ тренія почерпнуты изъ наблюденій.

Разсматривая матерьяльную точку, находящуюся на данной поверхности, какъ неизмѣримо-малое тѣло, а поверхность — какъ поверхность реальнаго тѣла, и примѣняя къ нимъ законы тренія, найденные изъ наблюденій, можемъ высказать эти законы въ слѣдующемъ видѣ.

1) Треніе есть сопротивленіе движенію матерьяльной точки по поверхности, приложенное къ точкѣ и направленное противоположно относительной скорости точки по отношенію къ поверхности.

2) Треніе можетъ дѣйствовать и на точку, покоющуюся на поверхности, если проэкція на касательную плоскость равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ задаваемыхъ силъ не равна нулю; тогда треніе противоположно этой проэкціи.

3) Величина тренія, приложеннаго къ движущейся точкѣ, пропорціональна абсолютной величинѣ нормальной реакціи

$$\mathfrak{T} = k\sqrt{\mathfrak{N}^2} = k\Delta f . \sqrt{\lambda^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (363)$$

гдѣ квадратные корни предполагаются положительными.

Коэффиціентъ k есть отвлеченное число, величина котораго зависитъ отъ физической природы трущихся тѣлъ.

4) Величина тренія, приложеннаго къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ относительномъ покоѣ по отношенію къ данной поверхности, выражается тою же формулою (363), но численный коэффиціентъ можетъ принимать всякія величины, отъ нуля до нѣкотораго числа k_1, большаго k; такъ что треніе между взаимно-покоющимися тѣлами можетъ достигать бо́льшей величины, чѣмъ треніе между тѣми же тѣлами, находящимися въ относительномъ движеніи.

Предположивъ существованіе тренія, опредѣляемаго этими выведенными изъ опыта законами, можемъ составить слѣдующія диффе-

ренціальныя уравненія (365) движенія матерьяльной точки, находящейся на неподвижной поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z)=0, \dots\dots\dots\dots \quad (364)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dx}{dt}\dots\dots \quad (365, a)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dy}{dt}\dots\dots \quad (365, b)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dz}{dt}, \dots\dots \quad (365, c)$$

гдѣ X, Y, Z суть проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей изъ приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ задаваемыхъ силъ.

Нормальная реакція выразится здѣсь тою же самою формулою (317) *), какъ и для точки, неподверженной тренію; чтобы получить эту формулу изъ дифференціальныхъ уравненій, помножимъ каждое на ту частную производную отъ f, которая заключается во второмъ членѣ второй части этого уравненія, по сложеніи, воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

и (279); тогда получимъ:

$$-mf_2(x', y', z')=X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda(\Delta f)^2,$$

откуда слѣдуетъ такое выраженіе для реакціи по положительной нормали (въ случаѣ поверхности неподвижной):

$$\mathfrak{N}=\lambda\Delta f=-\frac{X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+mf_2(x', y', z')}{\Delta f}\dots \quad (366)$$

Если поверхность находится въ движеніи, или деформируется,

---

*) Примѣненною къ неподвижной поверхности.

то треніе будетъ противоположно относительной скорости матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность; поэтому тогда въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (365), вмѣсто отношеній:

$$\frac{x'}{v},\ \frac{y'}{v},\ \frac{z'}{v},$$

должны входить косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ относительной скорости съ неподвижными осями координатъ.

Примѣръ 28. По наклонной неподвижной плоскости движется тяжелая матерьяльная точка; опредѣлить движеніе, принимая въ разсчетъ треніе между точкою и плоскостью.

Пусть J есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту; расположимъ оси Xовъ и Yовъ въ наклонной плоскости, ось Xовъ — горизонтально, положительную ось Yовъ по линіи наибольшаго ската внизъ, положительную ось Zовъ направимъ перпендикулярно къ наклонной плоскости и притомъ вверхъ.

Здѣсь:

$$X=0,\ \ Y=mg\sin J,\ \ Z=-mg\cos J,$$

а уравненіе поверхности есть: $z=0$; поэтому формула (366) дастъ слѣдующую величину для реакціи по положительной оси Zовъ:

$$\mathfrak{N}=\lambda=mg\cos J.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ слѣдующія:

$$x''=-\frac{kg\cos J}{v}x',\ \ y''=g\sin J-\frac{kg\cos J}{v}y';$$

они тождественны съ дифференціальными уравненіями движенія свободной тяжелой матерьяльной точки въ вертикальной плоскости, если ускореніе силы тяжести равно $g\sin J$ и если движеніе происходитъ въ средѣ, оказывающей сопротивленіе постоянной величины $mkg\cos J$. Рѣшеніе такой задачи приведено на страницахъ 143—144 этой книги; примѣняя это рѣшеніе къ нашему примѣру, надо замѣнить: g — черезъ $g\sin J$, а k — черезъ $k\cot g J$.

§ 47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проэктированіе силъ и ускоренія на направленіе скорости, на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормальнаго сѣченія.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движеніи точки по неподвижной поверхности оказывается полезною слѣдующая форма дифференціальныхъ уравненій:

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos(F,v) - k\sqrt{\mathfrak{N}^2} \ldots\ldots\ldots (367, \mathrm{a})$$

$$\pm m\frac{v^2}{\mathfrak{g}} = F\cos(F,B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (367, \mathrm{b})$$

$$mv^2\mathfrak{K} = F\cos(F,N) + \mathfrak{N}; \ldots\ldots\ldots (367, \mathrm{c})$$

гдѣ N означаетъ направленіе положительной нормали, $\mathfrak{N}$ — реакцію по этой нормали, B — направленіе, перпендикулярное къ v и N, и имѣющее то же самое положеніе по отношенію къ направленіямъ v и N, какое имѣетъ положительная ось $Y^{\text{овъ}}$ по отношенію къ положительнымъ осямъ $X^{\text{овъ}}$ (v) и $Z^{\text{овъ}}$ (N); $\mathfrak{K}$ есть кривизна нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости v; отношеніе $(1:\mathfrak{g})$ есть геодезическая кривизна траэкторіи.

Дифференціальныя уравненія (367) получаются изъ равенствъ, выражающихъ, что проэкція ускоренія движущейся точки на каждое изъ направленій v, B, N равняется, дѣленной на массу точки, проэкціи на то же направленіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; изъ числа этихъ силъ, реакція направлена по N (или противоположно), а треніе — противоположно скорости. Въ самомъ дѣлѣ, проэкціи ускоренія на эти направленія выразятся такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},v) = \frac{dv}{dt}, \quad \dot{v}\cos(\dot{v},B) = \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,B)$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v},N) = \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,N),$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траэкторіи.

Но намъ извѣстно, что:

$$\frac{\cos(\rho,N)}{\rho} = \mathfrak{K} \ldots\ldots\ldots\ldots (294 \text{ bis})$$

(см. § 36 формулы (293) и (294)).

Далѣе, $\cos\,(\rho,B)=\pm\sin\,(\rho,N)$; гдѣ верхній знакъ долженъ быть въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе ρ составляетъ съ направленіемъ B острый уголъ; намъ же извѣстно (§ 43), что:

$$\frac{\sin(\rho,N)}{\rho}=\frac{1}{\mathfrak{g}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(324)}$$

а потому:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},B)=\pm\frac{v^2}{\mathfrak{g}};\quad \dot{v}\cos(\dot{v},N)=v^2\mathfrak{K}.$$

Примѣчаніе: Исключивъ величину ρ изъ равенствъ (294 bis) и (324), получимъ слѣдующее выраженіе геодезической кривизны:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}}=\mathfrak{K}\,\mathrm{tg}\,(\rho,N), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(368)}$$

поэтому дифференціальное уравненіе (367, b) можно писать и такъ:

$$\pm\, mv^2\mathfrak{K}\,\mathrm{tg}\,(\rho,N)=F\cos(F,B) \ldots . \mathbf{(367,\ b,\ bis)}$$

Этими уравненіями воспользуемся въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 29. Движеніе матерьяльной точки по какой либо неподвижной поверхности, предполагая, что, за исключеніемъ нормальной реакціи и тренія, никакихъ другихъ силъ не приложено къ точкѣ.

Въ этомъ случаѣ $F=0$, а потому изъ уравненія (367, b, bis) будетъ слѣдовать:

$$\mathrm{tg}\,(\rho,N)=0,$$

то есть, что плоскость кривизны траэкторіи проходитъ черезъ нормаль; значитъ траэкторія есть геодезическая линія.

Уравненіе (367, c) получитъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{N}=mv^2\mathfrak{K}=\pm\frac{mv^2}{\mathfrak{R}},$$

а поэтому уравненіе (367, a) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dv}{dt}=-k\frac{v^2}{\mathfrak{R}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(369)}$$

гдѣ $\mathfrak{R}$ есть величина радіуса кривизны нормальнаго сѣченія.

Если v разсматривать, какъ функцію отъ s, то уравненіе (369) представится такъ:

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds}=-2k\frac{v^2}{2\mathfrak{R}};$$

въ такомъ видѣ оно можетъ быть интегрируемо по s; получимъ:

$$v^2 = v_0^2 e^{f(s)};\quad f(s) = -2k\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\mathfrak{R}} \text{ . . . . } \mathbf{(370)}$$

Изъ этого выраженія видно, что скорость точки непрерывно уменьшается, приближаясь къ нулю ассимптотически; уменьшеніе это тѣмъ быстрѣе, чѣмъ болѣе коэффиціентъ тренія и чѣмъ болѣе кривизна геодезической линіи.

§ 48. При изложеніи механики отдѣльной несвободной точки, приходится принимать въ разсчетъ силовое дѣйствіе преграды на эту точку, состоящее изъ нормальной реакціи и тренія, приложенныхъ къ точкѣ; приэтомъ мы задаемъ себѣ движеніе, или кинематическое состояніе поверхности, образующей преграду, не принимая во вниманіе того, что матерьяльная точка оказываетъ, въ свою очередь, нѣкоторое силовое дѣйствіе на тѣла, образующія преграду.

Если, по характеру вопроса, окажется необходимымъ принять въ разсчетъ это дѣйствіе, то мы встрѣтимся съ однимъ изъ вопросовъ, относящихся къ механикѣ системы точекъ, потому что намъ придется тогда разсматривать преграду не какъ кинематическое условіе, но какъ систему движущихся матерьяльныхъ тѣлъ, или, по крайней мѣрѣ, какъ систему матерьяльныхъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что только при изложеніи механики системы точекъ представится настоятельная необходимость установить понятіе о силовомъ дѣйствіи матерьяльной точки на преграду; но мы сдѣлаемъ это теперь.

На время предположимъ, что матерьяльная точка m есть тѣло неизмѣримо-малыхъ размѣровъ.

При дѣйствіи преграды на точку m, одно изъ тѣлъ, образующихъ преграду, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ точкою m; напримѣръ, если преграда образуется поверхностью непроницаемаго тѣла, то матерьяльная точка m, когда она несвободна, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ этимъ тѣломъ, или, если матерьяльная точка находится на одномъ концѣ твердаго стержня, а другой конецъ его находится въ неподвижной

точкѣ, вокругъ которой стержень можетъ вращаться, то матерьяльная точка находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ концомъ стержня. То тѣло преграды, которое находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ несвободною матерьяльною точкою, назовемъ тѣломъ B.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть та точка преграждающей поверхности, въ которой матерьяльная точка m къ ней прикасается; эта точка $\mathfrak{M}$ принадлежитъ тѣлу B.

Относительно силоваго дѣйствія точки m на преграду, въ аналитической механикѣ дѣлается предположеніе, что это дѣйствіе есть сила, приложенная къ точкѣ $\mathfrak{M}$ тѣла B и направленная противоположно дѣйствію преграды на точку m.

Такимъ образомъ, взаимнодѣйствія между преградою и точкою m разсматриваются, какъ противоположныя взаимнодѣйствія между точкою m и точкою $\mathfrak{M}$ тѣла B; въ силу основнаго начала C (стр. 19) они суть силы равныя *).

Опредѣляя же матерьяльную точку, какъ массу, сосредоточенную въ геометрической подвижной точкѣ, мы должны будемъ придать слѣдующую форму опредѣленію понятія о силовомъ дѣйствіи точки m на преграду.

§ 49. Дѣйствіе матерьяльной точки на преграду. Давленіе точки на поверхность.

Опредѣленіе. Дѣйствіе матерьяльной точки m на преграду есть сила, приложенная къ той точкѣ $\mathfrak{M}$ преграждающей поверхности, съ которою m совпадаетъ; предполагается, что точка $\mathfrak{M}$

*) Съ точки зрѣнія молекулярной физики, взаимнодѣйствіе между двумя тѣлами A и B (черт. 20), являющееся при ихъ прикосновеніи, есть результатъ молекулярныхъ взаимнодѣйствій между каждою такою частицею a тѣла A и каждою такою частицею b тѣла B, разстояніе между которыми не болѣе радіуса дѣйствія частичныхъ силъ. Вслѣдствіе крайней малости этого радіуса, взаимнодѣйствіе между тѣлами, прикасающимися въ одной точкѣ K, приводится къ взаимнодѣйствію между весьма малыми частями α и β этихъ тѣлъ. Кромѣ того, такъ какъ молекулярныя силы взаимнодѣйствія между каждою парою частицъ предполагаются равными и прямо противоположными, то и взаимнодѣйствія между α и β оказываются равными и прямо противоположными.

есть вмѣстѣ съ тѣмъ одна изъ точекъ одного изъ тѣлъ, образующихъ преграду.

Сила, приложенная къ точкѣ $\mathfrak{M}$, состоитъ: изъ давленія точки m на поверхность, равнаго и противоположнаго реакціи по нормали, и изъ силы тренія, равной и противоположной силѣ тренія, приложенной къ точкѣ m.

Реакція неудерживающей поверхности можетъ быть направлена только по положительной нормали (§ 45), поэтому давленіе матерьяльной точки на такую поверхность можетъ быть направлено только по отрицательной нормали.

Полная величина силы дѣйствія матерьяльной точки на поверхность равна:

$$D=\sqrt{\mathfrak{N}^2+\varkappa^2\mathfrak{N}^2}=\mathfrak{N}\sqrt{1+\varkappa^2}; \dots\dots\dots \textbf{(371)}$$

направленіе ея составляетъ съ нормалью уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\varkappa$. Величина $\varkappa$ равняется коэфиціенту тренія k, если точка движется по поверхности; если же точка покоится на поверхности, то $\varkappa$ можетъ получать величины, заключающіяся въ предѣлахъ отъ нуля до k_1 (§ 46).

§ 50. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.

Если обѣ поверхности — удерживающія, то матерьяльная точка можетъ имѣть движеніе только по линіи пересѣченія поверхностей, а, слѣдовательно, скорость точки будетъ направлена по касательной къ этой кривой линіи.

Пусть:

$$f_1(x, y, z, t)=0 \dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(372)}$$

$$f_2(x, y, z, t)=0 \dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(373)}$$

суть уравненія поверхностей; положимъ, что нѣтъ тренія между матерьяльною точкою и поверхностями и что X, Y, Z суть проэкціи

на оси координатъ равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Кромѣ задаваемыхъ силъ, къ матерьяльной точкѣ приложены еще нормальныя реакціи обѣихъ поверхностей.

Проэкціи на оси координатъ реакціи первой поверхности суть:

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x},\ \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y},\ \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z};$$

проэкціи реакціи второй поверхности равны:

$$\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\ \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\ \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой матерьяльной точки будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (374)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), вслѣдствіе чего получится одно дифференціальное уравненіе, не заключающее этихъ множителей; полученное уравненіе надо интегрировать, принимая во вниманіе, что x, y, z и t связаны уравненіями (372) и (373). Постоянныя произвольныя опредѣлятся по начальному положенію точки и по начальной скорости ея.

Для опредѣленія величинъ реакцій поверхностей, составимъ, изъ дифференціальныхъ уравненій (374), слѣдующія два уравненія:

$$\lambda_1(\Delta f_1)^2+\lambda_2\Delta f_1\Delta f_2\cos(N_1,N_2)=m\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x''+\frac{\partial f_1}{\partial y}y''+\frac{\partial f_1}{\partial z}z''\right)-$$
$$-\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right),\ \ldots\ (375)$$

$$\lambda_1\Delta f_1 . \Delta f_2\cos(N_1,N_2)+\lambda_2(\Delta f_2)^2=m\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x''+\frac{\partial f_2}{\partial y}y''+\frac{\partial f_2}{\partial z}z''\right)-$$
$$-\left(X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\ldots\ldots\ (376)$$

Видъ вторыхъ частей этихъ уравненій показываетъ, какимъ образомъ они получились изъ уравненій (374); N_1 и N_2 означаютъ направленія положительныхъ нормалей къ поверхностямъ (372) и (373).

Члены, заключающіе ускореніе, могутъ быть исключены изъ уравненій (375) и (376), если принять во вниманіе, что ускореніе точки должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2}=0,\ \frac{d^2 f_2}{dt^2}=0,$$

то есть равенствамъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x''+\frac{\partial f_1}{\partial y}y''+\frac{\partial f_1}{\partial z}z''+Kf_1=0\ldots\ldots\ldots\ \mathbf{(377)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}x''+\frac{\partial f_2}{\partial y}y''+\frac{\partial f_2}{\partial z}z''+Kf_2=0;\ldots\ldots\ldots\ \mathbf{(378)}$$

вслѣдствіе этого, уравненія (375) и (376) получатъ такой видъ:

$$\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2\cos(N_1,N_2)=-\frac{\left(mKf_1+X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)}{\Delta f_1}.\ \mathbf{(379,\ a)}$$

$$\mathfrak{N}_1\cos(N_1,N_2)+\mathfrak{N}_2=-\frac{\left(mKf_2+X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)}{\Delta f_2};\ \mathbf{(379,\ b)}$$

гдѣ:

$$\mathfrak{N}_1=\lambda_1\Delta f_1,\ \ \mathfrak{N}_2=\lambda_2\Delta f_2.$$

Если первая поверхность есть неудерживающая, то матерьяльная точка не оставляетъ ее, пока реакція $\mathfrak{N}_1$ имѣетъ величину положительную (т.-е. направлена по положительной нормали N_1); въ той точкѣ кривой линіи, въ которой реакція $\mathfrak{N}_1$ обращается въ нуль, а при дальнѣйшемъ движеніи по кривой должна была бы стать отрицательною, въ такой точкѣ кривой линіи матерьяльная точка оставляетъ первую поверхность и кривую линію, не сходя со второй поверхности; при дальнѣйшемъ движеніи матерьяльной точки, λ_1 равно нулю.

Если обѣ поверхности неудерживающія, то матерьяльная точка можетъ оставить и ту и другую.

§ 51. Законъ живой силы для матерьяльной точки, движущейся по кривой линіи.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (374) составимъ уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt} = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z'\right) + $$
$$+ \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z'\right).$$

Если кривая неподвижна, то есть, если уравненія (372) и (373) не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то тогда условія:

$$\frac{df_1}{dt} = 0 \quad \frac{df_2}{dt} = 0$$

выразятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z' = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z' = 0,$$

и тогда первое уравненіе настоящаго параграфа получитъ видъ уравненія (111) параграфа 21-го.

Разсуждая далѣе такъ же, какъ въ § 26, придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы.

§ 52. Реакція неподвижной кривой линіи, удерживающей матерьяльную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.

Когда удерживающая кривая неподвижна, тогда то самое дифференціальное уравненіе, которое получается по исключеніи множителей λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), составится прямо, если выразимъ, что произведеніе изъ массы точки и проэкціи

ускоренія на направленіе скорости равняется проэкціи на то же направленіе равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,v)\,^{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(380, a)}$$

Выраженія (379, a, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проэкціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$; означимъ черезъ $\mathfrak{P}$ величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проэкцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проэкціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точки:

$$m\frac{v^2}{\rho}=F\cos(F,\rho)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho) \ldots\ldots\ldots \textbf{(380, b)}$$

Кромѣ того, сумма проэкцій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0=F\cos(F,b)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b); \ldots\ldots\ldots \textbf{(380, c)}$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось $Z^{\text{овъ}}$, если бы положительная ось $X^{\text{овъ}}$ имѣла направленіе скорости, а положительная ось $Y^{\text{овъ}}$ направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ $\mathfrak{P}$ заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполнѣ опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

---

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе (380, a) есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціальнаго уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2.

Если обѣ поверхности, выражаемыя уравненіями (372) (373)— удерживающія, то мы можемъ замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ паръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, a), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящіяся къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матерьяльную точку, оказывая реакцію $\mathfrak{P}$ тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матерьяльную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, a), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція* $\mathfrak{P}$ *кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проэкціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F \sin(F,v),$$

а проэкціи ея на направленія ρ и b равны проэкціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho) &= m\frac{v^2}{\rho} - F_n\cos(F_n,\rho) \\ \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b) &= \qquad\; - F_n\cos(F_n,b) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (381)$$

Реакція $\mathfrak{P}$ есть сила дѣйствія кривой линіи на матерьяльную точку m, приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матерьяльной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи $\mathfrak{P}$.

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

ускоренія на направленіе скорости равняется проэкціи на то же направленіе равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,v)\,^{*)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(380, a)}$$

Выраженія (379, a, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проэкціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$; означимъ черезъ $\mathfrak{P}$ величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проэкцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проэкціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точки:

$$m\frac{v^2}{\rho}=F\cos(F,\rho)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho)\;\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(380, b)}$$

Кромѣ того, сумма проэкцій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0=F\cos(F,b)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b);\;\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(380, c)}$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось $Z^{\text{овъ}}$, если бы положительная ось $X^{\text{овъ}}$ имѣла направленіе скорости, а положительная ось $Y^{\text{овъ}}$ направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ $\mathfrak{P}$ заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполнѣ опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

---

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе (380, a) есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціальнаго уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2.

Если обѣ поверхности, выражаемыя уравненіями (372) (373) — удерживающія, то мы можемъ замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ паръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, a), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящіяся къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матерьяльную точку, оказывая реакцію $\mathfrak{P}$ тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матерьяльную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, a), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція* $\mathfrak{P}$ *кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проэкціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F\sin(F,v),$$

а проэкціи ея на направленія ρ и b равны проэкціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho) &= m\frac{v^2}{\rho} - F_n\cos(F_n,\rho)\\ \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b) &= \qquad\; - F_n\cos(F_n,b)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (381)$$

Реакція $\mathfrak{P}$ есть сила дѣйствія кривой линіи на матерьяльную точку m, приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матерьяльной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи $\mathfrak{P}$.

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

а величина и направленіе его опредѣлятся по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} D\cos(D,\rho) &= F_n\cos(F_n,\rho) - m\frac{v^2}{\rho} \\ D\cos(D,b) &= F_n\cos(F_n,b) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (382)$$

Эти формулы выражаютъ, что *давленіе D есть равнодѣйствующая изъ силы F_n* (проэкціи силы F на нормальную плоскость), *и изъ силы $m\frac{v^2}{\rho}$, направленной противоположно главной нормали.*

$m\frac{v^2}{\rho}$

Эта, направленная отъ центра кривизны кривой, сила представляетъ ту часть давленія точки на кривую, которая производится стремленіемъ матерьяльной точки сохранить направленіе своего движенія; сила эта называется *центробѣжною силою.*

Реакція неподвижной кривой линіи есть равнодѣйствующая изъ силы равной и противоположной силѣ F_n и изъ силы, равной и противоположной центробѣжной силѣ.

(На чертежѣ 21 изображены: сила F_n линіею $\overline{MF_n}$, противоположная ей — линіею $\overline{MQ}$; центробѣжная сила — линіею $\overline{MЦ}$; сила, противоположная центробѣжной, изображена линіею $\overline{MK}$).

§ 53. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи матерьяльной точки по данной кривой линіи.

Примѣръ 30-й. Матерьяльная точка движется по какой либо неподвижной кривой линіи, касательная къ которой измѣняетъ свое направленіе непрерывнымъ образомъ вдоль по всей кривой; никакихъ силъ, кромѣ реакціи кривой, не приложено къ точкѣ.

Въ этихъ случаяхъ движеніе удовлетворяетъ закону живой силы, а потому v имѣетъ постоянную величину; далѣе, легко найдемъ: $s = s_0 + v_0 t$, если движеніе направлено въ сторону возрастающихъ s.

Давленіе точки на кривую приводится здѣсь къ одной только центробѣжной силѣ, которая, вслѣдствіе постоянства скорости, обратно пропорціональна радіусу кривизны.

Примѣръ 31-й. По какой либо кривой линіи движется матерьяльная точка, къ которой приложена сила, направленная по

касательной, и стремящаяся приблизить движущуюся точку къ нѣкоторой точкѣ S_0 кривой; величина силы пропорціональна величинѣ разстоянія движущейся точки отъ точки S_0.

Дифференціальное уравненіе (380, а) получитъ здѣсь слѣдующій видъ:

$$m\frac{dv}{dt}=-m\mu^2 s, \text{ когда } v=\frac{ds}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt}=\quad m\mu^2 s, \text{ когда } v=-\frac{ds}{dt};$$

такъ что, во всякомъ случаѣ:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-m\mu^2 s.$$

Интегралы этого дифференціальнаго уравненія:

$$v^2=\mu^2(q^2-s^2);\ q^2=s_0^{\ 2}+\frac{v_0^{\ 2}}{\mu^2},$$

$$s=q\sin(\mu t+c),\ c=\text{arc}\sin\frac{s_0}{q};$$

(см. стр. 66, примѣръ 8-й).

Давленіе матерьальной точки на кривую и здѣсь приводится къ одной центробѣжной силѣ.

Примѣръ 32-й. Движеніе тяжелой точки по циклоидѣ, заключающейся въ вертикальной плоскости XY, и расположенной такъ, какъ показано на чертежахъ 11 и 31 кинематической части; положительная ось Yовъ имѣетъ направленіе силы тяжести.

Уравненія кривой (см. стр. 14 кинематической части):

$$x=R(\omega+\sin\omega),\ y=R(1+\cos\omega).$$

Такъ какъ потенціалъ силы тяжести: $U=mgy$, то выраженіе закона живой силы будетъ, въ этомъ случаѣ, слѣдующее:

$$v^2-v_0^{\ 2}=2gR(\cos\omega-\cos\omega_0),$$

или:

$$v^2-v_0^{\ 2}=4gR\left(\sin^2\frac{\omega_0}{2}-\sin^2\frac{\omega}{2}\right).$$

или

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{4R}(s_0^2 - s^2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (383)$$

(см. стр. 53 и 54 кинематической части).

Равенству (383) дадимъ видъ:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4R}}\sqrt{q^2 - s^2}; \quad q^2 = s_0^2 + \frac{4Rv_0^2}{g};$$

интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$s = q\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{4R}} + c\right); \quad c = \arcsin\frac{s_0}{q} \quad \ldots\ldots \quad (384)$$

Давленіе на кривую состоитъ изъ центробѣжной силы и проэкціи силы тяжести на нормаль къ кривой:

$$D = m\left(\frac{v_0^2}{\rho} + g\cos(N, Y)\right),$$

гдѣ N означаетъ направленіе нормали, проведенной въ выпуклую сторону циклоиды.

По свойству циклоды, уголъ (N, Y) равенъ $\frac{\omega}{2}$ (см. стр. 54 и черт. 31 кинематической части) и радіусъ кривизны вдвое болѣе длины $\overline{MN}$ (см. тотъ-же чертежъ);

$$\overline{MN} = 2R\cos\frac{\omega}{2}, \quad \rho = 4R\cos\frac{\omega}{2}.$$

Такъ какъ:

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{16R^2 - s^2}}{4R},$$

то D выразится въ s слѣдующимъ образомъ:

$$D = \frac{mg}{4R}\frac{q^2 + 16R^2 - s^2 - s_0^2}{\sqrt{16R^2 - s^2}}.$$

Изъ выраженія (384) видно, что тяжелая матерьяльная точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе по циклоидѣ, отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ отъ нижней точки циклоиды; время T, потребное для

перехода точки изъ положенія $s=+q$ въ положеніе $s=-q$, или для обратнаго движенія, не зависитъ отъ величины q и равно

$$T=\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Примѣръ 33-й. Движеніе матерьяльной тяжелой точки по удерживающей окружности, заключающейся въ вертикальной плоскости.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось $Y^{овъ}$ направимъ вертикально внизъ, ось $X^{овъ}$ горизонтально въ плоскости круга.

По закону живой силы:

$$v^2=(2gy+v_0^2-2gy_0),$$

или

$$v^2=2g(y-b), \qquad (385)$$

гдѣ:

$$b=y_0-H,\quad H=\frac{v_0^2}{2g}.$$

Величины H и b имѣютъ слѣдующія значенія. Если представить себѣ, что свободная тяжелая матерьяльная точка будетъ брошена снизу вверхъ съ начальною скоростью v_0, то она поднимется на высоту H надъ тѣмъ уровнемъ, съ котораго она была брошена; если этотъ начальный уровень былъ $y=y_0$, то свободная тяжелая точка, брошенная вверхъ со скоростью v_0, поднимется до уровня $y=b$.

Если этотъ уровень пересѣкаетъ окружность (т.-е. если $b>-R$), то скорость обращается въ нуль въ точкахъ пересѣченія, какъ видно изъ уравненія (385); движеніе совершается только по той части окружности, которая ниже уровня $y=b$.

Если же этотъ уровень не пересѣкаетъ окружности (т.-е. если $b<-R$), то скорость движущейся точки не обращается въ нуль ни въ какой точкѣ окружности; въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$b=-R-l,$$

гдѣ l болѣе нуля, тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$v^2=2g(y+R+l),$$

а отсюда уже ясно видно, что v^2 не обращается въ нуль, пока точка

IV-53.

остается на окружности. Въ этихъ случаяхъ движеніе совершается по всей окружности безъ остановокъ и безъ перемѣны направленія скорости.

Эти два рода случаевъ разсмотримъ отдѣльно.

I. $b > -R$.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ движущейся точки съ положительною осью $Y^{\text{овъ}}$, тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(R\cos\varphi - b), \ldots\ldots\ldots (386)$$

или:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gR(\cos\varphi - \cos\beta) = 4gR\left(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

гдѣ:

$$\cos\beta = \frac{b}{R}.$$

Такъ какъ уголъ φ не можетъ быть болѣе β и не можетъ быть менѣе $(-\beta)$, то выразимъ синусъ половины этого угла слѣдующимъ образомъ:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\eta; \ldots\ldots\ldots\ldots (387)$$

тогда будетъ:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\eta\cdot\frac{d\eta}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots (388)$$

дифференціальное же уравненіе (386) получитъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$\frac{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}{\left(1 - \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta\right)} = \frac{g}{R},$$

или по извлеченіи корня и по отдѣленіи перемѣнныхъ:

$$\frac{d\eta}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}} = dt\sqrt{\frac{g}{R}} \ldots\ldots (389)$$

Корень, находящійся въ знаменателѣ первой части, не обращается въ нуль ни при какихъ дѣйствительныхъ величинахъ η, если только $\beta<\pi$, а потому этотъ корень долженъ сохранять свой знакъ во все время движенія; изъ этого слѣдуетъ, что и знакъ дифференціала $d\eta$ остается, во все время движенія, постояннымъ; знакъ этотъ опредѣлится изъ равенства (388), примѣненнаго къ начальному моменту.

Въ это равенство входитъ, однако, нѣкоторая величина, которой мы можемъ придать знакъ плюсъ или минусъ, по желанію, это именно:

$$\cos\eta_0=\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}};$$

если же мы условимся придавать этой величинѣ тотъ же самый знакъ, какой имѣетъ величина φ_0', то тогда знакъ величины η_0', слѣдовательно и производной η' будетъ во всѣхъ случаяхъ и всегда — положительный; тотъ же самый знакъ долженъ будетъ имѣть и корень знаменателя первой части дифференціальнаго уравненія (389).

И такъ:

$$\eta_0<\frac{\pi}{2},\ \text{если}\ \varphi_0'>0,$$

$$\eta_0>\frac{\pi}{2},\ \text{если}\ \varphi_0'<0;$$

уголъ η непрерывно возрастаетъ отъ своего начальнаго значенія и законъ возрастанія выражается равенствомъ:

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}}, \ldots\ldots \textbf{(390)}$$

или:

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\left(F\left(\eta,\sin\frac{\beta}{2}\right)-F\left(\eta_0,\sin\frac{\beta}{2}\right)\right), \ldots\ldots \textbf{(391)}$$

гдѣ $F(\eta,k)$ есть тотъ самый интегралъ (формула (346)), который

встрѣтился намъ при рѣшеніи примѣра 27-го; разница заключается только въ выраженіи величины k, которая здѣсь равняется $\sin\frac{\beta}{2}$.

Въ примѣрѣ 27-мъ были доказаны нѣкоторыя свойства интеграла $F(\eta, k)$, а затѣмъ, на основаніи этихъ свойствъ, оказалось возможнымъ получить понятіе о періодическомъ характерѣ движенія; то же самое можетъ быть сдѣлано и здѣсь.

Изъ формулы (387) видно, что слѣдующимъ величинамъ η соотвѣтствуютъ слѣдующія величины φ:

$$\text{когда } \eta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2}, \ldots\ldots$$

$$\text{тогда } \varphi = 0,\ \beta,\ 0,\ -\beta,\ 0,\ \beta,\ 0,\ -\beta, \ldots\ldots$$

а такъ какъ φ измѣняется непрерывно, то радіусъ векторъ точки совершаетъ качанія, отклоняясь на уголъ β въ положительную сторону и на такой же уголъ — въ отрицательную.

Изъ того свойства интеграла (346), которое выражается равенствомъ:

$$F(\eta+\pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(348)}$$

слѣдуетъ, что переходъ точки изъ одного крайняго положенія B (черт. 22) въ другое B_1, или обратный переходъ изъ B_1 въ B, совершается въ теченіи промежутка времени

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\, F\left(\pi, \sin\frac{\beta}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(392)}$$

и что такое же время потребно для движенія отъ середины дуги S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ и обратно въ S_0.

Изъ свойства, выражаемаго равенствомъ

$$F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(349)}$$

слѣдуетъ, что матерьяльная точка совершаетъ переходъ отъ точки S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ въ теченіи времени $\frac{T}{2}$; столько же времени требуетъ и обратное движеніе.

Далѣе, изъ свойства (348) и на основанiи формулъ (387) и (391) слѣдуетъ, что, если въ нѣкоторый моментъ времени радiусъ векторъ OM (черт. 22) отклоненъ на уголъ φ отъ вертикальной линiи, то, по истеченiи промежутка времени, равнаго T, онъ будетъ отклоненъ на уголъ $(-\varphi)$, то есть, на тотъ же самый уголъ, но по другую сторону отъ вертикальной линiи; значитъ, въ теченiи этого промежутка времени, матерьяльная точка совершитъ движенiе отъ M къ B и отъ B къ M_1 или отъ M къ B_1 и отъ B_1 къ M_1.

Величина промежутка времени T, называемая продолжительностью размаха круговаго маятника, вычисляется по формулѣ:

$$T=2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}}\ldots\ldots\ (\mathbf{393})$$

Примѣнивъ къ подъинтегральной функцiи слѣдующее разложенiе въ рядъ:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\ldots$$

$\left(\text{гдѣ } x \text{ надо замѣнить произведенiемъ } \sin\frac{\beta}{2}\sin\eta\right)$, и принявъ во вниманiе, что:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\eta d\eta=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots..2n}\frac{\pi}{2},$$

получимъ слѣдующее выраженiе для T:

$$T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\beta}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\beta}{2}+\ldots\ldots\right]\ldots\ (\mathbf{394})$$

При достаточно-маломъ β можно ограничиться двумя первыми членами этого ряда.

IV-53.

Если же уголъ этотъ столь малъ, что можно положить:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\beta''}{2}\sin 1'',$$

гдѣ β'' означаетъ число секундъ, заключающееся въ этомъ углѣ, то T выразится такъ:

$$T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{(\beta'')^2}{16}\sin^2 1''\right)\ldots\ldots\ldots \quad (395)$$

II. $b<-R$.

Положимъ $b=-R-l$, тогда уравненіе живой силы получитъ слѣдующій видъ:

$$v^2=2g(R\cos\varphi+R+l),$$

или:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2g\left(2R+l-2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

отсюда, по извлеченіи корня, по отдѣленіи перемѣнныхъ и по интегрированіи, получимъ:

$$t=\pm\frac{2R}{\sqrt{2g(2R+l)}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{2R}{2R+l}\sin^2\frac{\varphi}{2}}},\ldots\ldots \quad (396)$$

гдѣ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ начальная скорость направлена въ сторону увеличивающихся φ, а знакъ минусъ — въ случаяхъ противоположнаго направленія начальной скорости.

Изъ этого равенства видно, что уголъ φ непрерывно возрастаетъ или убываетъ и что возрастаніе угла φ на 2π совершается въ теченіи времени:

$$T=\frac{4R}{\sqrt{2g(2R+l)}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{2R}{2R+l}\sin^2\eta}},\ldots\ldots \quad (397)$$

такъ что въ теченіи этого времени точка пройдетъ всю окружность одинъ разъ.

III. $b = -R$.

Если положимъ $\beta = \pi$ въ случаяхъ I рода или $l = 0$ къ случаяхъ II рода, то получимъ формулы, выражающія движеніе, совершаемое матерьяльною точкою въ томъ случаѣ, когда $b = -R$; такъ какъ

$$\int \frac{d\psi}{\cos\psi} = -\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right),$$

то равенство (396) получитъ, при $l = 0$, слѣдующій видъ:

$$t = \pm\sqrt{\frac{R}{g}} \log\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi_0}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right)}\right], \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(398)}$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть взятъ при $\varphi'_0 > 0$, нижній — при $\varphi'_0 < 0$.

Если $\varphi'_0 > 0$, то φ возрастаетъ; это возрастаніе становится все болѣе и болѣе медленнымъ, по мѣрѣ приближенія къ π; изъ (398) видно, что при $\varphi = \pi$, $t = \infty$.

Если $\varphi'_0 < 0$, то φ убываетъ и быстрота убыванія становится все менѣе, по мѣрѣ приближенія къ $(-\pi)$; изъ (398) видно, что тогда при $\varphi = -\pi$, $t = \infty$.

Во всякомъ случаѣ, при $b = -R$, движущаяся точка ассимптотически приближается къ высшей точкѣ окружности.

Примѣръ 34. Кривая та же самая, что и въ предыдущемъ примѣрѣ, но она предполагается теперь неудерживающею для перемѣщеній матерьяльной точки внутрь площади, ею ограничиваемой; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матерьяльной точки съ этой окружности и дальнѣйшее движеніе.

Согласно съ условіями, сдѣланными въ началѣ параграфа 34-го, напишемъ уравненіе неудерживающей кривой слѣдующимъ образомъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2) = 0;$$

затѣмъ составимъ выраженіе для λ по формулѣ (317) (§ 40).

Здѣсь:

$$X=0,\ Y=mg,\ \frac{\partial f}{\partial x}=-2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y,\ \Delta f=2R,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,\ Kf=-2v^2,$$

поэтому:

$$\lambda=m\frac{v^2+gy}{2R^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(399)}$$

Но движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2=2g(y-b),\ b=y_0-H,\ H=\frac{v_0^2}{2g},$$

а потому:

$$\lambda=m\frac{3g}{2R^2}\left(y-\frac{2}{3}b\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(400)}$$

Изъ уравненія живой силы видно, что y не можетъ быть менѣе b.

Поэтому, если $b>0$, то разность $\left(y-\frac{2}{3}b\right)$ не можетъ быть менѣе $\frac{1}{3}b$; слѣдовательно, при $b>0$ точка движется по кривой линіи, не оставляя ея; если она прикрѣплена къ концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ къ началу координатъ, то нить остается натянутою во все время движенія; величина натяженія нити равна $2\lambda R$.

Если $b<0$, но $\frac{2}{3}b>-R$, то λ обращается въ нуль при:

$$y_1=\frac{2}{3}b,$$

(уровень $y=y_1$ ниже уровня $y=b$, если $b<0$), а при дальнѣйшемъ движеніи точки по окружности, λ должно сдѣлаться отрицательнымъ; поэтому въ точкѣ окружности:

$$x_1=\sqrt{R^2-\frac{4}{9}b^2}\quad y_1=\frac{2}{3}b$$

движущаяся точка оставитъ кривую и станетъ описывать нѣкоторую параболу, касательную къ окружности въ этой точкѣ.

Опредѣлимъ видъ этой параболы и движенiе матерьяльной точки послѣ того, какъ она оставитъ окружность.

Пусть t_1 есть моментъ времени, въ который движущаяся точка оставляетъ кривую; въ этотъ моментъ скорость движущейся точки имѣетъ слѣдующую величину и слѣдующее направленiе:

$$v_1=\sqrt{-\frac{2}{3}gb}=\sqrt{-gy_1},\ \cos(v_1X)=\frac{y_1}{R}=\frac{2}{3}\frac{b}{R}$$

$$\cos(v_1Y)=-\frac{x_1}{R}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}\frac{b^2}{R^2}}.$$

Свободное движенiе точки будетъ слѣдующее:

$$x=x_1+v_1\frac{y_1}{R}(t-t_1)$$

$$y=y_1-v_1\frac{x_1}{R}(t-t_1)+g\frac{(t-t_1)^2}{2};$$

высшiй уровень, до котораго она достигнетъ, будетъ ниже уровня $y=b$, а именно:

$$y_2=y_1-\frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{x_1}{R}\right)^2=b-\frac{4}{27}\frac{b^3}{R^2}.$$

На чертежѣ 23-мъ линiя B_1B изображаетъ уровень $y=b$, линiя K_1K — уровень $y=\frac{2}{3}b$, точка C — высшую точку параболы, точка D — мѣсто встрѣчи параболы съ окружностью.

Если $b<0$ и $\frac{2}{3}b<-R$, то тогда разность $\left(y-\frac{2}{3}b\right)$ остается положительною при всякомъ положенiи точки на окружности, а потому движущаяся точка нигдѣ не сойдетъ съ окружности.

Примѣръ 35. Та же окружность предполагается неудерживающею для перемѣщенiй матерьяльной точки внаружу круга; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матерьяльной точки.

Въ этомъ случаѣ уравненiе круга слѣдуетъ писать такъ:

$$x^2+y^2-R^2=0,$$

а потому:

$$\lambda = -m\frac{v^2+gy}{2R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ точка находиться не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m\frac{3g}{2R^2}\left(y - \frac{2}{3}b\right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3}b$, то λ будетъ болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $y = \frac{2}{3}b$; на этомъ уровнѣ точка сходитъ съ окружности (см. черт. 24-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія K_1K — уровень $y = \frac{2}{3}b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже въ начальномъ своемъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной матерьяльной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ.

Задачи о движеніи матерьяльной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежитъ данная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линія не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія несвободной матерьяльной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi},\quad \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta},\quad \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta},$$

выражающіе суммы проэкцій на оси Ξ, Υ, **Z** реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi,\eta,\zeta)=0,\ \Phi_2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матерьяльная точка.

Если матерьяльная точка ограничена въ своемъ движеніи негладкою поверхностью:

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матерьяльная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z, направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матерьяльная точка находилась въ точкѣ $Ю$ движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

а потому:

$$\lambda = -m\frac{v^2+gy}{2R^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ точка находиться не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m\frac{3g}{2R^2}\left(y - \frac{2}{3}b\right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3}b$, то λ будетъ болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $y = \frac{2}{3}b$; на этомъ уровнѣ точка сходитъ съ окружности (см. черт. 24-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія K_1K — уровень $y = \frac{2}{3}b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже въ начальномъ своемъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной матерьяльной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ.

Задачи о движеніи матерьяльной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежитъ данная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линія не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія несвободной матерьяльной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta},$$

выражающіе суммы проэкцій на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матерьяльная точка.

Если матерьяльная точка ограничена въ своемъ движеніи негладкою поверхностью:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - k\sqrt{\lambda^2}\, \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - k\sqrt{\lambda^2}\, \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - k\sqrt{\lambda^2}\, \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матерьяльная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z, направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матерьяльная точка находилась въ точкѣ $Ю$ движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

Возьмемъ положительную ось Y по направленію линіи, внизъ; ось **Z** — перпендикулярно къ линіи, вверхъ. Уравненія линіи будутъ:

$$\zeta=0,\ \xi=0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2}=mg\sin J-mj\sin J$$

$$0=-mg\cos J+\lambda+mj\cos J.$$

Второе изъ этихъ уравненій опредѣляетъ реакцію по положительной оси **Z**; равное и противоположное реакціи давленіе матерьяльной точки на линію равно:

$$D=m(g-j)\cos J.$$

Если j есть величина положительная, то это давленіе менѣе давленія $mg\cos J$, производимаго вѣсомъ точки; если же j будетъ величиною отрицательною, то давленіе будетъ болѣе вѣса точки; слѣдовательно, при равномѣрно-ускоренномъ движеніи линіи сверху внизъ давленіе матерьяльной точки на линію уменьшается, а при равномѣрно-ускоренномъ движеніи снизу вверхъ — увеличивается сравнительно съ давленіемъ, производимымъ тою же точкою на неподвижную линію.

Первое изъ предыдущихъ уравненій, по сокращеніи на m и по интегрированіи, даетъ законъ движенія точки по прямой:

$$\eta=\frac{(g-j)}{2}t^2\sin J;$$

это — равноускоренное движеніе съ ускореніемъ $(g-j)\sin J$; если j будетъ болѣе g, то точка будетъ подниматься вверхъ по линіи.

Примѣръ 37-й. Движеніе матерьяльной тяжелой точки по какой бы то ни было кривой линіи движущейся поступательно.

Относительное движеніе матерьяльной точки совершается такъ, какъ совершалось бы абсолютное движеніе по той же неподвижной кривой линіи, если бы, кромѣ силы тяжести, была еще прило-

жена къ матерьяльной точкѣ сила, равная $m\dot{w}_{ю}$ и противоположная ускоренію $\dot{w}_{ю}$ точки $Ю$.

Примѣръ 38-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по прямой линіи, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, вращающейся равномѣрно вокругъ горизонтальной оси.

Проведемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и движущеюся линіею и возьмемъ неподвижный конецъ его O за начало неподвижныхъ осей координатъ, а тотъ конецъ его, который находится на движущейся линіи — за начало $Ю$ координатныхъ осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$; за положительную ось Υ возьмемъ продолженіе направленія $OЮ$ (см. черт. 25), ось Ξ расположимъ по данной линіи, ось $X^{овъ}$ по направленію оси вращенія и угловой скорости, а ось $У^{овъ}$ вертикально внизъ. При такомъ выборѣ осей, ось Υ будетъ заключаться въ вертикальной плоскости QQ, проведенной черезъ ось $У^{овъ}$. Черезъ точку $Ю$ проведемъ направленіе $ЮX'$ параллельное положительной оси $X^{овъ}$; пусть J есть постоянный уголъ $\Xi ЮX'$, образуемый направленіями осей X и Ξ. Плоскость PP, проведенная черезъ направленія $Ю\Xi$ и $ЮX'$, перпендикулярна къ направленію $OЮ\Upsilon$, а потому въ этой плоскости заключается ось $Ю\mathbf{Z}$.

Угловая скорость направлена по оси $X^{овъ}$ или по линіи $ЮX'$, поэтому проэкціи ея на подвижныя оси равны:

$$p=\omega\cos J,\ q=0,\ r=-\omega\sin J.$$

Ускореніе точки $Ю$ направлено по $ЮO$ и равно $\omega^2 l$, если l означаетъ длину $ЮO$, поэтому:

$$\dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\Xi)=0,\ \dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\Upsilon)=-\omega^2 l,\ \dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\mathbf{Z})=0.$$

Реакція $\mathfrak{P}$ прямой линіи заключается въ плоскости $\mathbf{Z}\Upsilon$.

Проэкціи силы тяжести на направленіе оси Υ и на направленіе $ЮK$ (линія пересѣченія плоскостей QQ и PP) равны:

$$\Upsilon=mg\cos\omega t,\quad -mg\sin\omega t,$$

гдѣ ωt есть уголъ $YO\Upsilon$; поэтому проэкціи силы тяжести на направленія осей Ξ и $\mathbf{Z}$ равны:

$$\Xi = -mg\sin\omega t\sin J,\quad \mathbf{Z} = -mg\sin\omega t\cos J.$$

Кромѣ того, такъ какъ матерьяльная точка движется по оси Ξ, то η и ζ равны нулю.

Составимъ теперь дифференціальныя уравненія; они будутъ слѣдующія:

$$m\xi'' = -mg\sin J\sin\omega t + m\omega^2\xi\sin^2 J, \;\ldots\; \textbf{(402, a)}$$

$$O = \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\Upsilon) + mg\cos\omega t + m\omega^2 l + 2m\omega\xi'\sin J \;\ldots\; \textbf{(402, b)}$$

$$O = \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\mathbf{Z}) - mg\cos J\sin\omega t + m\omega^2\xi\sin J\cos J. \;\textbf{(402, c)}$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ выраженіе движенія точки по прямой; второе и третье уравненія послужатъ для опредѣленія величины и направленія реакціи прямой линіи.

Сократимъ уравненіе (402, a) на m и положимъ:

$$\xi = \chi + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{1+\sin^2 J}\sin\omega t,$$

тогда это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\chi'' = (\omega\sin J)^2\chi \;\ldots\ldots\ldots\; \textbf{(403)}$$

Интегрированіе такого уравненія показано на страницахъ 63-й и 64-й этой части; замѣнивъ, въ выраженіи (72), k — величиною $\omega\sin J$, a — величиною $\chi_0 = \xi_0$ и α — величиною χ'_0:

$$\chi'_0 = \xi'_0 - \frac{g}{\omega}\frac{\sin J}{1+\sin^2 J},$$

получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\xi = \xi_0\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{1+\sin^2 J}\sin\omega t +$$

$$+\left(\frac{\xi'_0}{\omega\sin J} - \frac{g}{\omega^2}\frac{1}{1+\sin^2 J}\right)\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}, \;\ldots\ldots\; \textbf{(404)}$$

гдѣ

$$k = \omega \sin J.$$

Если $\xi_0 = 0$ и $\chi'_0 = 0$, то движеніе матерьяльной точки по оси Ξ будетъ колебательное по обѣ стороны точки *Ю*, такъ какъ тогда выраженіе этого движенія будетъ слѣдующее:

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t.$$

Ни это, ни общее выраженіе (404) не заключаютъ въ себѣ величины l; слѣдовательно, движеніе точки по оси Ξ не зависитъ отъ разстоянія этой прямой линіи отъ оси вращенія.

Примѣръ 39-й. Тяжелая точка движется по прямой линіи, находящейся въ плоскости истиннаго горизонта нѣкоторой точки *Ю* земной поверхности, пренебрегая тѣми же величинами, какъ и на страницѣ 166, опредѣлить проэкцію на горизонтальную плоскость давленія, производимаго движущеюся точкою на прямую линію.

Давленіе движущейся точки на прямую равно и противоположно реакціи прямой; означимъ черезъ D_1 проэкцію давленія на горизонтальную плоскость; направленіе D_1 должно быть перпендикулярно къ направленію прямой.

Относя положеніе движущейся точки къ тѣмъ самымъ осямъ $\mathfrak{X}$, Υ, $\mathfrak{Z}$, которыя были выбраны нами на страницѣ 159 при разсмотрѣніи примѣра 21-го, означимъ черезъ $\mathfrak{x}$, η координаты движущейся точки ($\mathfrak{z} = 0$) и черезъ β — азимутъ прямой линіи; этотъ азимутъ мы будемъ отсчитывать отъ положительной оси $\mathfrak{X}$ къ положительной оси Υ.

Если направленіе давленія D_1 будетъ имѣть азимутъ $\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, то проэкціи D_1 на оси $\mathfrak{X}$ и Υ будутъ равны:

$$-D_1 \sin \beta, \qquad D_1 \cos \beta;$$

если окажется, что D_1 есть величина отрицательная, то это будетъ значить, что оно имѣетъ направленіе противоположное, азимутъ котораго равенъ $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Чтобы составить дифференціальныя уравненія движенія точки по данной прямой, въ которыхъ отброшены члены, заключающіе величины:

$$\omega^2 \mathfrak{x},\ \omega^2 \eta,\ \frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},$$

возьмемъ дифференціальныя уравненія (252) и прибавимъ къ ихъ вторымъ частямъ проэкціи реакціи прямой на оси координатъ; проэкціи реакціи на оси $\mathfrak{X}$ и Υ будутъ равны:

$$D_1 \sin\beta, \qquad -D_1 \cos\beta,$$

поэтому первыя два дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующаго вида:

$$m\mathfrak{x}'' = D_1 \sin\beta - 2m\omega\eta' \sin\Lambda$$

$$m\eta'' = -D_1 \cos\beta + 2m\omega\mathfrak{x}' \sin\Lambda.$$

Но движеніе точки совершается по данной прямой линіи, поэтому:

$$\mathfrak{x} = s\cos\beta,\ \ \eta = s\sin\beta,$$

если s означаетъ разстояніе движущейся точки отъ точки $Ю$; вслѣдствіе этого предыдущія уравненія получатъ такой видъ:

$$ms''\cos\beta = \quad (D_1 - 2m\omega s' \sin\Lambda)\sin\beta$$

$$ms''\sin\beta = -(D_1 - 2m\omega s' \sin\Lambda)\cos\beta.$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos\beta$, второе на $\sin\beta$ и сложивъ, получимъ:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0;$$

это выражаетъ, что движеніе точки совершается (по крайней мѣрѣ близъ точки $Ю$) равномѣрно.

Послѣ этого, изъ предыдущихъ уравненій слѣдуетъ:

$$D_1 = 2m\omega s' \sin\Lambda \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(405)}$$

Если s' есть величина положительная, то и D_1 будетъ величиною положительною, то есть направленіе его будетъ имѣть азимутъ $\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$, стало быть *движущаяся точка давитъ вправо на линію, по которой она движется; давленіе это, происходящее вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, пропорціонально величинѣ скорости точки и синусу истинной широты мѣста; но не зависитъ отъ азимута* β.

Примѣръ 40-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по наклонной плоскости, равномѣрно вращающейся вокругъ вертикальной оси.

Пусть J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью съ горизонтальною плоскостью. Возьмемъ за точку $Ю$ — точку пересѣченія вращающейся плоскости съ осью вращенія; положительную ось Υ направимъ внизъ по линіи наибольшаго наклона по плоскости, ось $\mathbf{Z}$ перпендикулярно къ плоскости, вверхъ; ось Ξ будетъ тогда горизонтальна.

Положимъ, что угловая скорость ω направлена вверхъ; проэкціи ея на подвижныя оси будутъ равны:

$$p=0,\ q=-\omega\sin J,\ r=\omega\cos J.$$

Ускореніе точки $Ю$ равно нулю; проэкціи силы тяжести на подвижныя оси:

$$\Xi=0,\ \Upsilon=mg\sin J,\ \mathbf{Z}=-mg\cos J.$$

Наконецъ, уравненіе плоскости: $\zeta=0$.

Дифференціальныя уравненія движенія точки по плоскости будутъ, по сокращеніи на m, имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\omega^2\xi+2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos J,\ \dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(406, a)}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=g\sin J+\omega^2\eta\cos^2 J-2\omega\frac{d\xi}{dt}\cos J\ \dots\dots \quad \textbf{(406, b)}$$

Изъ третьяго уравненія:

$$O = -mg\cos J + \lambda + m\omega^2\eta\sin J\cos J - 2m\omega\frac{d\xi}{dt}\sin J \ldots \textbf{(406, c)}$$

опредѣлится величина и знакъ реакціи λ.

Положимъ:

$$\eta + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J} = \mathfrak{y},$$

тогда уравненія (406, a, b) получатъ слѣдующій видъ:

$$\xi'' = 2\omega\mathfrak{y}'\cos J = \omega^2\xi, \quad \mathfrak{y}'' = -2\omega\xi'\cos J + \omega^2\mathfrak{y}\cos^2 J.$$

Какъ извѣстно, такая совокупность линейныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\xi = Ce^{kt}, \quad \mathfrak{y} = C\varkappa e^{kt},$$

гдѣ k и $\varkappa$ суть постоянныя величины, удовлетворяющія слѣдующимъ равенствамъ:

$$k^2 = 2\omega\varkappa k\cos J + \omega^2, \quad \varkappa k^2 = -2\omega k\cos J + \omega^2\varkappa\cos^2 J.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ величину $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{k^2 - \omega^2}{2\omega k\cos J} = -\frac{2\omega k\cos J}{k^2 - \omega^2\cos^2 J},$$

получимъ уравненіе:

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2(1 - 3\cos^2 J) + \cos^2 J = 0,$$

служащее для опредѣленія k; изъ него получимъ четыре значенія для этой величины:

$$1)\ k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2 J + \sin J\sqrt{1 - 9\cos^2 J}}, \quad 3)\ -k_1$$

$$2)\ k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2 J - \sin J\sqrt{1 - 9\cos^2 J}}, \quad 4)\ -k_2;$$

каждому изъ этихъ k соотвѣтствуетъ опредѣленная величина $\varkappa$:

$$1)\ \varkappa_1 = \frac{k_1^2 - \omega^2}{2\omega k_1 \cos J}, \quad 3) - \varkappa_1$$

$$2)\ \varkappa_2 = \frac{k_2^2 - \omega^2}{2\omega k_2 \cos J}, \quad 4) - \varkappa_2.$$

Поэтому совокупность (406, a), (406, b) будетъ имѣть слѣдующее полное рѣшеніе.

$$\xi = C_1 e^{k_1 t} + C_3 e^{-k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_4 e^{-k_2 t} \ldots . \quad \textbf{(407, a)}$$

$$\eta = -\frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J} + \varkappa_1(C_1 e^{k_1 t} - C_3 e^{-k_1 t}) + \varkappa_2(C_2 e^{k_2 t} - C_4 e^{-k_2 t}). \quad \textbf{(407, b)}$$

Значенія произвольныхъ постоянныхъ опредѣлятся по начальнымъ координатамъ ξ_0 и η_0 движущейся точки и по проэкціямъ на оси Ξ и Υ ея начальной относительной скорости (ξ'_0, η'_0).

Корни k_1 и k_2 могутъ быть дѣйствительными или мнимыми.

Если:

$$\cos J < \frac{1}{3},$$

то тогда:

$$\cos J < \frac{1}{3}\sqrt{3},\ \ 1 - 3\cos^2 J > 0,$$

$$(1 - 3\cos^2 J)^2 - \sin^2 J(1 - 9\cos^2 J) = 4\cos^2 J,$$

а потому тогда обѣ величины k_1 и k_2 — дѣйствительныя. Въ такихъ случаяхъ ξ и η при $t = \infty$ становятся безконечно-большими, если только C_1 и C_2 неравны нулю; если же эти постоянныя равны нулю, то движущаяся точка ассимптотически приближается къ точкѣ:

$$\xi_1 = 0,\ \ \eta_1 = -\frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J}$$

плоскости $\Xi\Upsilon$.

Если:

$$\cos J > \frac{1}{3},$$

то тогда k_1 и k_2 суть комплексныя взаимно-сопряженныя величины:

$$k_1 = \alpha + \beta i,\ \ k_2' = \alpha - \beta i,$$

а такъ какъ:

$$2\omega\varkappa_1\cos J = k_1 - \frac{\omega^2}{k_1},\quad 2\omega\varkappa_2\cos J = k_2 - \frac{\omega^2}{k_2},$$

то рѣшеніе получитъ въ этихъ случаяхъ слѣдующій видъ:

$$\xi = e^{\alpha t}(\mathbf{\Gamma}_1\cos\beta t + \mathbf{\Gamma}_2\sin\beta t) + e^{-\alpha t}(\Gamma_3\cos\beta t + \mathbf{\Gamma}_4\sin\beta t)$$

$$\eta = -\frac{g\sin J}{\omega^2\cos^2 J} + \frac{e^{\alpha t}}{2\omega\cos J}\Big[\Big(\mathbf{\Gamma}_1\alpha + \mathbf{\Gamma}_2\beta - \omega^2\frac{\Gamma_1\alpha - \Gamma_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\cos\beta t +$$

$$+\Big(\mathbf{\Gamma}_2\alpha - \mathbf{\Gamma}_1\beta - \omega_2\frac{\Gamma_2\alpha + \Gamma_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\sin\beta t\Big] + \ldots\ldots$$

Въ этихъ случаяхъ, если $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ неравны нулю, то движеніе точки, при весьма большихъ величинахъ t, принимаетъ слѣдующій характеръ:

$$\xi = ae^{\alpha t}\cos(\beta t + b),\quad \eta = -\frac{g\sin J}{\omega^2\cos^2 J} + a_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t + b_1),$$

т.-е. движущаяся точка описываетъ спираль логариѳмическаго вида, по которой она удаляется въ безконечность.

Если же $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ равны нулю, то движущаяся точка ассимптотически приближается по спирали къ точкѣ $(\xi_1,\ \eta_1)$.

Примѣръ 41-й. Разсмотрѣть, какое движеніе по отношенію къ землѣ совершаетъ математическій маятникъ при малыхъ отклоненіяхъ отъ вертикальной линіи (маятникъ Фуко).

Примемъ точку привѣса маятника за начало *Ю* осей координатъ 𝔛, ϒ, 𝔍, неизмѣнно связанныхъ съ землею; эти оси направлены такъ, какъ объяснено на страницѣ 159.

Если l есть длина нити маятника, то уравненіе той сферы, на которой должна оставаться движущаяся точка будетъ:

$$l^2 - \mathfrak{x}^2 - \eta^2 - \mathfrak{z}^2 = 0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія этого маятника полу-

чатся изъ дифференціальныхъ уравненій (243) страницы 159, если ко вторымъ частямъ этихъ уравненій присоединимъ члены:

$$-2\lambda\mathfrak{x}, -2\lambda\eta, -2\lambda\mathfrak{z};$$

отбросивъ же члены, заключающіе:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z},\ \frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\mathfrak{z}}{R}$$

и всѣ члены высшаго порядка малости, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$m\mathfrak{x}'' = -2\lambda\mathfrak{x} - 2m\eta'\omega\sin\Delta, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(408, a)}$$

$$m\eta'' = -3\lambda\eta + 2m\omega(\mathfrak{x}'\sin\Delta + \mathfrak{z}'\cos\Delta), \ldots\ldots \quad \textbf{(408, b)}$$

$$m\mathfrak{z}'' = -2\lambda\mathfrak{z} - 2m\eta'\omega\cos\Delta - mG \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(408, c)}$$

Помноживъ первое изъ нихъ на $\mathfrak{x}'$, второе — на η', третье — на $\mathfrak{z}'$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{mu^2}{2}\right)}{dt} = -mG\frac{d\mathfrak{z}}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(409)}$$

такъ какъ:

$$-2\lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \eta\eta' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}') = 0,$$

потому что точка остается на поверхности сферы. Уравненіе (409) имѣетъ интегралъ:

$$\frac{u^2}{2} = h - G\mathfrak{z}\ ^{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(410)}$$

Исключивъ теперь λ изъ первыхъ двухъ уравненій (408, a) и (408, b), получимъ:

$$\frac{d(\mathfrak{x}\eta' - \eta\mathfrak{x}')}{dt} = \omega\sin\Delta\frac{d(\mathfrak{x}^2 + \eta^2)}{dt} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}'\omega\cos\Delta.$$

---

*) Это интегралъ приближенныхъ дифференціальныхъ уравненій (408); не трудно убѣдиться, что интегралъ точныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{mu^2}{2} = H + mg\frac{R^2}{\rho} + \frac{m\omega^2}{2}(\mathfrak{s}^2 + \eta^2) \ldots\ldots \quad \textbf{(410 bis)}$$

Если отклоненія маятника отъ вертикальной линіи столь малы, что можно пренебречь членами, заключающими вторыя степени угла отклоненія, сравнительно съ членами, заключающими только первыя степени этого угла, то можно будетъ въ предыдущемъ уравненіи отбросить членъ, заключающій $\mathfrak{z}'$. Въ самомъ дѣлѣ, выразимъ прямоугольныя координаты движущейся точки въ сферическихъ координатахъ l, φ, ψ:

$$\mathfrak{x}=l\sin\varphi\cos\psi,\quad \eta=l\sin\varphi\sin\psi,\quad \mathfrak{z}=-l\cos\varphi,$$

тогда предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d(l^2\sin^2\varphi\,.\,\psi')}{dt}=2l^2\omega\varphi'(\cos\varphi\sin\varphi\sin\Lambda+\sin^2\varphi\cos\Lambda\cos\psi);$$

замѣнивъ здѣсь $\sin\varphi$ — чрезъ φ и $\cos\varphi$ — чрезъ 1, увидимъ, что вторая часть этого уравненія получитъ такой видъ:

$$2l^2\omega\varphi'(\varphi\sin\Lambda+\varphi^2\cos\Lambda\cos\psi);$$

а потому вторымъ членомъ этой части можно пренебречь.

Отбросивъ членъ, заключающій $\mathfrak{z}'$, получимъ другой изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія маятника:

$$(\mathfrak{x}\eta'-\eta\mathfrak{x}')=C+(\mathfrak{x}^2+\eta^2)\omega\sin\Lambda;\;\ldots\ldots\ldots\;\textbf{(411)}$$

но не надо забывать, что этотъ интегралъ найденъ при предположеніи, что отклоненія маятника отъ вертикальной линіи весьма малы.

Если выразимъ прямоугольныя координаты въ сферическихъ, то первые интегралы (410) и (411) получатъ такой видъ:

$$l^2((\varphi')^2+\sin^2\varphi(\psi')^2)=2Gl\cos\varphi+2h\ldots\ldots\;\textbf{(412)}$$

$$l^2\sin^2\varphi.\psi'=C+l^2\omega\sin\Lambda\sin^2\varphi\ldots\ldots\ldots\;\textbf{(413)}$$

Въ этихъ уравненіяхъ пренебрежемъ третьими и высшими степенями угла φ и дальнѣйшія интегрированія произведемъ для слѣдующихъ двухъ частныхъ случаевъ.

1) Въ начальный моментъ маятникъ отклоненъ въ плоскости $\psi=0$ на малый уголъ φ_0, причемъ матерьяльной точкѣ сообщена слѣдующая относительная скорость u_0 по параллели $\varphi=\varphi_0$ къ западу.

$$\varphi'_0=0,\ \ u_0=l\sin\varphi_0\cdot\psi'_0=l\omega\sin\Lambda\sin\varphi_0.$$

Въ этомъ случаѣ постоянныя C и $2h$ будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C=0,\ \ 2h=l^2\omega^2\sin^2\Lambda\sin^2\varphi_0-2Gl\cos\varphi_0;$$

уравненіе (413) приметъ видъ:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}-\omega\sin\Lambda\right)\sin^2\varphi=0;$$

откуда слѣдуетъ:

$$\psi'=\omega\sin\Lambda;\ \ \psi=t\omega\sin\Lambda.$$

Уравненіе (412) получитъ вслѣдствіе этого слѣдующій видъ:

$$(\varphi')^2=2\frac{G}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)+\omega^2\sin^2\Lambda(\sin^2\varphi_0-\sin^2\varphi),$$

или, пренебрегая кубами и высшими степенями φ:

$$(\varphi')^2=\varepsilon^2(\varphi_0^2-\varphi^2);\ \ \varepsilon=\sqrt{\frac{G}{l}+\omega^2\sin^2\Lambda}.$$

Отсюда видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0, а потому φ' должна имѣть, въ началѣ движенія, знакъ отрицательный.

$$\frac{-d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}}=\varepsilon dt;$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$\varphi=\varphi_0\cos\varepsilon t.$$

Стало быть, движеніе точки совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi=\varphi_0\cos\varepsilon t,\ \ \psi=t\omega\sin\Lambda,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(414)}$$

то есть *колебанія маятника совершаются въ вертикальной*

IV-54.

плоскости, которая равномѣрно вращается съ угловою скоростью $\omega \sin \Lambda$ *вокругъ вертикальной линіи: на сѣверномъ полушаріи вращеніе совершается по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ, на южномъ — обратно* *).

2) Начальное положеніе маятника то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, но начальная относительная скорость равна нулю:

$$\varphi'_0 = 0, \ \psi'_0 = 0, \ u_0 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ:

$$C = -l^2 \omega \sin \Lambda \sin^2 \varphi_0, \quad 2h = -2Gl \cos \varphi_0.$$

Дифференціальныя уравненія будутъ:

$$\psi' = \omega \sin \Lambda \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}\right)$$

$$(\varphi')^2 = 2\frac{G}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) - \frac{\omega^2 \sin^2 \Lambda}{\sin^2 \varphi}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0)^2.$$

Послѣднее уравненіе, если пренебречь кубами и высшими степенями φ, получитъ слѣдующій видъ:

$$(\varphi\varphi')^2 = \varepsilon^2(\varphi_0^2 - \varphi^2)(\varphi^2 - \varphi_1^2), \quad \ldots\ldots\ldots (415)$$

гдѣ:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (416)$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega\varphi_0 \sin \Lambda}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots (417)$$

Изъ уравненія (415) видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 и не можетъ быть менѣе φ_1, поэтому можно положить:

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 - (\varphi_0^2 - \varphi_1^2)\sin^2\eta; \quad \ldots\ldots\ldots (418)$$

---

*) Продолжительность одного розмаха равна

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Lambda}} \quad \text{или} \quad \pi\sqrt{\frac{l}{G}},$$

такъ какъ ω^2 есть ничтожная дробь сравнительно съ $\frac{G}{l}$.

тогда уравненіе (415) получитъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$(\eta')^2=\varepsilon^2,\ \eta'=\pm\varepsilon;$$

изъ этихъ двухъ знаковъ мы выберемъ верхній, вслѣдствіе чего η будетъ непрерывно возрастать отъ своего начальнаго значенія $\eta_0=0$; возрастаніе η будетъ равномѣрное:

$$\eta=\varepsilon t.$$

Дифференціальное уравненіе, заключающее ψ', получитъ такой видъ:

$$d\psi=\omega dt\sin\Lambda-\frac{\omega\sin\Lambda}{\varepsilon}\frac{\varphi_0^2}{\varphi^2}d\eta$$

$$d\psi=\omega dt\sin\Lambda-\frac{\omega\sin\Lambda}{\varepsilon}\frac{d\operatorname{tg}\eta}{\left(1+\frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2}\operatorname{tg}^2\eta\right)};$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$\psi=\omega t\sin\Lambda-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\sin\Lambda\operatorname{tg}\eta\right).$$

Стало быть движеніе маятника въ этомъ случаѣ совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi=\varphi_0\sqrt{\cos^2\varepsilon t+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\sin^2\Lambda\sin^2\varepsilon t}, \ldots\ldots\ (419)$$

$$\frac{\omega}{\varepsilon}\sin\Lambda\operatorname{tg}\varepsilon t=\operatorname{tg}(\omega t\sin\Lambda-\psi)\ \ldots\ldots\ (420)$$

Представимъ себѣ вертикальную плоскость, вращающуюся вокругъ вертикальной линіи съ угловою скоростью $\omega\sin\Lambda$ по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ; означимъ черезъ Θ уголъ:

$$\Theta=\psi-\omega t\sin\Lambda,$$

составляемый съ этою вертикальною плоскостью тою вертикальною плоскостью, въ которой заключается нить маятника; какъ видно изъ уравненія (420), этотъ уголъ Θ — отрицательный.

Введя уголъ Θ, можно исключить εt изъ выраженій (419) и (420); получимъ:

$$\frac{\varphi^2 \cos^2\theta}{\varphi_0^2}+\frac{\varphi^2 \sin^2\theta}{\varphi_1^2}=1.$$

Замѣнивъ здѣсь малые углы φ_0, φ, φ_1 ихъ синусами, получимъ уравненіе:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2}+\frac{\eta_1^2}{b^2}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (421)$$

гдѣ:

$$\xi_1=l\sin\varphi\cos\Theta,\ \ \eta_1=l\sin\varphi\sin\Theta;\ \ a=l\sin\varphi_0,\ \ b=l\sin\varphi_1.$$

Чтобы объяснить себѣ значеніе уравненія (421), представимъ себѣ горизонтальную плоскость $\Xi_1 Ю \Upsilon_1$ (черт. 26), вращающуюся вокругъ вертикальной оси $ЮЗ$ съ угловою скоростью $\omega\sin\Lambda$ въ сторону, указанную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ. Оси $Ю\Xi_1$ и $Ю\Upsilon_1$ неизмѣнно связаны съ этою вращающеюся плоскостью, причемъ ось Ξ_1 составляетъ съ осью $\mathfrak{X}$ уголъ $t\omega\sin\Lambda$. Величины ξ_1 и η_1 суть координаты, относительно осей Ξ_1 и Υ_1, проэкціи M движущейся точки на горизонтальную плоскость.

Уравненіе (421) выражаетъ, что точка M чертитъ на вращающейся плоскости $\Xi_1\Upsilon_1$ эллипсъ, большая полуось котораго, равная $l\sin\varphi_0$, направлена по оси Ξ_1, а малая полуось равна:

$$b=\frac{\omega\sin\Lambda}{\sqrt{\frac{G}{l}+\omega^2\sin^2\Lambda}}\,l\sin\varphi_0.$$

Движеніе по этому эллипсу совершается въ сторону, указанную неоперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

§ 55. Положенія равновѣсія несвободной матерьяльной точки.

Матерьяльная точка, находящаяся на данной неподвижной поверхности или линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ поверхности или линіи, въ которыхъ всѣ силы, приложенныя къ точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной

несвободной точки называются *положеніями равновѣсія ея на данной неподвижной поверхности или линіи.*

Равенства, выражающія, что всѣ силы, приложенныя къ несвободной покоющейся матерьяльной точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, называются *уравненіями равновѣсія силъ*, приложенныхъ къ этой точкѣ.

Изъ этихъ уравненій выведемъ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы матерьяльная точка могла имѣть положенія равновѣсія на данной поверхности или линіи; эти условія мы будемъ называть *условіями равновѣсія.*

Если эти условія удовлетворены, то изъ тѣхъ же уравненій опредѣлятся положенія равновѣсія матерьяльной точки.

Условія равновѣсія различны, смотря по степени ограниченія свободы движенія точки и смотря потому, существуетъ ли треніе, или нѣтъ.

Поэтому мы разсмотримъ отдѣльно различныя степени стѣсненія свободы матерьяльной точки.

1) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной удерживающей поверхности.*

Пусть

$$f(x, y, z)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (422)$$

есть уравненіе поверхности; поверхность гладкая, то есть, нѣтъ тренія между нею и матерьяльною точкою.

Въ тѣхъ точкахъ этой поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ, задаваемыя силы должны уравновѣшиваться съ реакціею поверхности; поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \ldots\ldots (423)$$

Исключивъ λ изъ этихъ уравненій, получимъ два уравненія:

$$X\frac{\partial f}{\partial y}-Y\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ Y\frac{\partial f}{\partial z}-Z\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

или

$$\frac{X}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \quad \text{.............} \quad \mathbf{(424)}$$

Эти два равенства выражаютъ условія равновѣсія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.

Условіе, выражаемое равенствами (424), состоитъ въ томъ, что *равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ должна быть нормальна къ поверхности въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.*

Если задаваемыя силы не удовлетворяютъ этому условію ни въ какой точкѣ поверхности, то матерьяльная точка не имѣетъ вовсе положеній равновѣсія на этой поверхности при дѣйствіи на нее такихъ силъ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка не можетъ находиться въ равновѣсіи на гладкой плоскости, наклонной къ горизонту.

Тѣ точки поверхности, въ которыхъ условія (424) удовлетворяются, суть положенія равновѣсія матерьяльной точки; координаты такихъ точекъ опредѣлятся изъ равенствъ (424) и изъ уравненія (422).

Напримѣръ, положенія равновѣсія тяжелой точки, находящейся на поверхности удерживающей сферы, опредѣлятся изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$
$$2mgx=0, \ 2mgz=0,$$

если положительная ось $Y^{\text{въ}}$ направлена вертикально внизъ.

Эти уравненія имѣютъ слѣдующія два рѣшенія:

$$1) \ x=0, \ z=0, \ y=+R$$
$$2) \ x=0, \ z=0, \ y=-R,$$

слѣдовательно, положеній равновѣсія въ этомъ случаѣ два, одно на самой нижней, другое на самой верхней точкахъ сферы.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается, что положеній равновѣсія безчисленное множество и что они образуютъ сплошныя линіи на поверхности или занимаютъ собою цѣлыя площади на поверхности и даже иногда всю поверхность; напримѣръ:

Примѣръ 42-й. Матерьяльная точка, находящаяся на той же сферической поверхности и подверженная силѣ тяжести и силѣ:

$$m\mu^2\sqrt{x^2+z^2},$$

притягивающей ее къ оси $Y^{\text{овъ}}$, будетъ имѣть положенія равновѣсія, опредѣляемыя изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$\frac{-\mu^2 x}{2x}=\frac{g}{2y}=\frac{-\mu^2 z}{2z},$$

или:

$$x(g+\mu^2 y)=0,\ \ z(g+\mu^2 y)=0.$$

Эти положенія равновѣсія слѣдующія:

1) точка: $x=0,\ z=0,\ y=+R,$

2) точка: $x=0,\ z=0,\ y=-R,$

и 3) всякая изъ точекъ параллельнаго круга:

$$y=-\frac{g}{\mu^2},\ \ x^2+z^2=R^2-\frac{g^2}{\mu^4}.$$

Тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на горизонтальной плоскости, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ плоскости.

Матерьяльная точка, находящаяся на удерживающей сферѣ и притягиваемая къ центру сферы силою пропорціональною разстоянію отъ него, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ сферы.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, имѣютъ потенціалъ U, то уравненія (423) примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0;\ \ldots\ \textbf{(425)}$$

исключивъ изъ нихъ λ, получимъ уравненія:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}p=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}q=0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(426)}$$

гдѣ:

$$p=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)},\quad q=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

Изъ уравненій (426) и уравненія поверхности (422) опредѣлятся координаты положеній равновѣсія матерьяльной точки.

Пусть M_e есть одна изъ такихъ точекъ, U_e численное значеніе, получаемое функціею U въ этой точкѣ; x_e, y_e, z_e — координаты этой точки, удовлетворяющія уравненію поверхности (422) и уравненіямъ (426).

Пусть M есть другая точка поверхности, безконечно-близкая къ M_e; координаты этой точки M: $x_e+\delta x$, $y_e+\delta y$, $z_e+\delta z$ также удовлетворяютъ уравненію (422), а потому:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(427)}$$

гдѣ въ производныя подставлены координаты точки M_e.

Изъ равенства (427) слѣдуетъ, что

$$\delta z=p\delta x+q\delta y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(428)}$$

Въ точкѣ M потенціальная функція U имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_e+\delta U+\delta^2 U+\ldots,$$

гдѣ

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

и гдѣ въ производныя подставлены координаты x_e, y_e, z_e точки M.

Кромѣ того, δz связано съ δx и δy равенствомъ (428), поэтому

$$\delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}p\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}q\right)\delta y;$$

а такъ какъ координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяютъ равенствамъ (426), то въ этой точкѣ:

$$\delta U=0,$$

если только δx, δy, δz удовлетворяютъ равенству (427).

Изъ этого слѣдуетъ, что U_0 есть, либо максимумъ тѣхъ значеній, которыя получаетъ U на поверхности (422), либо минимумъ этихъ значеній, либо такое значеніе, для котораго

$$\delta U=0$$

при всякихъ перемѣщеніяхъ изъ этой точки M_0 по поверхности.

И такъ, *если матерьялная точка, подверженная силамъ, имѣющимъ потенціалъ U, находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то положенія равновѣсія матерьяльной точки суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ значенія функціи U на поверхности имѣютъ максимумъ или минимумъ, и вообще всѣ тѣ точки поверхности, въ которыхъ*

$$\delta U=0.$$

Напримѣръ:

Примѣръ 43-й. Матерьяльная точка, находящаяся на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (429)$$

и притягиваемая къ центру эллипсоида силою, пропорціональною разстоянію отъ этой точки, имѣетъ положенія равновѣсія во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ:

$$\delta U=\delta\left(-\frac{\mu^2}{2}r^2\right)=-\mu^2(x\delta x+y\delta y+z\delta z)=0, \ldots . \quad (430)$$

причемъ δx, δy, δz удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{x\delta x}{a^2}+\frac{y\delta y}{b^2}+\frac{z\delta z}{c^2}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (431)$$

а x, y, z, — уравненію (429).

Такихъ точекъ шесть:

Двѣ — на концахъ малой оси, въ которыхъ значенія функціи U на поверхности эллипсоида имѣютъ максимумъ.

Двѣ — на концахъ большой оси, въ которыхъ U имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности эллипсоида.

Кромѣ того, точки, находящіяся на концахъ средней оси, суть также положенія равновѣсія; въ самомъ дѣлѣ, исключивъ изъ (430) и (431) произведеніе $y\delta y$, получимъ слѣдующее выраженіе для δU:

$$\delta U = -\mu^2\left(\frac{(a^2-b^2)}{a^2}x\delta x + \frac{(c^2-b^2)}{c^2}z\delta z\right),$$

изъ него слѣдуетъ, что δU обращается въ нуль въ точкахъ:

$$x=0,\ z=0,\ y=\pm b.$$

Линіи пересѣченія поверхностей уровня функціи $U(x, y, z)$ съ поверхностью (422) называются *линіями уровня* значеній функціи U на этой поверхности.

Мы знаемъ (стр. 113), что сила, имѣющая потенціалъ U и приложенная къ матерьяльной точкѣ, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ положеніе, занимаемое матерьяльною точкою; величина силы равна ΔU.

Изъ этого слѣдуетъ, что если матерьяльная точка будетъ находиться на поверхности (422), то сила ΔU будетъ перпендикулярна къ той линіи уровня, на которой находится матерьяльная точка; сила эта направлена въ сторону поверхностей уровня, имѣющихъ параметры бо́льшіе, чѣмъ параметръ C той линіи уровня, на которой находится матерьяльная точка. Проэкція этой силы на касательную плоскость къ поверхности будетъ, поэтому, перпендикулярна къ линіи уровня C и будетъ направлена въ ту сторону, гдѣ находятся на поверхности линіи уровня съ параметрами, большими C.

Если въ точкѣ M_e значенія потенціальной функціи U на поверхности имѣютъ наибольшую величину U_e, то во всѣхъ точкахъ поверхности, безконечно-близкихъ къ M_e функція U имѣетъ численныя значенія, меньшія U_e; такъ какъ въ точкѣ M_e вели-

чина δU обращается въ нуль, то численное значеніе функціи U въ точкѣ M будетъ:

$$U_e + \delta^2 U + \ldots\ldots,$$

а такъ какъ U_e есть максимумъ, то $\delta^2 U$ *должна быть отрицательною* для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній $\overline{M_e M}$ по поверхности.

Изъ этого слѣдуетъ, что если U_e есть максимумъ, то линіи уровня, ближайшія къ точкѣ M_e, окружаютъ эту точку со всѣхъ сторонъ и имѣютъ параметры меньшіе U_e.

Поэтому во всѣхъ точкахъ поверхности, сосѣднихъ съ точкою M_e, проэкція силы на касательную плоскость стремится приблизить матерьяльную точку къ точкѣ M_e; напримѣръ, на чертежѣ 27-мъ, на которомъ изображены линіи уровня потенціальной функціи:

$$U = -\frac{\mu^2}{2} r^2$$

на поверхности эллипсоида (примѣръ 43-й), точка C, находящаяся на концѣ малой оси эллипсоида, есть мѣсто наибольшаго значенія функціи U; эта точка окружена линіями уровня, параметры которыхъ менѣе величины

$$U_e = -\frac{\mu^2}{2} c^2;$$

притомъ, чѣмъ далѣе линія уровня отъ точки C, тѣмъ менѣе ея параметръ. Если помѣстить матерьяльную точку въ одну изъ точекъ M', M'', M''', ... по сосѣдству съ точкою C, то проэкція силы на матерьяльную плоскость будетъ направлена внутрь площади, ограничиваемой линіею уровня и будетъ, слѣдовательно, стремиться приблизить матерьяльную точку къ точкѣ C.

1. Положимъ, что U_e есть максимумъ значеній функціи U на данной поверхности; если матерьяльная точка, находившаяся въ покоѣ въ точкѣ M_e, будетъ отклонена въ точку M_0 поверхности, весьма близкую къ M_e, и здѣсь ей будетъ сообщена весьма малая

начальная скорость v_0, то она станетъ совершать на поверхности движеніе, удовлетворяющее закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U-U_0.$$

Такъ какъ U и U_0 менѣе U_e, то:

$$U_0=U_e-k_0^2,\ \ U=U_e-k^2,$$

поэтому:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2-k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (432)$$

Изъ этой формулы видно, что матерьяльная точка не можетъ вступить въ тѣ мѣста поверхности, въ которыхъ

$$k^2>\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2;$$

слѣдовательно, точка будетъ совершать свое движеніе вблизи точки M_e, не выходя за предѣлы площади, ограниченной тою линіею уровня, параметръ которой равенъ:

$$U_1=U_e-\left(\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ максимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія устойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки.

Напротивъ, тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія неустойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки. Въ каждой такой точкѣ:

$$\delta U=0,\ \ \delta^2 U>0,$$

для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній по поверхности; поэтому, въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ такою точкою, линіи

уровня имѣютъ параметры бо́льшіе этого минимума и притомъ каждая линія уровня окружаетъ точку минимума со всѣхъ сторонъ (см. на чертежѣ 27-мъ, линіи уровня, окружающія точку A, находящуюся на концѣ большой полуоси эллипсоида).

Въ сосѣдствѣ съ такою точкою неустойчиваго равновѣсія, сила, имѣющая потенціалъ U, стремится удалить матерьяльную точку отъ положенія равновѣсія (см. черт. 27-й).

Въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ $\delta U=0$, но величина $\delta^2 U$ имѣетъ знакъ положительный или отрицательный, смотря по направленію перемѣщенія, въ такихъ точкахъ положеніе равновѣсія устойчиво для однихъ перемѣщеній и неустойчиво—для другихъ.

Примѣромъ такихъ положеній равновѣсія можетъ служить, въ примѣрѣ 43-мъ, точка B (чертежъ 27-й), находящаяся на концѣ средней оси эллипсоида. Въ сосѣдствѣ съ этою точкою линіи уровня имѣютъ слѣдующее расположеніе.

Черезъ самую точку B проходятъ два круговыя сѣченія kBk' и $k_1Bk'_1$ эллипсоида, это суть линіи уровня съ параметромъ:

$$U_b=-\frac{\mu^2}{2}b^2;$$

внутри угловъ k_1Bk и $k'Bk'_1$ находятся линіи уровня съ параметрами большими U_b, внутри же угловъ $k'Bk_1$ и k'_1Bk — линіи уровня съ параметрами меньшими U_b.

Если матерьяльная точка будетъ отклонена изъ точки B въ точку g (см. черт. 27), то сила, приложенная къ ней, будетъ стремиться удалить ее отъ B; напротивъ, при отклоненіи матерьяльной точки въ точку h, сила будетъ стремиться приблизить ее къ B.

Подобныя точки причисляются къ положеніямъ неустойчиваго равновѣсія.

И такъ, можемъ сказать, что *если матерьяльная точка, подверженная силамъ имѣющимъ потенціалъ U, находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то поло-*

женія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U=0,\ \delta^2 U<0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (433)$$

Въ каждомъ изъ положеній равновѣсія реакція поверхности равна и противоположна равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, когда матерьяльная точка находится въ покоѣ.

2) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной неудерживающей поверхности.*

Реакція такой поверхности не можетъ быть отрицательною, а потому матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ только въ тѣхъ точкахъ неудерживающей поверхности, въ которыхъ равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ нормальна къ поверхности и направлена *по отрицательной нормали, или равна нулю.*

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой неподвиженъ, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія: въ самой нижней точкѣ сферы радіуса, равнаго длинѣ нити.

Обратно, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности неподвижнаго непроницаемаго шара, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія въ самой верхней точкѣ шара.

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ U, то положенія равновѣсія на неудерживающей поверхности находятся въ такихъ точкахъ ея, въ которыхъ:

$$\delta U=0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности и притомъ

$$\delta U\leqslant 0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки въ свободную сторону пространства.

Положенія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\bar{\delta} U=0,\ \delta^2 U<0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (434)$$

для перемѣщеній вдоль по поверхности, и притомъ

$$\delta U<0, \text{ или } \delta U=0, \ \delta^2 U<0 \ldots\ldots\ldots (435)$$

для перемѣщеній въ свободную сторону пространства.

Напримѣръ, положеніе равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на сферѣ, не удерживающей внутрь своей полости, есть положеніе устойчивое, потому что въ этой точкѣ, для перемѣщеній по поверхности сферы:

$$\delta U=mg\delta y=0, \ \delta^2 U=mg\delta^2 y<0 \ ^*),$$

для всякихъ же перемѣщеній въ свободную сторону y уменьшается, а слѣдовательно, для такихъ перемѣщеній:

$$\delta U=mg\delta y<0.$$

Положеніе же равновѣсія на верхней точкѣ непроницаемаго шара есть положеніе неустойчивое, потому что въ этой точкѣ:

$$x=0, \ z=0, \ y=-l$$

$$\delta U=mg\delta y=0, \ \delta^2 U=mg\frac{(\delta x)^2+(\delta z)^2}{l}>0$$

для перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія положеній равновѣсія матерьяльной точки на удерживающихъ и неудерживающихъ поверхностяхъ.

Примѣръ 44-й. Тяжелая матерьяльная точка прикрѣплена къ одному концу гибкой нерастяжимой нити; эта нить перекинута черезъ безконечно-

---

*) $$y^2=l^2-x^2-z^2; \ y\delta y=-x\delta x-z\delta z$$

$$y\delta^2 y=-(\delta y)^2-(\delta x)^2-(\delta z)^2$$

Въ точкѣ: $x=0$, $z=0$, $y=l$:

$$\delta y=0, \ \delta^2 y=-\frac{(\delta x)^2+(\delta z)^2}{l}<0.$$

малый блокъ съ неподвижною осью и имѣетъ на другомъ концѣ гирю, масса которой равна Q, между тѣмъ, какъ масса матерьяльной точки равна m. Опредѣлить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, составляющей уголъ J съ горизонтомъ и проходящей черезъ точку K (черт. 28) вертикальной линіи, проведенной внизъ черезъ центръ O блока; разстояніе OK равно c.

Натяженіе нити или реакцію ея, приложенную къ матерьяльной точкѣ M, можно разсматривать, какъ силу постоянной величины gQ, направленную къ точкѣ O.

Въ этомъ случаѣ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ:

Точка M можетъ находиться въ равновѣсіи только въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O и перпендикулярной къ наклонной плоскости; въ этой плоскости она будетъ находиться въ покоѣ въ такомъ положеніи, при которомъ проэкція силы тяжести точки M на направленіе ML (черт. 28) равна проэкціи реакціи нити на направленіе MK; означая уголъ OMK чрезъ φ, будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$gQ\cos\varphi = mg\sin J,$$

которое должно быть удовлетворено въ положеніяхъ равновѣсія матерьяльной точки.

Изъ этого уравненія опредѣлится величина косинуса угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{m}{Q}\sin J;$$

чтобы рѣшеніе было возможно, необходимо, чтобы Q было болѣе $m\sin J$.

Если наклонная плоскость не удерживаетъ матерьяльную точку отъ перемѣщеній вверхъ, то, для равновѣсія точки на плоскости, необходимо, чтобы было

$$mg\cos J \geqslant gQ\sin\varphi.$$

Это условіе будетъ удовлетворено во всякомъ случаѣ, если φ отрицательное, то есть, если точка O ниже точки K; если же O выше точки K, то оно будетъ удовлетворено въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{m^2}{Q^2}\cos^2 J \geqslant \sin^2\varphi,$$

то есть, когда:

$$\frac{m^2}{Q^2}\cos^2 J \geqslant 1 - \frac{m^2}{Q^2}\sin^2 J,\quad \frac{m}{Q} \geqslant 1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что на неудерживающей плоскости равновѣсіе возможно при условіи, что Q не болѣе m и не менѣе $m \sin J$.

Если равновѣсіе возможно, то оно будетъ навѣрно устойчивое. Въ самомъ дѣлѣ, при перемѣщеніи точки M по $\overline{MK}$ уголъ φ увеличивается, а, слѣдовательно, проэкція силы gQ на это направленіе уменьшается, между тѣмъ, какъ проэкція силы mg на направленіе $\overline{ML}$ остается постоянною; поэтому дѣйствіе послѣдней силы становится преобладающимъ и матерьяльная точка побуждается къ возвращенію назадъ. Напротивъ, при перемѣщеніи точки по $\overline{ML}$ уголъ φ уменьшается, а, слѣдовательно, дѣйствіе силы gQ становится преобладающимъ надъ дѣйствіемъ силы mg; поэтому и при такомъ перемѣщеніи, силы побуждаютъ матерьяльную точку возвратиться въ положеніе равновѣсія.

Примѣръ 45-й. Положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если къ матерьяльной точкѣ, кромѣ силы тяжести, приложена сила постоянной величины gQ, направленная къ центру эллипсоида; ось $Z^{\text{овъ}}$ предполагается направленною вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U=g(mz-Qr);\quad r^2=x^2+y^2+z^2;$$

а поэтому:

$$\delta U=g(m\delta z-Q\delta r);\quad \delta^2 U=g(m\delta^2 z-Q\delta^2 r),$$

гдѣ:

$$z\delta z=-\frac{c^2}{a^2}x\delta x-\frac{c^2}{b^2}y\delta y;$$

$$z\delta^2 z+(\delta z)^2=-\frac{c^2}{a^2}(\delta x)^2-\frac{c^2}{b^2}(\delta y)^2,$$

$$\delta r=\frac{x\delta x+y\delta y+z\delta z}{r}=\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\delta x}{r}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\delta y}{r}$$

$$\delta^2 r=\frac{(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2+z\delta^2 z}{r}-\frac{(\delta r)^2}{r}=$$

$$=\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{(\delta x)^2}{r}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{(\delta y)^2}{r}-\frac{(\delta r)^2}{r}.$$

IV-55.

Исключивъ δz изъ δU, получимъ:

$$\delta U = -g\left[\left(\frac{m}{z}c^2 + \frac{Q}{r}(a^2 - c^2)\right)\frac{x\delta x}{a^2} + \left(\frac{m}{z}c^2 + \frac{Q}{r}(b^2 - c^2)\right)\frac{y\delta y}{b^2}\right],$$

гдѣ r означаетъ положительную величину разстоянія точки отъ центра эллипсоида.

Мы найдемъ слѣдующія положенія равновѣсія:

1) Точки $x=0$, $y=0$ $z=\pm c$; въ нихъ:

$$\delta^2 U = -\frac{g}{c}\left[\left((a^2 - c^2)Q \pm c^2 m\right)\left(\frac{\delta x}{a}\right)^2 + \left((b^2 - c^2)Q \pm c^2 m\right)\left(\frac{\delta y}{b}\right)^2\right],$$

гдѣ знаки $+$ соотвѣтствуютъ нижней, а знаки $(-)$ — верхней точкѣ; слѣдовательно, нижняя точка есть всегда положеніе устойчиваго равновѣсія, верхняя же — только тогда, когда

$$Q \geqq \frac{c^2 m}{b^2 - c^2}.$$

2) точки $x=0$,

$$\frac{x_1}{c} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}}\frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + Q^2(b^2 - c^2)}}, \quad \frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}};$$

здѣсь:

$$\delta^2 U = -g\left[(a^2 - b^2)\frac{Q(\delta x)^2}{ra^2} - (b^2 - c^2)\frac{Qc^2}{r^3}\frac{y^2(\delta y)^2}{z^2b^2}\right],$$

поэтому въ этихъ точкахъ положеніе равновѣсія не представляетъ полной устойчивости.

3) Точки:

$$y=0, \quad \frac{z_2}{e} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}\frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + Q^2(a^2 - e^2)}}$$

$$\frac{x}{a} = \pm\sqrt{1 - \frac{z_2^2}{c^2}},$$

въ которыхъ

$$\delta^2 U = gQ\left[(a^2 - b^2)\frac{(\delta y)^2}{rb^2} + (a^2 - c^2)\frac{c^2x^2(\delta x)^2}{r^3z^2a^2}\right];$$

положенія равновѣсія — неустойчивыя.

3) *Матерьяльная точка находится на неподвижной негладкой поверхности.*

Для того, чтобы матерьяльная точка могла оставаться въ покоѣ на негладкой неподвижной поверхности, нужно, чтобы сила тренія, приложенная къ матерьяльной точкѣ, уравновѣшивалась съ проэкціею равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ на касательную плоскость. Величина силы тренія равна $\varkappa\sqrt{\mathfrak{N}^2}$, гдѣ $\sqrt{\mathfrak{N}^2}$ есть положительно взятая величина нормальной реакціи поверхности, а $\varkappa$ есть численный коэфиціентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ коэфиціентомъ k_1 тренія покоющейся матерьяльной точки о неподвижную данную поверхность. Реакція $\mathfrak{N}$ по направленію положительной нормали равна проэкціи равнодѣйствующей F задаваемыхъ силъ на направленіе отрицательной нормали.

На удерживающей поверхности реакція $\mathfrak{N}$ можетъ быть положительною или отрицательною; при равновѣсіи матерьяльной точки на такой поверхности:

$$F\sin(F,N)=\varkappa\sqrt{\mathfrak{N}^2}, \quad -F\cos(F,N)=\mathfrak{N},$$

гдѣ $\varkappa$ не менѣе нуля и не болѣе k_1.

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\operatorname{tg}(F,N)=\pm\varkappa, \quad \varkappa\leqq k_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (436)$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ положительною нормалью, знакъ $(-)$ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ отрицательною нормалью.

Число или дробь k_1 можно разсматривать, какъ тангенсъ нѣкотораго угла ε_1, называемаго *угломъ тренія* между данною поверхностью и данною матерьяльною точкою при взаимномъ ихъ покоѣ.

Изъ предыдущаго видно, что, для равновѣсія матерьяльной точки на неподвижной негладкой удерживающей поверхности, необходимо, чтобы острый уголъ, составляемый направленіемъ силы F съ положительною или отрицательною нормалью, былъ не болѣе ε_1, гдѣ

$$k_1=\operatorname{tg}\varepsilon_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (437)$$

Реакція неудерживающей поверхности не можетъ быть отрицательною; поэтому, на негладкой неудерживающей поверхности матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ мѣстахъ поверхности, въ которыхъ направленіе силы F составляетъ съ отрицательною нормалью уголъ, не большій ε_1.

Представимъ себѣ коническую поверхность, вершина которой находится въ какой либо точкѣ M данной неудерживающей поверхности, и производящія которой составляютъ острый уголъ ε_1 съ отрицательною нормалью къ поверхности. Точка M будетъ положеніемъ равновѣсія матерьяльной точки, если сила F, приложенная къ послѣдней, будетъ имѣть направленіе, не выходящее за предѣлы вышеозначеннаго конуса; такой конусъ называется конусомъ тренія.

Вслѣдствіе такого простора условій равновѣсія, мѣста положеній равновѣсія матерьяльной точки на негладкой поверхности занимаютъ на ней цѣлые пояса или площади, во всѣхъ точкахъ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности твердаго негладкаго неподвижнаго шара, можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ направленіе нормали, проведенной къ центру шара, составляетъ съ направленіемъ силы тяжести уголъ не большій ε_1; всѣ такія точки находятся на томъ сегментѣ сферической поверхности, который выше уровня:

$$y = -R\cos\varepsilon_1,$$

(ось $Y^{овъ}$ направлена вертикально внизъ); матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ этой части поверхности сферы.

Тяжелая матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J, если только уголъ J не болѣе угла ε_1 тренія между покоящеюся матерьяльною точкою и наклонною плоскостью.

Примѣръ. Опредѣлить ту часть поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

всѣ точки которой суть положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на наружной поверхности эллипсоида; положительная ось Zовъ параллельна направленію силы тяжести; коэфиціентъ тренія покоя $k_1=0,16$.

Эта часть поверхности заключаетъ въ себѣ самую высшую точку эллипсоида и ограничена линіею пересѣченія поверхности его съ коническою поверхностью:

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{z^2}{c^4}\,0,0256.$$

Примѣръ 46-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на наклонной плоскости и притягивается къ точкѣ O (черт. 28) силою, прямопропорціональною разстоянію отъ этой точки; если матерьяльная точка находится въ точкѣ K, то величина этой силы равна gQ, гдѣ Q меньше m (массы матерьяльной точки). Опредѣлить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, принимая въ разсчетъ треніе.

Примемъ точку K за начало координатныхъ осей, направленныхъ такъ: положительная ось Yовъ внизъ по линіи наибольшаго ската по наклонной плоскости, ось Xовъ горизонтально, ось Zовъ по нормали къ плоскости, вверхъ; тогда координаты точки O будутъ: $x=0$, $y=-c\sin J$, $z=c\cos J$.

Проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X=-Qg\frac{x}{c},\quad Y=mg\sin J-Qg\frac{y+c\sin J}{c}$$

$$Z=-mg\cos J+Qg\cos J.$$

Равновѣсіе матерьяльной точки на плоскости возможно въ тѣхъ положеніяхъ ея, въ которыхъ:

$$-\varkappa Z=\sqrt{X^2+Y^2},\quad \varkappa\leqq\operatorname{tg}\varepsilon_1,$$

или:

$$\varkappa\cos J\left(1-\frac{Q}{m}\right)=\sqrt{\frac{Q^2}{m^2}\frac{x^2}{c^2}+\left(\frac{Q}{m}\frac{y}{c}-\sin J\left(1-\frac{Q}{m}\right)\right)^2}.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри круга:

$$x^2+\left(y-c\sin J\left(\frac{m}{Q}-1\right)\right)^2=\left(\frac{m}{Q}-1\right)^2c^2\cos^2J\operatorname{tg}^2\varepsilon_1.$$

IV-55.

центръ котораго представляетъ положенiе равновѣсiя на гладкой наклонной плоскости, а радiусъ равенъ:

$$\left(\frac{m}{Q}-1\right) c \cos J \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

Каждой величинѣ $\varkappa$ соотвѣтствуетъ своя окружность радiуса

$$\varkappa\left(\frac{m}{Q}-1\right) c \cos J.$$

Примѣръ 47-й. Опредѣлить мѣсто положенiй равновѣсiя въ примѣрѣ 44-мъ, предполагая существованiе силы тренiя между наклонною плоскостью и матерьяльною точкою m.

Расположивъ оси координатъ такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, мы найдемъ, что проэкцiи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X=-Qg\frac{x}{r},\quad Y=mg\left(p\sin J-\frac{Q}{m}\frac{y}{r}\right),\quad Z=-mgp\cos J,$$

$$p=1-\frac{Q}{m}\frac{c}{r},\quad r^2=x^2+y^2+c^2+2cy\sin J.$$

Всѣ положенiя равновѣсiя заключаются внутри кривой линiи:

$$x^2+\left(y-c\sin J\left(\frac{mr}{Qc}-1\right)\right)^2=\left(\frac{mr}{Qc}-1\right)^2 c^2\cos^2 J \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1.$$

4) *Матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линiи.*

Матерьяльная точка, находящаяся на гладкой неподвижной кривой линiи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которыхъ проэкцiя задаваемой силы на касательную къ кривой равна нулю, то есть тамъ, гдѣ:

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0 \qquad (438)$$

Если, при отклоненiи матерьяльной точки изъ ея положенiя равновѣсiя на удерживающей кривой, сила F побуждаетъ ее возвратиться въ это положенiе, то такое положенiе равновѣсiя — устойчивое.

Когда сила F имѣетъ потенціалъ $U(x, y, z)$, то проэкція ея на направленіе касательной къ кривой выразится такъ:

$$\pm F\cos(F,v)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

такъ что, если координаты x, y, z точекъ кривой линіи будутъ выражены функціями отъ s, то будетъ:

$$\pm F\cos(F,v)=\frac{dU}{ds}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(439)}$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ скорость направлена въ сторону возрастающихъ s.

Положенія равновѣсія суть тѣ точки кривой линіи, въ которыхъ

$$\frac{dU}{ds}=0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(440)}$$

притомъ положенія устойчиваго равновѣсія суть такія точки кривой, въ которыхъ:

$$\frac{d^2U}{ds^2}<0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(441)}$$

т.-е. тѣ, въ которыхъ значенія, принимаемыя функціею $U(s)$ на кривой линіи, имѣютъ максимумъ.

Примѣръ 48-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на винтовой линіи:

$$x=R\cos\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\ \ y=R\sin\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\ \ z=s\sin\alpha,$$

ось которой вертикальна (ось $Z^{\text{овъ}}$ направлена снизу вверхъ); матерьяльная точка отталкивается отъ начала координатъ силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія; опредѣлить положенія равновѣсія.

Здѣсь:

$$U=-mgz-\frac{m\mu^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-m\left(gs\sin\alpha+\frac{\mu^2}{\sqrt{R^2+s^2\sin^2\alpha}}\right);$$

$$\frac{dU}{ds}=-mg\sin\alpha\left(1-\frac{\mu^2}{g}\frac{s\sin\alpha}{r^3}\right)$$

$$\frac{d^2U}{ds^2}=m\mu^2\sin^2\alpha\,\frac{(3R^2-2r^2)}{r^5};\ \ r^2=R^2+s^2\sin^2\alpha$$

N-55.

Первая производная отъ U обращается въ нуль въ тѣхъ точкахъ кривой линіи, въ которыхъ:

$$s=\frac{gr^3}{\mu^2 \sin\alpha};$$

такъ какъ r есть величина положительная, то и s болѣе нуля, слѣдовательно, положенія равновѣсія находятся только на той части кривой линіи, которая выше плоскости XY.

Послѣднее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$r^6-\frac{\mu^4}{g^2}s^2\sin^2\alpha=0$$

$$(r^2)^3-\frac{\mu^4}{g^2}r^2+\frac{\mu^4}{g^2}R^2=0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \textbf{(443)}$$

Тѣ положительные корни этого уравненія третьей степени, которые не менѣе R^2, опредѣляютъ положенія равновѣсія; такихъ корней можетъ быть только два, такъ какъ при $r^2=+\infty$ и при $r^2=R^2$ первая часть уравненія (443) имѣетъ знакъ положительный.

Эти два корня будутъ дѣйствительные, если будетъ удовлетворено условіе:

$$R^2<\frac{2}{3}r_0^2,\ \ r_0^2=\frac{\mu^2}{g\sqrt{3}}.$$

Величина r_0^2 есть корень производной первой части уравненія (443) по r^2, то есть:

$$3(r_0^2)^2-\frac{\mu^4}{g^2}=0;$$

поэтому изъ двухъ корней уравненія (443), бо̀льшихъ R^2, одинъ долженъ быть менѣе, а другой — болѣе r_0^2; означимъ первый черезъ r_1^2, второй — черезъ r_2^2.

Такъ какъ

$$r_2^2>r_0^2>\frac{3}{2}R^2,$$

то этотъ корень r_2^2 опредѣляетъ навѣрно положеніе устойчиваго равновѣсія.

Величина и направленіе силы F, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ покоѣ въ одномъ изъ положеній равновѣсія на кривой, представляетъ величину и направленіе давленія,

производимаго точкою на кривую (§ 52); поэтому реакція кривой линіи равна и прямопротивоположна силѣ F.

Если кривая линія есть линія пересѣченія двухъ неподвижныхъ гладкихъ поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0,\ \ f_2(x, y, z)=0,$$

то реакціи этихъ поверхностей опредѣлятся, какъ составляющія, по нормалямъ N_1 и N_2, реакціи кривой линіи, то есть, величины $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ опредѣлятся изъ равенствъ (379, a) и (379, b), если въ нихъ сдѣлать Kf_1 и Kf_2 равными нулю.

5) *Матерьяльная точка находится на пересѣченіи трехъ неподвижныхъ поверхностей, пересѣкающихся въ одной точкѣ.*

Если всѣ три поверхности удерживающія, то положеніе точки вполнѣ опредѣлено. Реакціи поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0,\ \ f_2(x, y, z)=0,\ \ f_3(x, y, z)=0$$

опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial x}=0 \\ Y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial y}=0 \\ Z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (444)$$

$$\mathfrak{N}_1=\lambda_1\Delta f_1,\ \ \mathfrak{N}_2=\lambda_2\Delta f_2,\ \ \mathfrak{N}_3=\lambda_3\Delta f_3.$$

Давленіе матерьяльной точки на точку пересѣченія этихъ трехъ поверхностей имѣетъ величину и направленіе силы F; уравненія (444) выражаютъ, что реакціи $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ суть составляющія по нормалямъ N_1, N_2, N_3 силы, равной и прямопротивоположной силѣ F.

Если матерьяльная точка помѣщена въ точкѣ пересѣченія четырехъ или большаго числа неподвижныхъ поверхностей, то величины реакцій этихъ поверхностей окажутся неопредѣленными; напримѣръ, въ случаѣ четырехъ поверхностей, можемъ приписать

произвольную величину реакціи $\mathfrak{N}_4$, тогда величины реакцій $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ опредѣлятся тѣмъ, что геометрическая сумма всѣхъ четырехъ реакцій и силы F должна быть равна нулю:

$$\overline{\mathfrak{N}}_1+\overline{\mathfrak{N}}_2+\overline{\mathfrak{N}}_3+\overline{\mathfrak{N}}_4+\overline{F}=0 \text{ *)}.$$

§ 56. Импульсъ силы.

Въ началѣ параграфа 23 было сказано, что̀ понимаютъ подъ именемъ количества движенія матерьяльной точки, какими единицами оно измѣряется, какъ оно изображается длиною и что̀ понимаютъ подъ именемъ проэкцій количества движенія.

---

*) Для выхода изъ этой неопредѣленности, приходится принимать въ разсчетъ упругость тѣлъ, образующихъ преграды. Для поясненія, приводимъ слѣдующій простой примѣръ.

Матерьяльная точка, вѣсъ которой mg, виситъ въ покоѣ на двухъ нитяхъ неравной длины; первая нить длины l, прикрѣплена верхнимъ концомъ въ началѣ координатъ ($x=0$, $y=0$, $z=0$), вторая, длины $(l+c)$, прикрѣплена верхнимъ концомъ въ точкѣ ($x=0$, $y=0$, $z=-c$). Если предполагать нити нерастяжимыми, то матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ въ положеніи ($x=0$, $y=0$, $z=l$), причемъ сумма величинъ реакцій $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ нитей будетъ равна mg; величины же каждой изъ этихъ реакцій будутъ неопредѣленны.

Если же примемъ въ разсчетъ упругость нитей, то эта неопредѣленность будетъ устранена. Пусть ω_1 и ω_2 суть площади поперечныхъ сѣченій нитей, E_1 и E_2 — ихъ модули упругости, ε — удлиненія нитей, такъ что длина первой нити въ натяженномъ состояніи равна $(l+\varepsilon)$, а длина второй нити въ томъ же состояніи равна $(l+c+\varepsilon)$; вслѣдствіе растяженія нитей, положеніе равновѣсія матерьяльной точки будетъ въ точкѣ $z=l+\varepsilon$.

На основаніи извѣстныхъ законовъ растяженія упругихъ стержней и нитей:

$$\frac{\varepsilon}{l}=\frac{\mathfrak{N}_1}{E_1\omega_1};\quad \frac{\varepsilon}{l+c}=\frac{\mathfrak{N}_2}{E_2\omega_2};$$

изъ этихъ равенствъ и изъ равенства

$$\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2=mg$$

опредѣлимъ величину ε и отношеніе между величинами реакцій:

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_2}=\frac{E_1\omega_1}{E_2\omega_2}\left(1+\frac{c}{l}\right).$$

Согласно съ этимъ будемъ имѣть ввиду, что количеству движенія матерьяльной точки мы приписываемъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ скорости точки; мы будемъ представлять себѣ, что количество движенія изображено длиною, имѣющею направленіе скорости и во столько разъ большею единицы длины, во сколько разъ изображаемое количество движенія болѣе единицы количествъ движенія.

Пусть t и t суть два какіе либо момента времени; координаты точки, величины количества движенія и проэкціи количества движенія на оси координатъ въ эти моменты обозначимъ слѣдующими знаками:

въ моментъ $t : x, y, z, mv, mx', my', mz'$

въ моментъ $\mathrm{t} : \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, m\mathrm{v}, m\mathrm{x}', m\mathrm{y}'. m\mathrm{z}'$ *).

Измѣненіемъ количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t мы будемъ называть то количество движенія, которое изобразится геометрическою разностью между длинами, изображающими количества движенія $m\mathrm{v}$ и mv.

Проэкціи на оси координатъ этого измѣненія количества движенія выразятся разностями:

$$m\mathrm{x}'-mx',\ \ m\mathrm{y}'-my',\ \ m\mathrm{z}'-mz'.$$

(На черт. 29 количества движенія $m\mathrm{v}$ и mv изображены длинами $\overline{AK_2}$ и $\overline{AK_1}$, проведенными изъ какой либо точки A; измѣненіе количества движенія изобразится длиною $\overline{AИ}$, равною и параллельною длинѣ $\overline{K_1K_2}$).

Положимъ, что свободная матерьяльная точка движется подъ вліяніемъ дѣйствія приложенной къ ней силы F, которой проэкціи

$$X,\ Y,\ Z$$

суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

---

*) Различіе въ обозначеніяхъ состоитъ въ томъ, что величины, относящіяся къ болѣе позднему моменту t, обозначены прямыми буквами, между тѣмъ какъ величины, относящіяся къ раннему моменту t, обозначены курсивными буквами.

При опредѣленномъ движеніи этой матерьяльной точки, координаты ея суть опредѣленныя функціи времени:

$$f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t).$$

Помножимъ на dt дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, получимъ:

$$d(mx')=Xdt,\ d(my')=Ydt,\ d(mz')=Zdt;\ldots\ \mathbf{(445)}$$

затѣмъ представимъ себѣ, что координаты точки, входящія въ X, Y, Z, замѣнены функціями f_1, f_2, f_3, и что производныя координатъ по времени, заключающіяся въ X, Y, Z, замѣнены производными функцій f_1, f_2, f_3; тогда X, Y, Z выразятся функціями времени.

Взявъ интегралы въ предѣлахъ отъ t до t отъ обѣихъ частей каждаго изъ равенствъ (445), получимъ:

$$m\mathrm{x}'-mx'=И_x,\ m\mathrm{y}'-my'=И_y,\ m\mathrm{z}'-mz'=И_z,\ldots\ \mathbf{(446)}$$

гдѣ

$$И_x=\int_t^{\mathrm{t}}Xdt,\ И_y=\int_t^{\mathrm{t}}Ydt,\ И_z=\int_t^{\mathrm{t}}Zdt\ldots\ \mathbf{(447)}$$

Изъ равенствъ (446) видно, что измѣненіе количества движенія точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется величинѣ:

$$И=\sqrt{И_x^2+И_y^2+И_z^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathbf{(448)}$$

и имѣетъ такое направленіе, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ равны отношеніямъ:

$$\frac{И_x}{И},\ \frac{И_y}{И},\ \frac{И_z}{И}.$$

Величина $И$ называется *импульсомъ силы F въ теченіи промежутка времени отъ t до t*; мы приписываемъ импульсу

не только величину, но и направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$И\cos(И,X)=И_x,\quad И\cos(И,У)=И_y,\quad И\cos(И,Z)=И_z.$$

Равенства (446) выражаютъ тогда, что *измѣненіе количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется импульсу силы F въ теченіи того же промежутка времени.*

Величины $И_x$, $И_y$, $И_z$ суть проэкціи импульса на оси координатъ.

Величины вторыхъ частей равенствъ (445) суть проэкціи на оси координатъ импульса силы F въ теченіи элемента времени dt; этотъ *элементарный импульсъ* имѣетъ безконечно-малую величину, если сила F имѣетъ величину конечную.

Разность между величинами живой силы матерьяльной точки въ моменты t и t можетъ быть выражена произведеніемъ изъ импульса на полусумму проэкцій скоростей v и v на направленіе импульса; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (446) на x', y', z' и сложивъ, получимъ:

$$m\mathrm{v}^2-m\mathrm{v}v\cos(\mathrm{v},v)=И\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},И);$$

помноживъ тѣ же равенства на x', y', z' и сложивъ ихъ, получимъ:

$$m\mathrm{v}v\cos(\mathrm{v},v)-mv^2=Иv\cos(v,И);$$

отсюда же найдемъ:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{И}{2}\Big(\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},И)+v\cos(v,И)\Big)\;\ldots\;\mathbf{(449)}$$

§ 57. Мгновенныя силы.

Нѣкоторыя явленія совершаются подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи весьма малаго промежутка времени, но достигающихъ огромной величины во время своего дѣйствія; таковы, напримѣръ, силы, развивающіяся при ударахъ тѣлъ, при разложеніи взрывчатыхъ веществъ, и другія.

Подобныя силы, несмотря на краткую продолжительность своего дѣйствія, производятъ весьма замѣтныя измѣненія въ скоростяхъ тѣхъ тѣлъ, къ которымъ онѣ приложены, между тѣмъ, какъ перемѣщенія, совершенныя этими тѣлами во время дѣйствія такихъ силъ, сравнительно малы, а часто даже ничтожны.

Положимъ, что къ свободной матерьяльной точкѣ приложена такая сила $\mathfrak{F}$, которая дѣйствуетъ на нее въ теченіи весьма короткаго промежутка времени ϑ, но сообщаетъ ей за время своего дѣйствія импульсъ замѣтной величины. Пусть t_0 есть моментъ начала дѣйствія этой силы, $\mathrm{t}=(t_0+\vartheta)$ — моментъ окончанія ея дѣйствія; x_0, y_0, z_0, — координаты точки m въ моментъ t_0; x_0', y_0', z_0' — проэкціи на оси координатъ скорости v_0 точки m въ моментъ t_0.

Кромѣ того, означимъ: буквами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — проэкціи этой быстродѣйствующей силы $\mathfrak{F}$ на оси координатъ, буквою $\mathfrak{J}$ величину и направленіе импульса этой силы за все время ея дѣйствія; проэкціи этого импульса на оси координатъ будемъ обозначать такъ: $\mathfrak{J}_x, \mathfrak{J}_y, \mathfrak{J}_z$.

Если къ матерьяльной точкѣ не приложено болѣе никакихъ силъ, кромѣ силы $\mathfrak{F}$, то результатъ окончательнаго дѣйствія этой силы на точку m будетъ заключаться:

въ измѣненіи количества движенія матерьяльной точки за время дѣйствія силы $\mathfrak{F}$:

$$m\mathrm{x}'-mx_0'=\mathfrak{J}_x,\quad m\mathrm{y}'-my_0'=\mathfrak{J}_y,\quad m\mathrm{z}'-mz_0'=\mathfrak{J}_z \ldots \mathbf{(450)}$$

и въ измѣненіи положенія матерьяльной точки въ теченіи того же промежутка времени.

Разности между координатами точки m въ концѣ и въ началѣ промежутка времени ϑ выразятся слѣдующими формулами:

$$\mathrm{x}-x_0=x_0'\vartheta+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\mathfrak{X}dt \ldots\ldots \mathbf{(451, a)}$$

$$\mathrm{y}-y_0=y_0'\vartheta+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\mathfrak{Y}dt \ldots\ldots \mathbf{(451, b)}$$

$$z - z_0 = z_0\vartheta + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}dt; \ldots\ldots\ldots (451, c)$$

эти разности мы условимся называть проэкціями на оси координатъ перемѣщенія точки въ теченіи промежутка времени ϑ.

Если импульсъ $\mathfrak{J}$, сообщаемый силою $\mathfrak{F}$ матерьяльной точкѣ, имѣетъ замѣтную (но не безконечно-большую) величину, продолжительность же ϑ дѣйствія силы настолько ничтожна, что можно пренебречь всякими перемѣщеніями, совершенными за время ϑ, то такая сила $\mathfrak{F}$ называется *мгновенною силою.*

Степень малости промежутка времени ϑ должна быть такова, чтобы можно было пренебречь длиною:

$$V\vartheta$$

сравнительно съ конечными длинами, входящими въ наши разсчеты; здѣсь V означаетъ какую либо скорость конечной величины.

При такой степени малости промежутка времени ϑ можно пренебречь перемѣщеніями, совершенными за это время какими бы то ни было точками, движущимися одновременно съ матерьяльною точкою m, если только скорости этихъ точекъ имѣютъ конечныя величины.

То же самое можно сказать относительно величины перемѣщенія матерьяльной точки m за время ϑ, если только импульсы силы $\mathfrak{F}$ за время отъ момента t_0 до какого либо момента $t < t_0 + \vartheta$ имѣютъ величины конечныя; въ самомъ дѣлѣ, если импульсъ

$$\mathfrak{J} = \left[\left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}dt\right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{Y}dt\right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

не превышаетъ, ни при какомъ t, конечной величины J, то абсолютныя величины интеграловъ вторыхъ частей равенствъ (451) менѣе величины

$$\frac{J}{m}\vartheta.$$

гдѣ частное $(J:m)$ выражаетъ нѣкоторую конечную скорость; по малости же промежутка времени ϑ, мы можемъ пренебречь длинами:

$$x_0'\vartheta,\ y_0'\vartheta,\ z_0'\vartheta,\ \frac{J}{m}\vartheta,$$

а, слѣдовательно, и перемѣщеніемъ матерьяльной точки за время ϑ.

Принимая во вниманіе все сказанное въ настоящемъ параграфѣ, можемъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ высказать опредѣленіе понятія о мгновенной силѣ, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Мгновенная сила дѣйствуетъ впродолженіи такого малаго промежутка времени, въ теченіи котораго могутъ совершиться только самыя незначительныя, пренебрегаемыя нами, перемѣщенія точекъ, движущихся съ конечными скоростями.

Не смотря на кратковременность своего дѣйствія, мгновенная сила сообщаетъ той матерьяльной точкѣ, къ которой она приложена, импульсъ конечной не малой величины; перемѣщеніе же матерьяльной точки за время дѣйствія мгновенной силы—ничтожно.

Къ этому слѣдуетъ еще прибавить, что импульсъ, сообщаемый матерьяльной точкѣ за время ϑ всякою немгновенною силою, приложенною къ этой точкѣ, ничтоженъ сравнительно съ импульсомъ силы мгновенной; поэтому формулы (450) справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ къ матерьяльной точкѣ приложена, кромѣ мгновенной силы $\mathfrak{F}$, какая либо немгновенная сила F; импульсомъ послѣдней за время отъ t_0 до $(t_0+\vartheta)$ мы пренебрегаемъ.

§ 58. Ударъ матерьяльной точки о преграждающую поверхность.

Положимъ, что свободная матерьяльная точка m, подверженная дѣйствію нѣкоторой немгновенной силы F, совершаетъ движеніе:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t),\ \dots\dots\dots \quad (452)$$

гдѣ x, y, z суть координаты движущейся матерьяльной точки.

Пусть, кромѣ того, имѣется неудерживающая преграда, образуемая поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (453)$$

причемъ предполагается, что уравненіе этой неудерживающей поверхности написано такъ, какъ слѣдуетъ по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го.

Матерьяльная точка движется свободно, пока не встрѣтитъ этой поверхности.

При встрѣчѣ матерьяльной точки съ преграждающею поверхностью координаты матерьяльной точки должны будутъ удовлетворять уравненію поверхности; а потому моментъ t_0 встрѣчи долженъ быть дѣйствительнымъ корнемъ уравненія:

$$f[f_1(t_0),\ f_2(t_0),\ f_3(t_0),\ t_0] = 0.$$

Координаты матерьяльной точки и проэкціи на оси координатъ скорости ея въ этотъ моментъ будутъ слѣдующія:

$$x_0 = f_1(t_0),\ y_0 = f_2(t_0),\ z_0 = f_3(t_0)$$

$$x_0' = f'_1(t_0),\ y'_0 = f'_2(t_0),\ z_0' = f_3'(t_0).$$

Означимъ черезъ v_0 величину и направленіе скорости абсолютнаго движенія матерьяльной точки въ моментъ t_0 и черезъ u_0 — величину и направленіе скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ преграждающая поверхность (см. § 33, стр. 175—176, § 34, стр. 180).

Дальнѣйшее состояніе движенія матерьяльной точки зависитъ отъ того, составляетъ ли относительная скорость u_0 острый или тупой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности (453).

Если

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} > 0,$$

то есть

$$v_0 \cos(v_0, N) > -\frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) > 0,$$

(см. § 34, формула (277)), то матерьяльная точка продолжаетъ движеніе, выражаемое формулами (452), безъ всякаго препятствія со стороны преграждающей поверхности.

Если же

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots \quad (454)$$

то есть:

$$\Delta f \,.\, v_0 \cos(v_0, N) + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots \quad (455)$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) < 0, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (456)$$

то это неравенство, противорѣчащее условію (274) *), требуемому преградою, показываетъ, что матерьяльная точка, по причинѣ своей инерціи, стремится преодолѣть эту преграду.

Такому стремленію матерьяльной точки преграда противодѣйствуетъ, оказывая на точку реакцію, направленную по положительной нормали.

Эта реакція должна сообщить матерьяльной точкѣ такой импульсъ, который измѣнилъ бы скорость v_0 матерьяльной точки въ скорость v, удовлетворяющую условію:

$$\Delta f \,.\, \mathrm{v} \cos(\mathrm{v}, N) + \frac{\partial f}{\partial t} \geqslant 0; \dots\dots\dots \quad (275)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ импульсъ долженъ быть сообщенъ мгновенно для того, чтобы матерьяльная точка не успѣла войти внутрь непроницаемаго тѣла, ограниченнаго поверхностью (453).

Поэтому мы предположимъ, что *реакція, измѣняющая скорость* v_0 (удовлетворяющую неравенству (455)) *въ скорость* v (удовлетворяющую условію (275)), *есть мгновенная сила, дѣй-*

---

*) На страницѣ 179; это же условіе выражается формулами (275) и (277).

ствующая въ теченіи столь ничтожнаго промежутка времени ϑ, *въ теченіи котораго перемѣщенія матерьяльной точки и поверхности* (453) *ничтожны; эта мгновенная сила направлена по положительной нормали* N.

Такой процессъ мгновеннаго измѣненія скорости матерьяльной точки при встрѣчѣ ея съ преграждающею поверхностью называется *ударомъ матерьяльной точки* о поверхность; моментъ t_0 называется *моментомъ паденія точки на поверхность*, моментъ $t=(t_0+\vartheta)$ *моментомъ отраженія*.

При опредѣленіи результата удара матерьяльной точки надо принять во вниманіе слѣдующія обстоятельства:

1) Вслѣдствіе ничтожной малости промежутка времени ϑ координаты матерьяльной точки предполагаются постоянными (x_0, y_0, z_0) во все время удара (отъ момента t_0 до момента $t=t_0+\vartheta$).

2) Положеніе поверхности и скорости всѣхъ точекъ ея принимаются также неизмѣнными во все время удара.

3) Импульсами немгновенныхъ силъ за время удара мы пренебрегаемъ, по ихъ ничтожной малости.

4) Мгновенная сила реакціи преграды направлена по положительной нормали N, проведенной изъ точки (x_0, y_0, z_0) поверхности (453).

По этимъ причинамъ проэкціи на оси координатъ мгновенной силы реакціи въ какой либо моментъ удара выразятся величинами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\lambda,$$

гдѣ производныя отъ f имѣютъ постоянныя величины во время всего удара, а именно тѣ величины, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t_0 въ точкѣ (x_0, y_0, z_0); λ есть нѣкоторая функція отъ t, быстро измѣняющая свою величину во время удара.

Проэкціи на оси координатъ импульса мгновенной силы за время отъ момента паденія до какого либо момента t удара выразятся такъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\int_{t_0}^{t}\lambda dt, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\int_{t_0}^{t}\lambda dt, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\int_{t_0}^{t}\lambda dt;$$

этотъ импульсъ произведетъ слѣдующее измѣненіе скорости матерьяльной точки:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dx}{dt}-mx'_0=\frac{\partial f}{\partial x}j,\\ m\frac{dy}{dt}-my'_0=\frac{\partial f}{\partial y}j,\\ m\frac{dz}{dt}-mz'_0=\frac{\partial f}{\partial z}j, \end{aligned}\right\} j=\int_{t_0}^{t}\lambda dt,$$

или:

$$\frac{x'-x'_0}{\cos(N,X)}=\frac{y'-y'_0}{\cos(N,Y)}=\frac{z'-z'_0}{\cos(N,Z)}=\frac{j\Delta f}{m};$$

это означаетъ, что измѣненіе скорости отъ момента паденія до какого либо момента t удара направлено параллельно положительной нормали N; слѣдовательно, конецъ линіи, изображающей длину и направленіе скорости v, чертитъ во время удара прямую линію, параллельную этой нормали (черт. 30).

Такъ какъ скорость v_0 паденія точки на поверхность удовлетворяетъ неравенству (455), а скорость отраженія удовлетворяетъ условію (275), и притомъ скорость измѣняется во все время удара по вышеприведенному закону, то, въ нѣкоторый моментъ τ удара, она должна будетъ получить величину и направленіе, удовлетворяющія равенству:

$$\Delta f\,.\,\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N)+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \qquad (457)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \qquad (458)$$

гдѣ $\mathfrak{v}$ означаетъ величину и направленіе скорости матерьяльной точки въ моментъ τ; α, β, γ, суть проэкціи этой скорости на оси координатъ.

Если поверхность неподвижна, то равенство (457) получитъ видъ:

$$\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N)=0,$$

это означаетъ, что скорость $\mathfrak{v}$ касательна къ поверхности.

Если же поверхность движется или деформируется, то равенство (457) можетъ быть представлено такъ:

$$\mathfrak{u} \cos(\mathfrak{u}, N) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (458 \text{ bis})$$

гдѣ $\mathfrak{u}$ есть скорость въ моментъ τ относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность.

Равенство (458, bis) выражаетъ, что относительная скорость $\mathfrak{u}$ касательна къ поверхности.

Этимъ моментомъ τ весь промежутокъ времени ϑ раздѣляется на двѣ части, а самый процессъ удара — на два акта.

За время перваго акта удара измѣненіе скорости матерьяльной точки имѣетъ величину:

$$\mathfrak{v} \cos(\mathfrak{v}, N) - v_0 \cos(v_0, N) \ldots\ldots\ldots\ldots (459)$$

Если поверхность неподвижна, то скорость $\mathfrak{v}$ въ моментъ τ перпендикулярна къ нормали, а потому тогда измѣненіе скорости за время перваго акта равно:

$$- v_0 \cos(v_0, N),$$

то есть величинѣ проэкціи скорости паденія на отрицательную нормаль.

На чертежѣ 30-мъ это измѣненіе скорости при неподвижной поверхности изображается длиною $\overline{v_0 \mathfrak{v}}$.

Можно сказать, что, если поверхность неподвижна, то за все время перваго акта удара матерьяльная точка теряетъ составляющую скорости паденія v_0 по отрицательной нормали.

Если поверхность движется или деформируется, то разность (459), на основаніи равенства (457), выразится такъ:

$$= -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t} - v_0 \cos(v_0 N), \ldots\ldots\ldots\ldots (460)$$

или:

$$- u_0 \cos(u_0, N);$$

а это есть величина проэкціи на отрицательную нормаль относительной скорости паденія матерьяльной точки.

Означимъ черезъ w величину и направленіе скорости той точки $\mathfrak{M}(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, въ которой происходитъ ударъ; какъ уже извѣстно:

$$w \cos(w,N) = -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}, \ldots\ldots\ldots\ldots (261)$$

(см. стр. 176 и 180); кромѣ того, мы знаемъ, что скорость v_0 есть геометрическая сумма скоростей u_0 и w.

Такъ какъ скорости точекъ поверхности предполагаются постоянными во все время удара, то и во всякій моментъ удара скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w; напримѣръ, абсолютная скорость $\mathfrak{v}$ есть геометрическая сумма скоростей $\mathfrak{u}$ и w, абсолютная скорость V есть геометрическая сумма скоростей U и w; такъ и изображено на чертежѣ 31.

Изъ этого слѣдуетъ, что во все время удара конецъ относительной скорости (матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность) описываетъ прямую линію, параллельную той прямой линіи, которую въ то же время чертитъ конецъ абсолютной скорости (черт. 31).

Такъ какъ въ моментъ τ относительная скорость $\mathfrak{u}$ перпендикулярна къ N (см. (458 bis)), то можно сказать, что за все время перваго акта удара матерьяльная точка теряетъ составляющую относительной скорости паденія u_0 по отрицательной нормали.

По этимъ причинамъ первый актъ удара можетъ быть названъ *актомъ потери нормальной части скорости паденія*.

Второй актъ удара начинается въ моментъ τ и оканчивается въ моментъ $\mathfrak{t} = (t_0 + \theta)$.

За все время этого втораго акта измѣненіе скорости имѣетъ величину:

$$\mathrm{V}\cos(\mathrm{V},N) - \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N) \ldots\ldots\ldots\ldots (461)$$

Если поверхность неподвижна, то величина этого измѣненія равняется проэкціи скорости отраженія V на положительную нормаль.

Если же поверхность движется или деформируется, то величина разности (461) можетъ быть выражена такъ:

$$\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N)+\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}=\mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u},N), \quad \ldots\ldots\ldots (462)$$

гдѣ $\mathfrak{u}$ есть относительная скорость отраженія матерьяльной точки; слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ измѣненіе скорости равняется проэкціи относительной скорости отраженія на положительную нормаль.

Второй актъ удара называется *актомъ возстановленія нормальной части скорости отраженія*.

Величины α, β, γ проэкцій скорости $\mathfrak{v}$ на оси координатъ могутъ быть опредѣлены изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} m\alpha &= mx'_0 + J\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\beta &= my'_0 + J\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\gamma &= mz'_0 + J\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (463)$$

$$J=\int_{t_0}^{\tau}\lambda dt \quad \ldots\ldots\ldots (464)$$

Величина J опредѣлится изъ равенства, выражающаго, что измѣненіе скорости матерьяльной точки во время *акта потери* равно величинѣ импульса реакціи за это время, дѣленной на массу точки; такъ какъ измѣненіе скорости за время перваго акта выражается формулою (460), а импульсъ реакціи за время этого акта выражается произведеніемъ $J.\Delta f$, то это равенство будетъ слѣдующее:

$$\frac{J.\Delta f}{m}=-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}-v_0\cos(v_0,N);$$

изъ него слѣдуетъ:

$$J=-m\frac{\frac{\partial f}{\partial x}x'_0+\frac{\partial f}{\partial y}y'_0+\frac{\partial f}{\partial z}z'_0+\frac{\partial f}{\partial t}}{(\Delta f)^2}, \quad \ldots\ldots (465)$$

или:

$$J=-m\frac{u_0\cos(u_0,N)}{\Delta f} \quad \ldots\ldots\ldots (466)$$

Величина импульса реакціи за время *акта возстановленія* равняется

$$I\,.\,\Delta f;\; I = \int_{\tau}^{t} \lambda dt,$$

величина же измѣненія скорости матерьяльной точки за это время выражается формулою (462), поэтому:

$$I = m\frac{\mathrm{u}\cos(\mathrm{u},N)}{\Delta f} \dots\dots\dots\dots\dots (467)$$

Изъ выраженій (466) и (467) слѣдуетъ:

$$\frac{I}{J} = \frac{\mathrm{u}\cos(\mathrm{u},N)}{-u_0\cos(u_0,N)}; \dots\dots\dots\dots\dots (468)$$

если подъ именемъ *потерянной скорости* подразумѣвать проэкцію скорости паденія на отрицательную нормаль, а подъ именемъ *возстановленной скорости* — проэкцію скорости отраженія на положительную нормаль, то равенство (468) можно высказать въ слѣдующихъ выраженіяхъ: *импульсъ второго акта такъ относится къ импульсу перваго акта, какъ возстановленная относительная скорость относится къ потерянной относительной скорости.*

Если поверхность неподвижна, то величина отношенія между этими импульсами выразится величиною отношенія абсолютной возстановленной скорости къ абсолютной потерянной скорости.

Означимъ буквою i уголъ паденія, то есть уголъ, составляемый направленіемъ скорости паденія v_0 съ отрицательною нормалью (черт. 32); буквою r означимъ уголъ отраженія, то есть уголъ, составляемый направленіемъ скорости отраженія v съ положительною нормалью; по чертежу 32 легко видѣть, что:

$$\overline{\mathfrak{M}P} = \mathrm{v}\cos(\mathrm{v},N) = \mathfrak{v}\,\mathrm{cotg}\,r$$

$$\overline{\mathfrak{M}Q} = -v_0\cos(v_0,N) = \mathfrak{v}\,\mathrm{cotg}\,i;$$

а потому, при неподвижности поверхности:

$$\frac{I}{J} = \frac{\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},N)}{-v_0\cos(v_0,N)} = \frac{\mathrm{tg}\,i}{\mathrm{tg}\,r} \dots\dots\dots (469)$$

Величина отношенія между возстановленною скоростью и потерянною скоростью зависитъ главнымъ образомъ отъ упругихъ свойствъ соударяющихся тѣлъ. По изслѣдованіямъ Ньютона величина этого отношенія не зависитъ отъ величины и направленія скорости паденія, но только отъ природы тѣхъ тѣлъ, между которыми происходитъ ударъ; такъ, при соудареніи стекла о стекло это отношеніе равно $\frac{15}{16}$ при соудареніи желѣза о желѣзо: $\frac{5}{9}$, при соудареніи тѣлъ, состоящихъ изъ прессованной шерсти, — тоже $\frac{5}{9}$; вообще, отношеніе это есть дробь, не большая единицы, то есть величина возстановленной скорости не превосходитъ величины скорости потерянной и уголъ отраженія не менѣе угла паденія (при неподвижности поверхности).

Это отношеніе называется *коэфиціентомъ возстановленія*; это есть дробь, не меньшая нуля и не бóльшая единицы, не зависящая отъ величины и направленія скорости паденія *).

Если величина коэфиціента возстановленія извѣстна (означимъ его буквою ε), то тогда мы можемъ опредѣлить проэкціи на оси координатъ скорости отраженія v по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} m\mathrm{x}' &= mx'_0 + J\frac{\partial f}{\partial x}(1+\varepsilon) \\ m\mathrm{y}' &= my'_0 + J\frac{\partial f}{\partial y}(1+\varepsilon) \\ m\mathrm{z}' &= mz'_0 + J\frac{\partial f}{\partial z}(1+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (470)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не будетъ надобности пользоваться этими формулами, такъ какъ величину и направленіе скорости отраженія можемъ опредѣлить при помощи слѣдующихъ простыхъ соображеній. Проэкція относительной скорости на касательную плоскость (то есть скорость u) не измѣняется при ударѣ; проэкція же на отрицательную нормаль относительной скорости паденія (т.-е. $-u_0\cos(u_0,N)$) замѣняется, вслѣдствіе удара, возстановленною скоростью

$$\mathrm{u}\cos(\mathrm{u},N) = \varepsilon(-u_0\cos(u_0,N)),$$

направленною по положительной нормали.

*) Позднѣйшіе опыты показали, что Ньютоново положеніе о независимости величины коэфиціента возстановленія отъ скорости паденія весьма близко къ истинѣ.

Если $\varepsilon=0$, то возстановленной скорости нѣтъ и матерьяльная точка остается на поверхности, имѣя относительную скорость u.

Если $\varepsilon=1$ и поверхность неподвижна, то уголъ отраженія равенъ углу паденія; при $\varepsilon<1$ уголъ отраженія болѣе угла паденія.

Измѣненіе живой силы матерьяльной точки при ударѣ о поверхность опредѣлится по формулѣ (449), если замѣнимъ въ ней направленіе $И$ — направленіемъ N, а величину $И$ — слѣдующимъ выраженіемъ импульса реакціи за все время удара:

$$J(1+\varepsilon)\Delta f;$$

но такъ какъ:

$$v\cos(v,N)=I\frac{\Delta f}{m}-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{dt}$$

$$v_0\cos(v_0,N)=-J\frac{\Delta f}{m}-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t},$$

то получимъ слѣдующее выраженіе величины живой силы при ударѣ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{vm_0^2}{2}=-\frac{J^2(\Delta f)^2}{2m}(1-\varepsilon^2)-J(1+\varepsilon)\frac{\partial f}{\partial t}\ldots(471)$$

Если поверхность неподвижна, то:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-\frac{mv_0^2}{2}(1-\varepsilon^2)\cos^2(v_0,N)\ldots\ldots(472)$$

то есть, *живая сила матерьяльной точки теряется при ударѣ ея о неподвижную поверхность, если коэфиціентъ возстановленія не равенъ единицѣ и если скорость паденія не перпендикулярна къ нормали; потеря живой силы тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе коэфиціентъ возстановленія и чѣмъ болѣе проэкція скорости паденія на отрицательную нормаль.*

Эта потеря живой силы можетъ быть съ избыткомъ вознаграждена живою силою, сообщаемою матерьяльной точкѣ движущеюся поверхностью, если скорость w точки $\mathfrak{M}$ составляетъ острый уголъ съ нормалью N.

Примѣръ 49-й. Тяжелая матерьяльная точка, брошенная изъ начала координатъ со скоростью V въ вертикальной плоскости XY (черт. 33) подъ угломъ $\left(J+\frac{\pi}{2}-r\right)$ къ оси X и подъ угломъ $(J+\pi-r)$ къ оси Y, совершаетъ рядъ рикошетовъ о наклонную плоскость:

Ударъ двухъ шаровъ

Въ случаѣ удара двухъ шаровъ имѣемъ:

1. уравненіе количества движенія:

$$(m_1+m_2)V_x = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \dots\dots \quad (A)$$

откуда $V_x = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$

2. уравненіе живыхъ силъ

$$T_1' - T_2' = (1-k^2)T_1$$

т. е.

$$\frac{m_1v_1'^2 - m_2v_2'^2}{2} - \frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1(v_1-V_x)^2 + m_2(V_x-v_2)^2}{2} \quad \dots \quad (B)$$

Изъ (A) получаемъ

$$m_2v_2' = (m_1+m_2)V_x - m_1v_1'$$

$$m_2v_2'^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{m_2}V_x^2 - 2\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}v_1'V_x + \frac{m_1^2}{m_2}v_1'^2$$

Подстановка въ (B) даетъ

$$m_1v_1'^2 + \left[\frac{(m_1+m_2)^2}{m_2}V_x^2 - 2\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}v_1'V_x + \frac{m_1^2}{m_2}v_1'^2\right] - \left[m_1v_1^2 + m_2v_2^2\right] -$$

$$-\left[m_1(v_1-V_x)^2 + m_2(V_x-v_2)^2\right](1-k^2) = 0.$$

Соединивъ члены, содержащіе $v_1'^2$ и раздѣливъ уравненіе на коэффиціентъ $\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}$ при $v_1'^2$, получимъ окончательно:

$$v_1'^2 - 2V_xv_1' + \left[\frac{m_1+m_2}{m_1}V_x^2 - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) -\right.$$

$$(C) \dots \left. - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\left[m_1(v_1-V_x)^2 + m_2(V_x-v_2)^2\right]\right] = \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\left[m_1(v_1-V_x)^2 + m_2(V_x-v_2)^2\right]k^2$$

Здѣсь замѣтимъ, что

$$v_1 - V_x = v_1 - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1v_1 + m_2v_1 - m_1v_1 - m_2v_2\right] = \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$$

и аналогично

$$V_x - v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$$

Поэтому подстановка даетъ

$$m_1(v_1 - V_x)^2 + m_2(V_x-v_2)^2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2 \quad (\alpha)$$

а также

$$[illegible] = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\frac{m_1+m_2}{m_2}(v_1-V_x)\right]^2 = \frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}(v_1-V_x)^2 \quad [illegible]$$

Означимъ черезъ v_1 величину скорости отраженія въ

Подставляя (D) въ лѣвую, а (E) въ правую часть (C), получимъ

$$v_1'^2 - 2V_x v_1' + V_x^2 + \left[\frac{m_2}{m_1}V_x^2 - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\cdot\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2\right] = (v_1 - V_x)^2k^2 \quad \ldots (F)$$

Но здѣсь выраженіе въ скобкахъ лѣвой части преобразуется въ

$$\frac{m_2}{m_1}\left[V_x^2 - \frac{1}{m_1+m_2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) - \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(v_1-v_2)^2\right] =$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\left[V_x^2 - \frac{1}{(m_1+m_2)^2}\left(m_1^2v_1^2 + m_1m_2v_2^2 + m_1m_2v_1^2 + m_2^2v_2^2 - m_1m_2v_1^2 + 2m_1m_2v_1v_2 - m_1m_2v_2^2\right)\right] =$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\left[V_x^2 - \frac{1}{(m_1+m_2)^2}\left(m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2v_1v_2 + m_2^2v_2^2\right)\right] = \frac{m_2}{m_1}\left[V_x^2 - V_x^2\right] = 0$$

Поэтому окончательно (F) принимаетъ видъ:

$$v_1'^2 - 2V_x\cdot v_1' + V_x^2 = (v_1 - V_x)^2k^2$$

или

$$(v_1' - V_x)^2 = (V_x - v_1)^2k^2$$

$$\left.\begin{aligned} v_1' - V_x &= (V_x - v_1)k \\ v_1' &= V_x + k(V_x - v_1) \\ v_1' &= (1+k)V_x - kv_1 \\ v_1' &= v_1 - (1+k)(v_1 - V_x) \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

Въ частныхъ случаяхъ:

1) при ударѣ неупругихъ шаровъ, т.е. при $k=0$, изъ (G) и (A) будетъ $v_1' = V_x$ и $v_2' = V_x$

2) при ударѣ упругихъ шаровъ, т.е. при $k=1$, изъ (G) и (A) будетъ $v_1' = 2V_x - v_1$

и $m_2v_2' = m_1V_x + m_2V_x - m_1v_1' - m_1V_x + m_2V_x - 2m_1V_x + m_1v_1 =$

$= (m_2 - m_1)V_x + m_1v_1 = (m_2 - m_1)V_x + (m_1+m_2)V_x - m_2v_2 =$

$= 2m_2V_x - m_2v_2$

или $v_2' = 2V_x - v_2$

Въ частности, при $m_1 = m_2$ будетъ $V_x = \frac{v_1+v_2}{2}$ (изъ A);

$v_1' = v_2$; $v_2' = v_1$, т.е. шары обмѣниваются скоростями, а при $v_2 = 0$ будетъ $v_1' = 0$ и $v_2' = v_1$.

детъ рядъ рикошетовъ о наклонную плоскость:

$$-(y+x\operatorname{tg}J)=0;$$

опредѣлить весь рядъ послѣдовательныхъ ударовъ матерьяльной точки объ эту плоскость, предполагая, что движеніе совершается въ пустотѣ и что извѣстенъ коэфиціентъ возстановленія ε.

Положительная нормаль N къ плоскости составляетъ съ осью Xовъ уголъ $\left(\frac{\pi}{2}+J\right)$, съ осью Yовъ — уголъ $(\pi+J)$.

Скорость V составляетъ съ положительною нормалью въ точк O уголъ r.

Движеніе матерьяльной точки до перваго удара выражается уравненіями:

$$x=Vt\sin(r-J),\ \ y=\frac{gt^2}{2}-Vt\cos(r-J).$$

Моментъ t_1 перваго рикошета опредѣлится изъ равенства

$$\frac{gt_1}{2}-V\cos(r-J)+V\sin(r-J)\operatorname{tg}J=0,$$

откуда:

$$t_1=\frac{2V}{g}\frac{\cos r}{\cos J}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (473)$$

Зная t_1 опредѣлимъ: координаты x_1, y_1 той точки плоскости, въ которой происходитъ первый ударъ, разстояніе $O1=\xi_1$ этой точки отъ начала координатъ, величину v_1 скорости паденія, проэкціи ея (x'_1, y'_1) на оси координатъ и величину i_1 угла паденія.

$$\xi_1=\frac{x_1}{\cos J}=\frac{2V^2}{g}\frac{\sin(r-J)\cos r}{\cos^2 J}$$

$$\xi_1=\frac{2V^2\cos^2 r}{g\cos J}(\operatorname{tg}r-\operatorname{tg}J)\ldots\ldots\ldots\ldots (474)$$

$$x'_1=V\sin(r-J),\ \ y'_1=V\left(2\frac{\cos r}{\cos J}-\cos(r-J)\right)\ldots (475)$$

Проэкція скорости v_1 на направленіе оси Ξ (см. черт. 33):

$$v_1\cos(v_1\Xi)=v_1\sin i_1=x'_1\cos J-y'_1\sin J,$$

$$v_1\sin i_1=V(\sin r-2\cos r\operatorname{tg}J)\ldots\ldots\ldots (476)$$

Проэкція скорости паденія v_1 на отрицательную нормаль:

$$v_1\cos i_1=x'_1\sin J+y'_1\cos J=V\cos r\ldots\ldots\ldots (477)$$

Означимъ черезъ v_1 величину скорости отраженія въ точкѣ 1 и

Ṽ-58.

черезъ r_1 уголъ отраженія. По теоріи удара о неподвижную поверхность:

$$\text{v}_1 \sin r_1 = v_1 \sin i_1, \quad \text{v}_1 \cos r_1 = \varepsilon v_1 \cos i_1;$$

а потому

$$\text{v}_1 \sin r_1 = V(\sin r - 2 \cos r \operatorname{tg} J) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(478)}$$

$$\text{v}_1 \cos r_1 = \varepsilon V \cos r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(479)}$$

и отсюда:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(480)}$$

Разсуждая такимъ же образомъ, опредѣлимъ:
величину промежутка времени между (n—1)—ымъ и n—ымъ ударами:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2\text{v}_{n-1}}{g} \frac{\cos r_{n-1}}{\cos J}, \ldots\ldots \mathbf{(473, n-1)}$$

разстояніе между точками, въ которыхъ эти удары совершаются:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2\text{v}^2_{n-1}}{g} \frac{\cos^2 r_{n-1}}{\cos J} (\operatorname{tg} r_{n-1} - \operatorname{tg} J), \ldots \mathbf{(474, n-1)}$$

и зависимость между скоростями и углами отраженія въ этихъ точкахъ:

$$\text{v}_n \sin r_n = \text{v}_{n-1} (\sin r_{n-1} - 2 \cos r_{n-1} \operatorname{tg} J), \ldots \mathbf{(478, n-1)}$$

$$\text{v}_n \cos r_n = \varepsilon \text{v}_{n-1} \cos r_{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(479, n-1)}$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(480, n-1)}$$

Изъ ряда равенствъ:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} r_1 - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J$$

исключимъ $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$; получимъ:

$$\varepsilon^n \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r - 2 \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J \ldots\ldots\ldots \mathbf{(481)}$$

Изъ ряда равенствъ вида (479, n—1) получимъ:

$$\text{v}_n \cos r_n = \varepsilon^n V \cos r \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(482)}$$

Поэтому разстояніе между двумя послѣдовательными точками удара выразится такъ:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2\varepsilon^{n-1} V^2 \cos^2 r}{g \cos J}\left[\operatorname{tg} r - \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\right)\operatorname{tg} J\right]. \quad \textbf{(483)}$$

Если эта разность окажется отрицательною, то это будетъ означать, что матерьяльная точка послѣ $(n-1)$—аго удара совершаетъ скачекъ внизъ, а не вверхъ: для этого надо, чтобы выраженіе:

$$D_n = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\operatorname{tg} J \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(484)}$$

имѣло величину отрицательную.

Сложивъ рядъ равенствъ вида (483), получимъ выраженіе разстоянія той точки отъ начала координатъ, въ которой происходитъ n—ый ударъ:

$$\xi_n = \frac{V^2}{g}\frac{\sin 2r}{\cos J}\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\left[1 - \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{tg} J}{\operatorname{tg} r}\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(485)}$$

Сложивъ рядъ равенствъ вида (473, n—1), получимъ выраженіе момента n—наго удара:

$$t_n = \frac{2V\cos r}{g\cos J}\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(486)}$$

Величина и направленіе скорости отраженія послѣ n—аго удара опредѣлятся изъ формулъ (482) и слѣдующей:

$$v_n \sin r_n = V \sin r - 2V\cos r \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(487)}$$

Матерьяльная точка совершитъ безконечное число скачковъ, которые становятся все мельче и короче, какъ видно изъ формулъ (482) и (483), а удары становятся все чаще и чаще (см. (473, n—1)). По истеченіи конечнаго времени

$$T = \frac{2V\cos r}{g\cos J}\frac{1}{1-\varepsilon} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(488)}$$

скачки прекращаются и въ этотъ моментъ матерьяльная точка будетъ находиться на слѣдующемъ разстояніи отъ начала координатъ: (485)

$$S = \frac{V^2}{g}\frac{\sin 2r}{\cos J}\frac{1}{1-\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{tg} J}{\operatorname{tg} r}\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(489)}$$

а скорость ея будетъ направлена вдоль по положительному или отрицательному направленію оси Ξ и будетъ равна:

$$C = B \,.\, V\cos r; \quad B = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(490)}$$

Знакъ величины B опредѣляетъ возможность или невозможность перемѣны направленія скачковъ; если B болѣе нуля, то матерьяльная точка будетъ восходить по оси Ξ и даже послѣ прекращенія скачковъ будетъ имѣть скорость C, направленную по положительной оси Ξ; если $B=O$, то скорость C будетъ нуль; если же B менѣе нуля, то, начиная съ нѣкотораго n, скачки будутъ совершаться внизъ по плоскости.

Примѣръ 50-й. Опредѣлить результатъ перваго удара матерьяльной точки объ окружность въ примѣрѣ 34-мъ (стр. 241—245).

Прежде всего слѣдуетъ найти точку D первой встрѣчи матерьяльной точки съ окружностью. Означимъ координаты этой точки знаками x_3, y_3, моментъ встрѣчи — знакомъ t_3, проэкціи скорости паденія — знаками x'_3, y'_3, проэкціи скорости отраженія — знаками x'_3, y'_3.

Примѣняя къ этому случаю пріемы, изложенные въ этомъ параграфѣ, мы найдемъ:

$$t_3-t_1=\frac{4v_1x_1}{gR},\ x'_3=v_1\frac{y_1}{R},\ y'_3=3v_1\frac{x_1}{R}$$

$$x_3=x_1\left(1-\frac{4y_1^2}{R^2}\right),\ y_3=y_1\left(1-\frac{4x_1^2}{R^2}\right);\ \frac{J}{m}=-4v_1\frac{y_1x_1^3}{R^5}$$

$$\mathrm{x}'_3=v_1\frac{y_1}{R}-2\frac{J}{m}x_3(1+\varepsilon)$$

$$\mathrm{y}'_3=3v_1\frac{x_1}{R}-2\frac{J}{m}y_3(1+\varepsilon).$$

Остановимся на частномъ случаѣ: $b=-\frac{3}{4}R$ и опредѣлимъ дальнѣйшее движеніе матерьяльной точки послѣ перваго удара при предположеніяхъ: $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=0$.

Въ этомъ случаѣ ударъ произойдетъ въ самой нижней точкѣ окружности и скорость паденія будетъ имѣть слѣдующія проэкціи:

$$x'_3=-\frac{v_1}{2},\ y'_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}v_1,\ \frac{J}{m}=\frac{3\sqrt{3}}{4R}v_1.$$

Если $\varepsilon=1$, то матерьяльная точка, отразившись о нижнюю точку окружности, опишетъ параболу, симметричную той, которую она описала до удара; въ точкѣ $K_1\left(x=-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ y=-\frac{R}{2}\right)$ она вступитъ на окружность безъ удара, такъ какъ скорость ея

будетъ направлена по касательной къ окружности; далѣе, матерьяльная точка пойдетъ по окружности, пройдетъ черезъ нижнюю точку ея, подымется до точки K, гдѣ снова сойдетъ съ окружности, и такъ далѣе.

Если $\varepsilon = 0$, то матерьяльная точка потеряетъ скорость по нормали и пойдетъ по окружности со скоростью:

$$\mathrm{x}'_3 = -\frac{v_1}{2};$$

дальнѣйшее движеніе она будетъ совершать по нижней части окружности, не подымаясь выше уровня:

$$y = -\left(\frac{v_1^2}{8g} - R\right) = \frac{15}{16} R.$$

Примѣръ 51-й. Тяжелая матерьяльная точка брошена изъ начала координатъ на наклонную плоскость, движущуюся поступательно и равномѣрно; уравненіе этой плоскости:

$$-(y + x \operatorname{tg} J + wt) = 0.$$

Представимъ себѣ неизмѣняемую движущуюся среду, которой принадлежитъ плоскость, и опредѣлимъ относительное движеніе матерьяльной точки по отношенію къ этой средѣ, причемъ результатъ каждаго удара будемъ разсчитывать на томъ основаніи, что:

$$\mathrm{u}_n \sin \rho_n = u_n \sin \sigma_n, \quad \mathrm{u}_n \cos \rho_n = \varepsilon u_n \cos \sigma_n,$$

гдѣ u_n есть относительная скорость паденія, u_n — относительная скорость отраженія, ρ_n — относительный уголъ отраженія, σ_n — относительный уголъ паденія при n—номъ ударѣ.

Въ результатѣ получимъ формулы, отличающіяся отъ формулъ примѣра 49-го тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто $V \cos r$, $V \sin r$, и $\operatorname{tg} r$ будутъ входить слѣдующія величины:

$V \cos r - w \cos J$ вмѣсто $V \cos r$

$V \sin r - w \sin J$ вмѣсто $V \sin r$

$\dfrac{V \sin r - w \sin J}{V \cos r - w \cos J}$ вмѣсто $\operatorname{tg} r$.

Примѣръ 52-й. Матерьяльная тяжелая точка свободно пущена въ моментъ $t = 0$ изъ точки ($x = a$, $y = -h$); опредѣлить результатъ ея удара о плоскость:

$$\frac{xt}{a}\sqrt{\frac{2}{3} gh} - y = 0,$$

вращающуюся вокругъ горизонтальной оси $Z^{\text{овъ}}$.

IV-58.

Движеніе точки до удара выражается такъ:

$$x=a,\ y=\frac{gt^2}{2}-h.$$

Моментъ встрѣчи точки съ плоскостью опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{gt^2}{2}-t\sqrt{\frac{2}{3}gh}-h=0.$$

Изъ двухъ рѣшеній этого уравненія:

$$t=-\sqrt{\frac{2h}{3g}},\quad t_1=3\sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

второе опредѣляетъ дѣйствительный моментъ встрѣчи. Въ этотъ моментъ матерьяльная точка имѣетъ слѣдующія координаты и слѣдующія проэкціи скорости паденія:

$$x_0=a,\ y_0=2h,\ x'_0=0,\ y'_0=\sqrt{6gh}.$$

Для вычисленія J мы должны составить выраженія производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{t_1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}gh}=\frac{2h}{a},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial f}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Величина J выразится такъ:

$$J=\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{3}gh};$$

проэкціи скорости отраженія на оси координатъ будутъ имѣть слѣдующія величины:

$$X'=\frac{4ha}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

$$Y'=\sqrt{6gh}-\frac{2a^2}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Въ этомъ случаѣ происходитъ потеря живой силы вслѣдствіе удара; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh(1+\varepsilon)(2-\varepsilon),$$

если даже коэфиціентъ возстановленія будетъ равенъ единицѣ, то все таки будетъ потеря живой силы, равная:

$$\frac{4ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh.$$



КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

составилъ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

II.

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

ВЫПУСКЪ ВТОРОЙ:

МЕХАНИКА СИСТЕМЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

листы текста: отъ 20 до 36-го включительно.
листы чертежей: 2-й и 3-й.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2 лин., 7.

1889.



1614

ОГЛАВЛЕНІЕ

ВТОРОГО ВЫПУСКА.

Части кинетической.

ГЛАВА IX. Законъ живой силы.

ГЛАВА X. Примѣры и задачи.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОШИБКИ.

Стран.	*Строка*	*Формула*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
315	—	(503 bis)	$(P_i в У)$	$(P_i в)$
327	3 снизу	—	изъ системы точекъ	изъ точекъ
355	13 сверху	—	*u*	*n*
363	—	(530, j, k)	$\frac{\partial в_i}{\partial q_k}$	$\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$
392	4 сверху	—	сторона $M_1 \mathfrak{m}$	сторона $M_1 \mathfrak{m}'$
409	12 „	—	мошь	мощь
465	13 „	—	ΞZ	ΞΥ
469	послѣдняя	—		Передъ скобкою поставить: 2
484	3 снизу	(683)	r_{2k}	r_k^2
489	—	(694)	B_k, C_k	B'_k, C'_k
—	—	—	$2D_k, 2E_k, 2F_k$	$-2D_k, -2E_k, -2F_k$
489	—	(695)	„ „ „	„ „ „
504	3 сверху	—	вниминiе	вниманiе
510	послѣдняя	—	пропущено Э	

II.

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

МЕХАНИКА СИСТЕМЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

ГЛАВА V.

Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

§ 59. Понятіе о системѣ матерьяльныхъ точекъ. Связи.

Если нѣсколько матерьяльныхъ точекъ подвержены такимъ силамъ или подчинены такимъ условіямъ, что, при опредѣленіи движенія одной изъ точекъ, приходится принимать въ разсчетъ всѣ прочія точки безъ исключенія, то такая группа точекъ называется *системою матерьяльныхъ точекъ.*

Можно еще выразиться иначе: нѣсколько матерьяльныхъ точекъ образуютъ одну систему, если существуютъ обстоятельства, дѣлающія эти точки настолько зависимыми одна отъ другой, что, при опредѣленіи движенія, совершаемаго одною изъ нихъ, приходится неизбѣжно принимать въ разсчетъ движенія всѣхъ прочихъ точекъ.

Обстоятельства, устанавливающія зависимость между матерьяльными точками системы, могутъ заключаться:

a) въ томъ, что силы, приложенныя къ точкамъ системы, зависятъ отъ координатъ и скоростей другихъ точекъ той же системы;

b) въ существованіи кинематическихъ *связей* между точками системы.

Связью (liaison) называется условіе, въ силу котораго координаты нѣсколькихъ точекъ системы должны удовлетворять нѣкоторому равенству или неравенству.

Напримѣръ:

Примѣръ 53. *Условіе*, въ силу котораго разстояніе между двумя точками m_1 (координаты x_1, y_1, z_1) и m_2 (координаты x_2, y_2, z_2) должно оставаться постояннымъ, выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0,$$

или

$$+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}-l=0,$$

гдѣ l есть величина разстоянія.

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ вполнѣ твердаго безконечно-тонкаго стержня, на концахъ котораго находятся связываемыя имъ матерьяльныя точки.

Примѣръ 54. Связь, представляемая безконечно-тонкою, гибкою, нерастяжимою и неимѣющею массы нитью, связывающею точки m_1 и m_2, выразится слѣдующимъ условіемъ:

$$l^2 \geqslant (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

такъ какъ разстояніе между точками не должно быть болѣе длины l нити, но можетъ быть равно или менѣе l.

Примѣръ 55. Условіе:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \geqslant l^2$$

выражаетъ, что разстояніе между двумя точками не должно быть менѣе l, но можетъ быть равно или болѣе l; эту связь можно представить себѣ такимъ образомъ, какъ будто-бы точки m_1 и m_2 были центрами двухъ твердыхъ шаровъ, сумма радіусовъ которыхъ равняется l.

Примѣръ 56. Условіе:

$$l \geqslant r_{12}+r_{23},$$

гдѣ

$$r_{12}=+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$r_{23}=+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2},$$

связывающее координаты трехъ точекъ m_1, m_2, m_3, выражаетъ, что сумма разстояній точекъ m_1 и m_3 отъ точки m_2 должна быть не болѣе l; связь эту можно представить себѣ подъ слѣдующимъ видомъ: точки m_1 и m_3 прикрѣплены къ концамъ гибкой, нерастяжимой нити (длины l), вдоль по которой, не сходя съ нея, можетъ скользить точка m_2.

Аналитическое выраженіе связи между точками можетъ заключать въ себѣ, кромѣ координатъ точекъ и постоянныхъ параметровъ, еще и время; напримѣръ, если стержень, связывающій точки m_1 и m_2 измѣняетъ съ теченіемъ времени свою длину по закону:

$$l = L + (l_0 - L)e^{-kt},$$

гдѣ l_0 есть длина стержня въ моментъ $t = 0$, а l — длина его въ моментъ t, то связь эта выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = L + (l_0 - L)e^{-kt},$$

гдѣ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 суть координаты положеній, занимаемыхъ точками m_1 и m_2 въ моментъ t.

Всякія связи между точками $m_1, m_2, m_3, \ldots m_i, \ldots m_n$ могутъ быть выражены: однѣ — равенствами:

$$в(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0, \ldots \quad \textbf{(491)}$$

другія — условіями:

$$в(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) \geqslant 0, \ldots \quad \textbf{(492)}$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n$ суть координаты положеній, занимаемыхъ точками $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ въ моментъ t, а в*) означаетъ функцію этихъ координатъ и времени t; эта функція можетъ не заключать времени и нѣкоторыхъ изъ координатъ; видъ ея опредѣляется конструкціею связи.

(Составляя аналитическое выраженіе какой-либо связи, мы будемъ писать его такимъ образомъ, чтобы всѣ члены равенства или неравенства заключались въ первой его части; если тогда получится выраженіе вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) \leqslant 0,$$

---

*) Эту букву мы предназначимъ исключительно для обозначенія первыхъ частей выраженій связей.

то мы можемъ привести его къ виду (492) положивъ:

$$в = -f$$

Связи, выражаемыя равенствами, называются *удерживающими связями*, а тѣ связи, которыя выражаются условіями вида (492), называются *связями неудерживающими* *).

§ 60. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью.

Удерживающая связь (491), существующая между точками $m_1, m_2, \ldots \, m_i \ldots \, m_n$, допускаетъ только такія движенія этихъ точекъ, при которыхъ одновременныя скорости точекъ удовлетворяютъ слѣдующему уравненію:

$$\frac{\partial в}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial в}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}+$$

$$+\frac{\partial в}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial в}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt}+$$

$$+\frac{\partial в}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}+\frac{\partial в}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial z_n}\frac{dz_n}{dt}+\frac{\partial в}{\partial t}=0, \qquad (493)$$

линейному относительно проэкцій на оси координатъ скоростей точекъ.

Первую часть этого равенства, представляющую полную производную отъ функціи $в$ по t, мы будемъ изображать, для краткости, такъ:

---

*) Сомовъ называетъ связи перваго рода — *закрѣпляющими*, а связи второго рода — *незакрѣпляющими*; см. Раціональную механику, кинематику. стр. 266.

$$\frac{d\text{в}}{dt}^{*)} = \frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial \text{в}}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial \text{в}}{\partial z_i}z'_i\right);^{**)} \quad . \; . \; . \quad \textbf{(494)}$$

поэтому, равенство (493) будемъ писать въ такомъ видѣ:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial \text{в}}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial \text{в}}{\partial z_i}z'_i\right) = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(493)}$$

а иногда даже и въ такомъ:

$$\frac{d\text{в}}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(493)}$$

Уравненіе (493) и другія равенства, проистекающія изъ су-

---

*) По прежнему мы будемъ обозначать частныя производныя помощью круглыхъ ∂, а полныя производныя помощью прямыхъ d; напримѣръ:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \text{в}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \text{в}}{\partial y_1}$$

суть частныя производныя отъ функціи в по t, x_1 и y_1, а

$$\frac{d\text{в}}{dt}$$

есть полная производная отъ в по t.

**) Знакъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}$$

служитъ для сокращеннаго писанія суммы n членовъ одинаковаго вида, различающихся только численными значеніями нѣкотораго индекса, который равенъ единицѣ въ первомъ членѣ суммы, двумъ — во второмъ, тремъ — въ третьемъ, и т. д.; напримѣръ:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2.$$

-60.

ществованія удерживающей связи, могутъ быть выведены слѣдующимъ образомъ.

Координаты

$$x_1, x_2, \ldots . x_i, \ldots . x_n$$

$$y_1, y_2, \ldots . y_i, \ldots . y_n$$

$$z_1, z_2, \ldots . z_i, \ldots . z_n$$

движущихся точекъ

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n$$

могутъ быть выражены непрерывными функціями времени; приращенія

$$Dx_1, Dx_2, \ldots . Dx_i, \ldots . Dx_n$$

$$Dy_1, Dy_2, \ldots . Dy_i, \ldots . Dy_n$$

$$Dz_1, Dz_2, \ldots . Dz_i, \ldots . Dz_n$$

этихъ координатъ, полученныя ими въ теченіе какого-либо весьма малаго промежутка времени ϑ, могутъ быть выражены рядами, расположенными по возрастающимъ степенямъ ϑ, напримѣръ:

$$Dx_i = x'_i \vartheta + x_i'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + x_i''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots .$$

$$Dy_i = y'_i \vartheta + y_i'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + y_i''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots .$$

$$Dz_i = z'_i \vartheta + z_i'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + z_i''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots .$$

Выраженіе:

$$\text{в}(x_1 + Dx_1,\ y_1 + Dy_1,\ z_1 + Dz_1, \ldots . z_n + Dz_n,\ t + \vartheta),$$

которое, для краткости, будемъ изображать знакомъ:

$$\text{в}((t + \vartheta)),$$

можетъ быть разложено въ рядъ, расположенный по возрастающимъ

степенямъ величинъ: $\vartheta, Dx_1, Dy_1, Dz_1, \ldots . Dz_n$; но такъ какъ приращенія координатъ могутъ быть выражены въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ ϑ, то $\mathfrak{s}((t+\vartheta))$ можно представить въ видѣ слѣдующаго ряда:

$$\mathfrak{s}((t+\vartheta)) = \mathfrak{s} + \frac{d\mathfrak{s}}{dt}\vartheta + \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3\mathfrak{s}}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots ; \quad (495)$$

здѣсь $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ означаетъ полную производную отъ функціи $\mathfrak{s}$ по t, выражаемую формулою (494); $\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$ есть полная производная втораго порядка отъ той же функціи по t; она выражается слѣдующею формулою:

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z_i}z_i''\right) + K\mathfrak{s}, \quad \ldots . (496)$$

гдѣ:

$$K\mathfrak{s} = \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2} + 2\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t\partial z_i}z_i'\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{j=n}x_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial x_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial x_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial x_j\partial z_i}z_i'\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{j=n}y_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial y_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial y_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial y_j\partial z_i}z_i'\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{j=n}z_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial z_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial z_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial z_j\partial z_i}z_i'\right); \quad \ldots . (497)$$

далѣе, $\frac{d^3\mathfrak{s}}{dt^3}$ есть полная производная третьяго порядка отъ функціи $\mathfrak{s}$ по t, и т. д.

Разсматриваемая нами связь — удерживающая, слѣдовательно:

$$\mathfrak{s}(x_1, y_1, z_1, \ldots . z_n, t) = 0, \quad \mathfrak{s}((t+\vartheta)) = 0,$$

а потому нижеслѣдующій рядъ долженъ быть равенъ нулю, при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени ϑ:

$$\frac{ds}{dt}+\frac{d^2s}{dt^2}\frac{\vartheta}{1.2}+\frac{d^3s}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots=0;$$

а это можетъ имѣть мѣсто только при существованіи равенствъ:

$$\frac{ds}{dt}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (493)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (498)$$

$$\frac{d^3s}{dt^3}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (499)$$

. . . . . .

Такимъ образомъ, существованіе удерживающей связи влечетъ за собою существованіе ряда равенствъ (493), (498), (499)....

Полученное нами равенство (493), выражающее зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью, можетъ быть представлено еще въ одномъ видѣ, какъ будетъ указано въ § 62.

§ 61. Дифференціальные параметры связи и ихъ направленія.

Положимъ, что точки $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_i, \ldots . m_n$ связаны связью удерживающею (491) или неудерживающею (492); выберемъ произвольный моментъ времени и положимъ, что въ этотъ моментъ точки $m_1, m_2, \ldots . m_n$ находятся въ положеніяхъ $M_1, M_2 \ldots . M_i, \ldots . M_n$; для отличія намѣченнаго нами момента отъ другихъ моментовъ времени и точекъ $M_1, M_2, \ldots M_n$ отъ другихъ точекъ пространства, означимъ этотъ моментъ буквою τ и координаты точекъ

$$M_1\ M_2 \ldots . M_i \ldots . M_n$$

буквами:

$$a_1,\ a_2, \ldots . a_i, \ldots . a_n$$

$$b_1,\ b_2, \ldots . b_i, \ldots . b_n$$

$$c_1,\ c_2, \ldots . c_i, \ldots . c_n$$

Если въ функціи $\mathfrak{s}$ придать величинамъ $x_2, y_2, z_2 \ldots . x_n, y_n, z_n$ постоянныя и неизмѣнныя значенія $a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n$, то уравненіе (491) обратится въ уравненіе:

$$\mathfrak{s}(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, t) = 0 \ldots \quad (500)$$

той удерживающей преграды для точки m_1, въ которую обратится удерживающая связь (491), когда остальныя точки $m_2, m_3, \ldots . m_i, \ldots . m_n$ будутъ *закрѣплены* въ положеніяхъ $M_2, M_3, \ldots . M_i, \ldots . M_n$. Уравненіе (500) выражаетъ нѣкоторую поверхность измѣняемаго вида; въ моментъ τ эта поверхность имѣетъ видъ и положеніе, выражаемое уравненіемъ:

$$\mathfrak{s}(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \ldots . \quad (501)$$

и тогда навѣрно проходитъ черезъ точку M_1.

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ положительною нормалью N_1 къ поверхности (501) въ точкѣ M_1 выражаются, какъ извѣстно (см. (154) стр. 112 и (259) стр. 175), слѣдующими формулами:

$$\cos(N_1, X) = \frac{1}{P_1}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_1},$$

$$\cos(N_1, Y) = \frac{1}{P_1}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_1},$$

$$\cos(N_1, Z) = \frac{1}{P_1}\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z_1}, \quad P_1 = +\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z_1}\right)^2};$$

здѣсь, въ производныхъ, вмѣсто x_1, y_1, z_1, должно подставить a_1, b_1, c_1, а вмѣсто $x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t$, заключающихся въ функціи $\mathfrak{s}$, подставлены: $a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau$.

Если же закрѣпимъ всѣ точки, исключая m_i, въ положеніяхъ $M_1, M_2, \ldots . M_{i-1}, M_{i+1}, M_n$, то связь (491) обратится въ удерживающую преграду для точки m_i; преграда эта въ моментъ τ будетъ имѣть видъ и положеніе поверхности, проходящей черезъ точку M_i и представляемой уравненіемъ:

$$\mathfrak{s}(a_1, b_1, c_1, \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \ldots \quad (502)$$

(первая часть этого уравненія заключаетъ только три перемѣнныя: x_i, y_i, z_i; всѣ остальныя величины: $a_1, b_1, c_1, \ldots . a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau$ — постоянны).

Положительная нормаль N_i, возстановленная изъ точки M_i къ поверхности (502), составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$\cos(N_i, X) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i},$$
$$\cos(N_i, Y) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_i},$$
$$\cos(N_i, Z) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial\vartheta}{\partial z_i}; \quad P_i = +\sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z_i}\right)^2}.$$

Эти направленія нормалей считаются положительными (стр. 177 § 34); они направлены въ ту сторону пространства, координаты коей обращаютъ уравненіе $\vartheta = 0$ въ неравенство $\vartheta > 0$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что частныя производныя отъ функціи ϑ по координатамъ могутъ быть выражены помощью величинъ $P_1, P_2, \ldots . P_n$, и направленій $N_1, N_2, \ldots . N_n$; этимъ обстоятельствомъ мы будемъ часто пользоваться въ нашихъ разсужденіяхъ, а потому условимся относительно наименованія и обозначенія этихъ величинъ и направленій.

Величины $P_1, P_2, \ldots . P_n$ называются *дифференціальными параметрами перваго порядка функціи* ϑ *въ точкахъ* $m_1, m_2, \ldots . m_n$; мы условимся называть ихъ *дифференціальными параметрами связи* (491) или (492) *въ точкахъ* $m_1, m_2, \ldots . m_n$; такимъ образомъ связь имѣетъ въ каждой изъ связываемыхъ ею точекъ особый дифференціальный параметръ.

Направленія $N_1, N_2, \ldots . N_n$ называются *направленіями* дифференціальныхъ параметровъ $P_1, P_2, \ldots . P_n$; слѣдовательно, эти параметры разсматриваются, подобно радіусамъ векторамъ, скоростямъ, ускореніямъ, силамъ и количествамъ движенія, какъ величины, изображаемыя длинами, отложенными по надлежащимъ направленіямъ.

По этой причинѣ мы будемъ обозначать направленія $N_1, N_2, \ldots . N_n$ тѣми же знаками $P_1, P_2, \ldots . P_n$, какими обозначаемъ величины параметровъ, а такъ какъ одна и та же точка можетъ быть подчинена нѣсколькимъ связямъ, то для отличія знаковъ дифферен-

ціальныхъ параметровъ различныхъ связей въ одной и той же точкѣ, мы будемъ присоединять къ P еще знакъ, обозначающій самую связь; такимъ образомъ знаки:

$$(P_1\text{в}),\ (P_2\text{в}), \dots (P_i\text{в}), \dots (P_n\text{в})$$

будутъ обозначать и величины и направленія дифференціальныхъ параметровъ связи (491) или связи (492) въ точкахъ:

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n.$$

Величина и направленіе дифференціальнаго параметра $P_i\text{в}$ опредѣляются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}\cos(P_i\text{в}, X) &= \frac{1}{(P_i\text{в})}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_i}\\ \cos(P_i\text{в}, Y) &= \frac{1}{(P_i\text{в})}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_i}\\ \cos(P_i\text{в}, Z) &= \frac{1}{(P_i\text{в})}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_i}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{(503)}$$

$$(P_i\text{в}) = +\sqrt{\left(\frac{\partial \text{в}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \text{в}}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \text{в}}{\partial z_i}\right)^2} \quad \dots \quad \mathbf{(503\ bis)}$$

§ 62. Уравненіе (493) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1(P_1\text{в})\cos(P_1\text{в}, v_1) + v_2(P_2\text{в})\cos(P_2\text{в}, v_2) + \dots$$
$$\dots + v_n(P_n\text{в})\cos(P_n\text{в}, v_n) + \frac{\partial \text{в}}{\partial t} = 0, \quad \dots \quad \mathbf{(493, a)}$$

или:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\text{в})\cos(P_i\text{в}, v_n) = 0 \quad \dots\dots \quad \mathbf{(493, a)}$$

Если функція в не заключаетъ явнымъ образомъ времени, то частная производная отъ в по t равна нулю; слѣдовательно *зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью, уравненіе которой:*

$$\text{в}(x_1, y_1, z_1, \dots x_i, y_i, z_i, \dots x_n, y_n, z_n) = 0 \quad \dots \quad \mathbf{(491, b)}$$

не заключаетъ явнымъ образомъ времени t, выражается равенствомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\text{в}) \cos(P_i\text{в}, v_i) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (493, \mathfrak{b})$$

Въ этомъ уравненіи заключаются собственно не самыя скорости точекъ, но проэкція скорости каждой точки на направленіе дифференціальнаго параметра связи въ той же точкѣ; поэтому, только эти проэкціи подлежатъ ограниченію, выражаемому уравненіемъ (493, b).

Изъ этого уравненія (493, b) мы выведемъ нѣсколько заключеній относительно тѣхъ ограниченій, которымъ должны подчиняться скорости точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b).

Уравненіе (493, b) не допускаетъ, чтобы сказанныя проэкціи могли быть положительными для всѣхъ точекъ одновременно; точно также онѣ не могутъ быть и одновременно отрицательными для всѣхъ точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b). Необходимо, чтобы проэкціи эти у одной части всего числа точекъ были положительныя, а у остальныхъ — отрицательныя.

Эти проэкціи могутъ быть равны нулю у всѣхъ точекъ одновременно, то-есть удерживающая связь (491, b) допускаетъ, чтобы всѣ точки имѣли произвольныя скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

Если всѣ точки, за исключеніемъ одной, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то уравненіе (493, b) требуетъ, чтобы и эта точка имѣла скоростъ перпендикулярную къ ея параметру.

Если всѣ точки, за исключеніемъ двухъ, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то скорость одной изъ двухъ оставшихся точекъ должна составлять острый уголъ съ ея параметромъ, а скорость другой должна быть направлена подъ тупымъ угломъ къ ея параметру.

Всѣ точки, связанныя удерживающею связью (491, b), могутъ

имѣть одновременно скорости равныя между собою и параллельныя всякому такому направленію H, для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(P_i\vartheta)\cos(P_i\vartheta, H) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (504)$$

Для опредѣленія этихъ направленій надо изобразить дифференціальные параметры $P_1\vartheta, P_2\vartheta, \ldots . P_n\vartheta$ длинами и построить геометрическую сумму $P\vartheta$ этихъ длинъ; по свойству геометрической суммы:

$$(P\vartheta)\cos(P\vartheta, H) = \sum_{i=1}^{i=n}(P_i\vartheta)\cos(P_i\vartheta, H),$$

поэтому искомыя направленія суть всѣ тѣ, которыя перпендикулярны къ направленію геометрической суммы $P\vartheta$ дифференціальныхъ параметровъ, $P_1\vartheta, P_2\vartheta, \ldots . P_n\vartheta$.

6. Если геометрическая сумма дифференціальныхъ параметровъ $P_1\vartheta, P_2\vartheta, \ldots . P_n\vartheta$ равна нулю, то тогда равенство (504) имѣетъ мѣсто для какого угодно направленія.

Примѣръ 53. Дифференціальные параметры удерживающей связи

$$+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0$$

равны единицѣ и направлены по продолженіямъ линіи, соединяющей обѣ точки m_1 и m_2. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(\overline{M_2M_1}, v_1) - v_2 \cos(\overline{M_2M_1}, v_2) = 0,$$

гдѣ $\overline{M_2M_1}$ означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_2 къ точкѣ m_1; это равенство выражаетъ, что скорости точекъ m_1 и m_2 должны имѣть равныя проэкціи на направленіе $\overline{M_2M_1}$; такова зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ связью, удерживающею ихъ въ постоянномъ разстояніи одна отъ другой.

Примѣръ 57. Удерживающая связь:

$$r_1 + r_2 - l = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\; r_2 = +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

не заключаетъ явнымъ образомъ времени t, выражается равенствомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\text{в}) \cos(P_i\text{в}, v_i) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (493, \mathfrak{b})$$

Въ этомъ уравненіи заключаются собственно не самыя скорости точекъ, но проэкція скорости каждой точки на направленіе дифференціальнаго параметра связи въ той же точкѣ; поэтому, только эти проэкціи подлежатъ ограниченію, выражаемому уравненіемъ (493, b).

Изъ этого уравненія (493, b) мы выведемъ нѣсколько заключеній относительно тѣхъ ограниченій, которымъ должны подчиняться скорости точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b).

Уравненіе (493, b) не допускаетъ, чтобы сказанныя проэкціи могли быть положительными для всѣхъ точекъ одновременно; точно также онѣ не могутъ быть и одновременно отрицательными для всѣхъ точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b). Необходимо, чтобы проэкціи эти у одной части всего числа точекъ были положительныя, а у остальныхъ — отрицательныя.

Эти проэкціи могутъ быть равны нулю у всѣхъ точекъ одновременно, то-есть удерживающая связь (491, b) допускаетъ, чтобы всѣ точки имѣли произвольныя скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

Если всѣ точки, за исключеніемъ одной, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то уравненіе (493, b) требуетъ, чтобы и эта точка имѣла скоростъ перпендикулярную къ ея параметру.

Если всѣ точки, за исключеніемъ двухъ, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то скорость одной изъ двухъ оставшихся точекъ должна составлять острый уголъ съ ея параметромъ, а скорость другой должна быть направлена подъ тупымъ угломъ къ ея параметру.

Всѣ точки, связанныя удерживающею связью (491, b), могутъ

имѣть одновременно скорости равныя между собою и параллельныя всякому такому направленію H, для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(P_i\mathfrak{s})\cos(P_i\mathfrak{s}, H) = 0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (504)$$

Для опредѣленія этихъ направленій надо изобразить дифференціальные параметры $P_1\mathfrak{s}, P_2\mathfrak{s}, \ldots . P_n\mathfrak{s}$ длинами и построить геометрическую сумму $P\mathfrak{s}$ этихъ длинъ; по свойству геометрической суммы:

$$(P\mathfrak{s})\cos(P\mathfrak{s}, H) = \sum_{i=1}^{i=n}(P_i\mathfrak{s})\cos(P_i\mathfrak{s}, H),$$

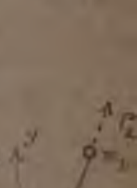
поэтому искомыя направленія суть всѣ тѣ, которыя перпендикулярны къ направленію геометрической суммы $P\mathfrak{s}$ дифференціальныхъ параметровъ, $P_1\mathfrak{s}, P_2\mathfrak{s}, \ldots . P_n\mathfrak{s}$.

Если геометрическая сумма дифференціальныхъ параметровъ $P_1\mathfrak{s}, P_2\mathfrak{s}, \ldots . P_n\mathfrak{s}$ равна нулю, то тогда равенство (504) имѣетъ мѣсто для какого угодно направленія.

Примѣръ 53. Дифференціальные параметры удерживающей связи

$$+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0$$

равны единицѣ и направлены по продолженіямъ линіи, соединяющей обѣ точки m_1 и m_2. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:



$$v_1 \cos(\overline{M_2M_1}, v_1) - v_2 \cos(\overline{M_2M_1}, v_2) = 0,$$

гдѣ $\overline{M_2M_1}$ означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_2 къ точкѣ m_1; это равенство выражаетъ, что скорости точекъ m_1 и m_2 должны имѣть равныя проэкціи на направленіе $\overline{M_2M_1}$; такова зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ связью, удерживающею ихъ въ постоянномъ разстояніи одна отъ другой.

Примѣръ 57. Удерживающая связь:

$$r_1 + r_2 - l = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\; r_2 = +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

ỹ-62.

имѣетъ дифференціальные параметры, равные единицѣ и направленные по продолженіямъ радіусовъ векторовъ $\overline{OM_1}=r_1$ и $\overline{OM_2}=r_2$. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(r_1, v_1) + v_2 \cos(r_2, v_2) = 0$$

и выражаетъ, что проэкція скорости точки m_1 на направленіе $\overline{OM_1}$ должна имѣть величину, равную величинѣ проэкціи скорости точки m_2 на направленіе $\overline{M_2O}$.

Скорости обѣихъ точекъ могутъ быть равны и параллельны одна другой, но для этого направленіе скоростей должно быть перпендикулярно къ линіи, дѣлящей уголъ M_1OM_2 пополамъ.

Примѣръ 58. Представимъ себѣ, что двѣ точки m_1 и m_2 подвержены удерживающей связи, выражаемой равенствомъ:

$$r_1 + r_{12} + r_{a2} - l = 0,$$

гдѣ

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r^2_{a2} = (x_2 - a)^2 + y_2^2 + z^2_2$$

$$r^2_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ нерастяжимой нити длины l, которая концами своими прикрѣплена къ началу координатъ и къ неподвижной точкѣ A (черт. 34) на оси X; точки m_1 и m_2 должны оставаться на нити, но могутъ скользить по ней; нить всегда натянута, такъ что сумма длинъ OM_1, M_1M_2, M_2A постоянно равна l.

Изъ равенствъ:

$$P_1 \cos(P_1, X) = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad P_2 \cos(P_2, X) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} + \frac{x_2 - a}{r_a{}^2}$$

и изъ четырехъ прочихъ мы найдемъ, что

$$P_1 = 2\cos\frac{\alpha_1}{2}, \quad P_2 = 2\cos\frac{\alpha_2}{2},$$

гдѣ α_1 есть величина угла OM_1M_2, а α_2 — величина угла M_1M_2A; направлены P_1 и P_2 по линіямъ, дѣлящимъ внѣшніе углы OM_1M_2 и M_1M_2A пополамъ (см. черт. 34).

Уравненіе (493, b) получаетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$v_1 \cos\frac{\alpha_1}{2} \cos(P_1, v_1) + v_2 \cos\frac{\alpha_2}{2} \cos(P_2, v_2) = 0.$$

Направленіе геометрической суммы параметровъ P_1 и P_2 дѣлитъ пополамъ уголъ между направленіями $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$, поэтому точки m_1 и m_2 могутъ имѣть одновременно равныя и параллельныя скорости только по направленіямъ перпендикулярнымъ къ линіи μP (см. черт. 34).

Примѣръ 59. Двѣ точки m_1, m_2, остающіяся постоянно въ плоскости $XУ$, связаны удерживающею связью, выражаемою уравненіемъ:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 - a = 0;$$

это уравненіе выражаетъ, что удвоенная площадь треугольника OM_1M_2 сохраняетъ постоянную величину a.

Составимъ равенства:

$$P_1 \cos(P_1, X) = y_2, \quad P_2 \cos(P_2, X) = -y_1$$

$$P_1 \cos(P_1, У) = -x_2, \quad P_2 \cos(P_2, У) = x_1;$$

изъ нихъ оказывается, что параметръ P_2 равенъ длинѣ OM_1 и направленъ перпендикулярно къ направленію $\overline{OM_1}$ въ такую сторону, что наблюдателю, стоящему въ O по оси Z и смотрящему на M_1, онъ кажется направленнымъ слѣва на право (см. черт. 35); параметръ P_1 равенъ длинѣ OM_2 и направленъ перпендикулярно къ этой длинѣ, какъ показано на черт. 35-мъ.

Скорости точекъ m_1 и m_2 должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$r_2 v_1 \cos(P_1, v_1) + r_1 v_2 \cos(P_2, v_2) = 0.$$

Б. По отношенію къ такимъ удерживающимъ связямъ, въ уравненіи которыхъ время входитъ явнымъ образомъ, мы обратимъ вниманіе на слѣдующія обстоятельства.

1) Уравненіе (493, а) не допускаетъ, чтобы скорости всѣхъ точекъ были равны нулю или чтобы всѣ точки имѣли скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

2) Если частная производная отъ в по t есть величина положительная, то изъ равенства (493, а) слѣдуетъ, что всѣ точки могутъ обладать скоростями, составляющими тупые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; обратно, если сказанная частная производная есть величина отрицательная, то всѣ точки могутъ

обладать скоростями, составляющими острые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; напримѣръ, если

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} < 0,$$

то точки

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n$$

могутъ обладать скоростями:

$$AP_1, AP_2, \ldots . AP_i, \ldots . AP_n,$$

направленными по этимъ параметрамъ; здѣсь A означаетъ величину отношенія:

$$A = \frac{-\frac{\partial \text{в}}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i^2}$$

3) Пусть

$$v_1, v_2, \ldots . v_i, \ldots . v_n$$

$$w_1, w_2, \ldots . w_i, \ldots . w_n$$

суть двѣ какія-либо совокупности скоростей точекъ

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n,$$

удовлетворяющія уравненію (493, а); вычтя уравненіе

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} w_i P_i \cos(P_i, w_i) = 0$$

изъ уравненія

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) = 0,$$

получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i (P_i \text{в}) \cos(P_i \text{в}, u_i) = 0, \ldots \ldots \quad (505)$$

гдѣ u_i есть геометрическая разность между скоростями v_i и w_i, то есть:

$$\overline{u_1}=\overline{v_1}-\overline{w_1},\ \overline{u_2}=\overline{v_2}-\overline{w_2},\ \ldots\ldots\ \overline{u_n}=\overline{v_n}-\overline{w_n}.\ \ldots\ \textbf{(505 bis)}$$

§ 63. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ неудерживающею связью.

Когда координаты точекъ, связанныхъ неудерживающею связью (492), дѣлаютъ функцію в, большею нуля, то есть удовлетворяютъ неравенству:

$$\text{в}\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots\ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n,\ t)>0,$$

тогда скорости точекъ (а также и ускоренія ихъ) не подлежатъ никакому органиченію.

Когда же координаты точекъ дѣлаютъ функцію в равною нулю, тогда скорости точекъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\text{в})\cos(P_i\text{в},\ v_i)\geqslant 0\ \ldots\ldots\ \textbf{(506, a)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ моментъ t координаты точекъ удовлетворяютъ уравненію:

$$\text{в}\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots\ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n,\ t)=0,$$

и такъ какъ въ послѣдующій весьма близкій моментъ $(t+\vartheta)$ онѣ должны удовлетворять условію:

$$\text{в}\,((t+\vartheta))\geqslant 0,$$

то, на основаніи равенства (495), должно быть удовлетворено условіе:

$$\frac{d\text{в}}{dt}\vartheta+\frac{d^2\text{в}}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2}+\frac{d^3\text{в}}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3}\ldots\ldots+\geqslant 0$$

при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени ϑ; но, при надлежащей степени малости промежутка времени ϑ, знакъ всего вышеприведеннаго ряда опредѣляется знакомъ члена, заклю-

-63.

чающаго низшую степень θ, поэтому полная производная перваго порядка отъ ϑ по t должна быть не менѣе нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \geqslant 0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(506,\ a)}$$

какъ сказано выше.

Если

$$\frac{d\vartheta}{dt} > 0,$$

то полныя производныя второго и высшихъ порядковъ не подлежатъ никакому ограниченію,*) если же

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(493)}$$

то полная производная втораго порядка должна быть не менѣе нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \geqslant 0 \ \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(507)}$$

Если скорости точекъ системы удовлетворяютъ равенству (493), а ускоренія — равенству:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(498)}$$

то должно быть:

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3} \geqslant 0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(508)}$$

и такъ далѣе.

Б. Если функція ϑ не заключаетъ времени явнымъ образомъ, то есть $\vartheta(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \geqslant 0$, то условіе (506, a) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\vartheta)\cos(P_i\vartheta, v_i) \geqslant 0 \ \ldots\ldots \quad \mathbf{(506,\ b)}$$

Когда координаты точекъ $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$, подчиненныхъ неудерживающей связи:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) \geqslant 0. \ldots . \quad \mathbf{(492,\ b)}$$

*) см. § 66.2.

(выраженіе которой не заключаетъ времени явнымъ образомъ) *удовлетворяютъ равенству:*

$$в(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n)=0,$$

тогда скорости точекъ должны удовлетворять условію (506, b).

Это условіе не допускаетъ, чтобы углы, составляемые направленіемъ скорости и направленіемъ дифференціальнаго параметра въ каждой точкѣ, были тупыми во всѣхъ точкахъ одновременно.

Если между углами:

$$(P_1, v_1), (P_2, v_2), \ldots (P_i, v_i), \ldots (P_n, v_n)$$



нѣтъ ни одного тупаго, то скорости могутъ быть совершенно произвольны.

Напримѣръ, всѣ точки могутъ обладать одновременно произвольными скоростями, направленными вдоль по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Примѣръ 54. Дифференціальные параметры неудерживающей связи:

$$l^2-r^2_{12}\geqslant 0,$$

(гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками m_1 и m_2) направлены внутрь кратчайшаго разстоянія между точками (черт. 36) и равны:

$$P_1=P_2=2r_{12},$$

какъ это слѣдуетъ изъ равенствъ

$$P_1\cos(P_1, X)=-2(x_1-x_2),\quad P_2\cos(P_2, X)=-2(x_2-x_1)$$

и изъ четырехъ остальныхъ; если же эту самую связь выразимъ такъ:

$$l-r_{12}\geqslant 0,$$

то величины дифференціальныхъ параметровъ окажутся равными единицѣ.

Условіе (506, b) для этой связи можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1\cos(\overline{M_1M_2}, v_1)-v_2\cos(\overline{M_1M_2}, v_2)\geqslant 0,$$

то есть проэкція скорости точки m_1 на направленіе $\overline{M_1M_2}$ должна быть *болѣе* проэкціи на то же направленіе скорости точки m_2.

Примѣръ 55. Дифференціальные параметры неудерживающей связи

$$r_{12}-l\geqslant 0$$

равны единицѣ и направлены внаружу кратчайшаго разстоянія между точками m_1 и m_2 (черт. 37). Условіе (506, b):

$$v_2\cos(\overline{M_1M_2},\ v_2)-v_1\cos(\overline{M_1M_2},\ v_1)\geqslant 0$$

въ этомъ случаѣ имѣетъ смыслъ обратный смыслу условія предыдущаго примѣра, то есть оно требуетъ, чтобы проэкція скорости v_1 на направленіе $\overline{M_1M_2}$ была *менѣе* проэкціи скорости v_2.

Примѣръ 56.

$$l-r_{12}-r_{23}\geqslant 0.$$

Параметры P_1 и P_3 въ точкахъ M_1 и M_3 равны единицѣ и направлены по линіямъ $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_2}$ (черт. 38); параметръ P_2 въ точкѣ M_2 равенъ $2\cos\frac{\alpha}{2}$ (гдѣ α означаетъ величину угла $M_1M_2M_3$) и направленъ по линіи, дѣлящей уголъ $M_1M_2M_3$ пополамъ.

Скорости точекъ m_1, m_2, m_3 должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$v_1\cos\left(\overline{M_1M_2},\ v_1\right)+v_3\cos\left(\overline{M_3M_2}\ \ v_3\right)+2v_2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(P_2,\ v_2\right)\geqslant 0.$$

Примѣръ 60. На гибкой нерастяжимой нити длины l находятся точки $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}, m_n$; точки m_1 и m_n прикрѣплены къ концамъ нити, всѣ же остальныя могутъ скользить вдоль по ней, причемъ, однако, не долженъ нарушаться порядокъ расположенія точекъ вдоль нити; эта связь можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$l-r_{12}-r_{23}-r_{34}-\ldots\ldots-r_{(n-1)n}\geqslant 0.$$

Дифференціальные параметры въ точкахъ M_1 и M_n равны единицѣ и направлены вдоль по нити (см. черт. 39); дифференціальные же параметры въ остальныхъ точкахъ равны:

$$P_2=2\cos\frac{\alpha_2}{2},\ P_3=2\cos\frac{\alpha_3}{2},\ \ldots\ P_{n-1}=2\cos\frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

и направлены по линіямъ, дѣлящимъ пополамъ углы $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$

§ 64. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

Матерьяльныя точки:

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n \, ^{*})$$

свободны, если нѣтъ преградъ, органичивающихъ свободу движенія точекъ и если нѣтъ никакихъ кинематическихъ связей между ними; тогда каждая изъ этихъ точекъ можетъ имѣть какую угодно скорость и какое угодно ускореніе по произвольному направленію и притомъ независимо отъ остальныхъ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ.

Пусть X_i, Y_i, Z_i суть проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей F_i всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i; такъ какъ она, подобно всѣмъ прочимъ точкамъ, свободна, то дифференціальныя уравненія ея движенія будутъ:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \; m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \; m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{(509, \; i)}$$

Подобныя же уравненія напишемъ для всѣхъ прочихъ точекъ; всего будемъ имѣть $3n$ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} m_1x_1'' = X_1, \ldots . m_ix_i'' = X_i, \ldots . m_nx_n'' = X_n \\ m_1y_1'' = Y_1, \ldots . m_iy_i'' = Y_i, \ldots . m_ny_n'' = Y_n \\ m_1z_1'' = Z_1, \ldots . m_iz_i'' = Z_i, \ldots . m_nz_n'' = Z_n \end{array}\right\} \ldots \mathbf{(509)}$$

Вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій (то есть выраженія силъ X_1, Y_1, $Z_1 \ldots . Z_n$) суть, вообще говоря, нѣкоторыя функціи времени, координатъ точекъ и проэкцій ихъ скоростей на оси координатъ.

Коль скоро всѣ эти функціи извѣстны, то, для опредѣленія движенія точекъ, надо дифференціальныя уравненія (509) интегрировать.

---

*) Буквы $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ означаютъ массы матерьяльныхъ точекъ

Если опредѣленіе движенія каждой изъ этихъ точекъ требуетъ интегрированія всѣхъ уравненій (509) въ совокупности и не можетъ быть отдѣлено отъ опредѣленія движенія всѣхъ остальныхъ точекъ, то тогда эти точки $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ образуютъ *систему свободныхъ матерьяльныхъ точекъ*.

Силы, приложенныя къ свободнымъ точкамъ и связывающія ихъ въ одну систему, могутъ быть весьма различнаго характера; къ числу такихъ силъ принадлежатъ всякія силы взаимнодѣйствія между матерьяльными точками.

Примѣръ 61. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ m_1 и m_2 взаимно-отталкиваемыхъ (по линіи ихъ соединяющей) силами:

$$F(r_{12}),$$

(гдѣ r_{12} означаетъ величину разстоянія между точками).

Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія этой системы будутъ слѣдующія:

$$m_1x_1''=F(r_{12})\frac{x_1-x_2}{r_{12}},\; m_2x_2''=F(r_{12})\frac{x_2-x_1}{r_{12}}$$

$$m_1y_1''=F(r_{12})\frac{y_1-y_2}{r_{12}},\; m_2y_2''=F(r_{12})\frac{y_2-y_1}{r_{12}}$$

$$m_1z_1''=F(r_{12})\frac{z_1-z_2}{r_{12}},\; m_2z_2''=F(r_{12})\frac{z_2-z_1}{r_{12}}\,.$$

Примѣръ 62. Система состоитъ изъ n свободныхъ матерьяльныхъ точекъ; каждыя двѣ точки взаимно притягиваются силами, пропорціональными произведенію изъ массъ этихъ точекъ и изъ разстоянія между ними, напримѣръ, силы взаимнаго притяженія точекъ m_i и m_k равны:

$$\mu m_i m_k r_{ik},$$

гдѣ численный множитель μ одинаковъ для всѣхъ паръ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія для точки m_1. Проэкція на ось X равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равна:

$$X_1=-\mu m_1\Big[m_2(x_1-x_2)+m_3(x_1-x_3)+\ldots+m_n(x_1-x_n)\Big],$$

а это выраженіе можно представить такъ:

$$X_1 = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_1 - x_k);$$

поэтому дифференціальныя уравненія точки m_1 будутъ слѣдующія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_1 - x_k)$$

$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(y_1 - y_k)$$

$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(z_1 - z_k).$$

Примѣръ 63. Система состоитъ изъ двухъ точекъ, остающихся въ плоскости XY; между точками существуютъ взаимнодѣйствія равныя, противоположныя, но направленныя перпендикулярно къ линіи, соединяющей обѣ точки; силы эти равны:

$$F = \mu \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m_1 x_1'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^2_{12}}, \quad m_2 x_2'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^2_{12}}$$

$$m_1 y_1'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^2_{12}}, \quad m_2 y_2'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^2_{12}}$$

верхніе знаки относятся къ тому случаю, когда взаимнодѣйствія направлены въ стороны, указанныя на чертежѣ 40-мъ, нижніе — въ противоположномъ случаѣ (черт. 41).

§ 65. Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ преградамъ, но не связанныхъ между собою никакими связями.

Если которая-либо изъ системы точекъ $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ ограничена въ своемъ движеніи какими-либо поверхностями, то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій этой точки будутъ

заключаться проэкціи реакцій этихъ поверхностей; напримѣръ, если свобода движенія точки m_1 ограничена двумя преградами:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, t)=0, \quad f_2(x_1, y_1, z_1, t)=0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \\ m_1 y_1'' = Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \\ m_1 z_1'' = Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1}; \end{cases}$$

если, далѣе, свобода движенія точки m_2 ограничена одною преградою:

$$f_3(x_2, y_2, z_2, t)=0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ:

$$\begin{cases} m_2 x_2'' = X_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, \\ m_2 y_2'' = Y_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2}, \\ m_2 z_2'' = Z_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_2}, \end{cases}$$

и т. д.

§ 66. Условіе, которому должны удовлетворять ускоренія точекъ, связываемыхъ какою-либо связью.

1) Если точки $m_1, m_2, \ldots m_n$ связаны какою-либо удерживающею связью, то, какъ было уже выведено въ § 60-мъ, ускоренія ихъ должны удовлетворять равенству (498), которое можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot v_i (P_i s) \cos(P_i s, \dot v_i) + K s = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (498, a)$$

2) Если же связь неудерживающая, то, когда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i (P_i \text{в}) \cos (P_i \text{в}, v_i) + \frac{\partial \text{в}}{\partial t} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(493, a)}$$

тогда ускоренія ихъ должны удовлетворять условію: (см. ф. 507)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i (P_i \text{в}) \cos (P_i \text{в}, \dot{v}_i) + K\text{в} \geqslant 0; \quad . \; . \; . \quad \textbf{(507, a)}$$

когда же скорости точекъ удовлетворяютъ неравенству: см. стр. 322 выноску

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i (P_i \text{в}) \cos (P_i \text{в}, v_i) + \frac{\partial \text{в}}{\partial t} > 0,$$

тогда ускоренія ихъ не подлежатъ никакому ограниченію.

§ 67. Совокупность реакцій удерживающей связи.

Положимъ, что система матерьяльныхъ точекъ:

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n$$

подвержена тѣмъ же самымъ силамъ, какъ и въ параграфѣ 64-мъ; но теперь предположимъ, что точки не вполнѣ свободны, а связаны между собою удерживающею связью:

$$\text{в} (x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad . \; . \; . \quad \textbf{(491)}$$

При существованіи этой связи матерьяльныя точки могутъ получить тѣ самыя ускоренія, которыя сообщаютъ имъ приложенныя къ нимъ задаваемыя силы $F_1, F_2, \ldots . F_n$ *), если только эти силы удовлетворяютъ тому условію, что сумма

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F_i}{m_i} P_i \cos (P_i, F_i) + K\text{в} \quad = 0$$

---

*) $F_i \cos (F_i, X) = X_i$, $F_i \cos (F_i, Y) = Y_i$, $F_i \cos (F_i, Z) = Z_i$.

(см. § 661)

равна нулю; если же эта сумма болѣе или менѣе нуля, то связь воспрепятствуетъ точкамъ получать вышесказанныя ускоренія и заставитъ ихъ принять другія ускоренія, удовлетворяющія равенству (498, а).

Такое дѣйствіе связи должно заключаться въ образованіи силъ, дѣйствующихъ со стороны связи и приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ; эти силы появляются только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ точки преодолѣть или разорвать связь.

Пусть $R_{1в}$ или R_1 означаетъ величину и направленіе силы дѣйствія связи на точку m_1; $R_{2в}$ или R_2 — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_2; .... $R_{iв}$ или R_i — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_i; .... $R_{nв}$ или R_n — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_n.

Эти силы мы будемъ называть *силами дѣйствія связи* в, а остальныя силы F_1, F_2, ... F_n — *задаваемыми силами*.

Ускореніе, получаемое точкою m_1, сообщается ей равнодѣйствующею изъ приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ и силы дѣйствія на нее связи в, то есть:

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1'' &= X_1 + R_{1в}\cos(R_{1в}, X), \\ m_1y_1'' &= Y_1 + R_{1в}\cos(R_{1в}, Y), \\ m_1z_1'' &= Z_1 + R_{1в}\cos(R_{1в}, Z); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \mathbf{(510, 1)}$$

это суть дифференціальныя уравненія движенія точки m_1.

Дифференціальныя уравненія движенія прочихъ точекъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} m_2x_2'' &= X_2 + R_{2в}\cos(R_{2в}, X), \\ m_2y_2'' &= Y_2 + R_{2в}\cos(R_{2в}, Y), \\ m_2z_2'' &= Z_2 + R_{2в}\cos(R_{2в}, Z), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \mathbf{(510, 2)}$$

. . . .

и такъ далѣе.

Ускоренія, заключающіяся въ первыхъ частяхъ этихъ уравненій, должны удовлетворять равенству (498, a), а потому силы $R_1, R_2, \ldots . R_n$ должны удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{m_i} P_i \cos(R_i, P_i) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(X_i \frac{d\mathfrak{s}}{dx_i} + Y_i \frac{d\mathfrak{s}}{dy_i} + Z_i \frac{d\mathfrak{s}}{dz_i}\right) + K\mathfrak{s} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (498, \mathfrak{b})$$

Это равенство заключаетъ въ себѣ не самыя силы $R_1, R_2, \ldots$ $\ldots R_i, \ldots R_n$, но только проэкціи ихъ на направленія соотвѣтственныхъ дифференціальныхъ параметровъ; отмѣтимъ эти проэкціи слѣдующими знаками:

$$R_1 \cos(R_1, P_1) = \mathfrak{R}_1,\; R_2 \cos(R_2, P_2) = \mathfrak{R}_2, \ldots R_n \cos(R_n, P_n) = \mathfrak{R}_n,$$

тогда равенство (498, $\mathfrak{b}$) получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \mathfrak{R}_i P_i + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\mathfrak{s} = 0. \; . \; . \quad (498, \mathfrak{c})$$

Остальныя части или составляющія силъ $R_1, R_2, \ldots R_n$, не входящія въ это равенство, обозначимъ слѣдующими знаками:

$$R_1 \sin(R_1, P_1) = T_1,\; R_2 \sin(R_2, P_2) = T_2, \ldots R_n \sin(R_n, P_n) = T_n;$$

T_1 есть сила, приложенная къ точкѣ m_1 и направленная въ плоскости, перпендикулярной къ дифференціальному параметру P_1, T_2 есть сила, приложенная къ точкѣ m_2 и направленная въ плоскости, перпендикулярной къ P_2, и т. д.

Такъ какъ силы $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots . \mathfrak{R}_n$ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ или противоположно имъ (напримѣръ $\mathfrak{R}_i$, если знакъ ея положительный, направлена вдоль по P_i, если же знакъ ея отрицательный, то она направлена противо-

положно P_i), то проэкціи ихъ на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 \cos(P_1, X) &= \frac{\mathfrak{R}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial \text{в}}{\partial x_1} \\
\mathfrak{R}_1 \cos(P_1, Y) &= \frac{\mathfrak{R}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial \text{в}}{\partial y_1} \\
\mathfrak{R}_1 \cos(P_1, Z) &= \frac{\mathfrak{R}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_1} = \lambda_1 \frac{\partial \text{в}}{\partial z_1}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (511,\ 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}_2 \cos(P_2, X) &= \frac{\mathfrak{R}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_2} = \lambda_2 \frac{\partial \text{в}}{\partial x_2} \\
\mathfrak{R}_2 \cos(P_2, Y) &= \frac{\mathfrak{R}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_2} = \lambda_2 \frac{\partial \text{в}}{\partial y_2} \\
\mathfrak{R}_2 \cos(P_2, Z) &= \frac{\mathfrak{R}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_2} = \lambda_2 \frac{\partial \text{в}}{\partial z_2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (511,\ 2)$$

. . . .

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}_n \cos(P_n, X) &= \frac{\mathfrak{R}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_n} = \lambda_n \frac{\partial \text{в}}{\partial x_n} \\
\mathfrak{R}_n \cos(P_n, Y) &= \frac{\mathfrak{R}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_n} = \lambda_n \frac{\partial \text{в}}{\partial y_n} \\
\mathfrak{R}_n \cos(P_n, Z) &= \frac{\mathfrak{R}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_n} = \lambda_n \frac{\partial \text{в}}{\partial z_n}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (511,\ n)$$

Величины λ_i, выражающія величины отношеній ($\mathfrak{R}_i : P_i$), введемъ, при помощи равенствъ.

$$\mathfrak{R}_1 = \lambda_1 P_1,\quad \mathfrak{R}_2 = \lambda_2 P_2,\ \ldots\ \mathfrak{R}_n = \lambda_n P_n,\ \ldots$$

въ равенство (498, c); получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{m_i} P_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0 \quad \ldots \quad (498,\ d)$$

Примѣчаніе. Впослѣдствіи, когда будемъ разсматривать систему точекъ, связанную нѣсколькими связями, придется обозначать силы $\mathfrak{R}$ и множители λ болѣе сложными знаками; для того, чтобы отличить силы R, T, $\mathfrak{R}$ и множители λ, относящіеся къ связи в_1, отъ такихъ же силъ и множителей, относящихся къ прочимъ связамъ: в_2, в_3, ..., мы условимся обозначать ихъ слѣдующими знаками:

Силы и множители, относящіеся къ связи:

$$в_1=0,$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_{1в_1}, \mathfrak{N}_{2в_1}, \ldots \mathfrak{N}_{nв_1},$$
$$T_{1в_1}, T_{2в_1}, \ldots T_{nв_1},$$
$$\lambda_{1в_1}, \lambda_{2в_1}, \ldots \lambda_{nв_1};$$

силы и множители, относящіеся къ связи:

$$в_2=0,$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_{1в_2}, \mathfrak{N}_{2в_2}, \ldots \mathfrak{N}_{nв_2},$$
$$T_{1в_2}, T_{2в_2}, \ldots T_{nв_2},$$
$$\lambda_{1в_2}, \lambda_{2в_2}, \ldots \lambda_{nв_2},$$

и такъ далѣе.).

Каковы бы ни были множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, удовлетворяющіе равенству (498, d), мы всегда можемъ замѣнить каждый изъ нихъ суммою двухъ другихъ величинъ:

$$\lambda_1=\lambda+\Delta_1,\ \lambda_2=\lambda+\Delta_2, \ldots \lambda_i=\lambda+\Delta_i, \ldots \lambda_n=\lambda+\Delta_n, \ldots (A)$$

такихъ, что одна изъ нихъ λ во всѣхъ этихъ суммахъ одинакова, а остальныя величины Δ_1, $\Delta_2, \ldots \Delta_i, \ldots \Delta_n$ удовлетворяютъ слѣдующему условію:

$$\frac{\Delta_1}{m_1}P_1^2+\frac{\Delta_2}{m_2}P_2^2+\ldots+\frac{\Delta_i}{m_i}P_i^2+\ldots+\frac{\Delta_n}{m_n}P_n^2=0; \ldots (512)$$

такое разложеніе величинъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_i, \ldots \lambda_n$ всегда возможно и, для каждой совокупности значеній $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, $P_1, P_2, \ldots P_n$, $m_1, m_2, \ldots m_n$, величина λ имѣетъ одно опредѣленное значеніе, равно какъ и каждая изъ величинъ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$. Въ самомъ дѣлѣ, если помножимъ первое изъ равенствъ (A) на $(P_1^2:m_1)$, второе — на $P_2^2:m_2$, и т. д., все полученное сложимъ, то въ

силу условія (512) получимъ равенство, изъ котораго найдемъ, что λ имѣетъ слѣдующее вполнѣ опредѣленное значеніе:

$$\lambda = \frac{\frac{\lambda_1}{m_1}P_1^2 + \frac{\lambda_2}{m_2}P_2^2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{m_n}P_n^2}{\frac{P_1^2}{m_1} + \frac{P_2^2}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{P_n^2}{m_n}}.$$

Величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ однако намъ неизвѣстны; изъ равенства (498, d), которому онѣ должны удовлетворять, мы ихъ опредѣлить не можемъ; но если произведемъ вышесказанное разложеніе величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ (A), то будемъ въ состояніи изъ равенства (498, d) опредѣлить величину λ, такъ какъ это равенство, вслѣдствіе соотношенія (512), получитъ слѣдующій видъ:

$$\lambda \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0 \;.. \;\mathbf{(498, e)}$$

Послѣ этого каждая изъ силъ $R_i\text{в}$ окажется разложенною на три силы:

$$(\lambda\text{в}) . (P_i\text{в});\quad S_i\text{в} = (\Delta_i\text{в}) . (P_i\text{в});\quad T_i\text{в} = (R_i\text{в}) \sin(R_i\text{в}, P_i\text{в});$$

первыя двѣ направлены вдоль по P_i или противоположно P_i, смотря по знаку величинъ λ и Δ_i, сила же T_i направлена въ плоскости, перпендикулярной къ P_i; такимъ образомъ всѣ силы $R_1, R_2, \ldots R_n$, дѣйствующія со стороны связи в на точки $m_1, m_2, \ldots m_n$, приведутся къ слѣдующимъ тремъ группамъ силъ:

a) силы:

$$\lambda P_1,\; \lambda P_2, \ldots \lambda P_i, \ldots \lambda P_n,$$

направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ, если λ болѣе нуля, или противоположно дифференціальнымъ параметрамъ, если λ менѣе нуля; λ опредѣляется изъ уравненія (498, e);

b) силы:

$$S_1 = \Delta_1 P_1,\; S_2 = \Delta_2 P_2, \ldots S_i = \Delta_i P_i, \ldots S_n = \Delta_n P_n,$$

которыя должны удовлетворять равенству (512); каждая изъ этихъ силъ направлена по дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена, или противоположно этому

параметру, смотря по знаку множителя Λ, заключающагося въ выраженіи этой силы;

c) силы:

$$T_1 = R_1 \sin(R_1, P_1),\ T_2 = R_2 \sin(R_2, P_2), \ldots\ T_n = R_n \sin(R_n, P_n);$$

каждая изъ нихъ направлена перпендикулярно къ дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена.

Всѣ силы группы (а) представляютъ собою, такъ сказать, одну совокупность силъ, зависящую отъ величины множителя λ, общаго всѣмъ силамъ этой группы; какъ этотъ множитель, такъ и всѣ силы этой совокупности *вполнѣ опредѣляются* слѣдующими функціями и величинами:

1) видомъ функціи s, то есть аналитическимъ выраженіемъ связи $s=0$,

2) величинами и направленіями задаваемыхъ силъ $F_1, F_2, \ldots F_n$,

3) величинами и направленіями скоростей точекъ (скорости входятъ въ выраженіе Ks),

4) величинами массъ точекъ.

Каждая связь воспроизводится въ дѣйствительности въ видѣ нѣкотораго механизма, обусловливающаго требуемую зависимость между движеніями матерьяльныхъ точекъ; нерѣдко одна и та же связь можетъ быть воспроизведена помощію механизмовъ различныхъ конструкцій. Однако эти обстоятельства не имѣютъ никакого значенія при опредѣленіи силъ группы (а), то есть эти силы вовсе не зависятъ ни отъ природы тѣлъ, входящихъ въ составъ механизма, воспроизводящаго связь $s=0$, ни отъ конструкціи этого механизма.

Силы же $T_1, T_2, \ldots T_n, S_1, S_2, \ldots S_n$ не опредѣляются тѣми функціями и величинами, которыя опредѣляютъ совокупность силъ (а), а при ближайшемъ ознакомленіи съ дѣйствіями механизмовъ, воспроизводящихъ связи, оказывается, что величины и направленія этихъ силъ ($T_1, T_2, \ldots T_n, S_1, S_2, \ldots S_n$) зависятъ отъ природы тѣлъ, образующихъ механизмъ и отъ конструкціи механизма.

Кромѣ того, слѣдуетъ еще замѣтить, что назначеніе силъ $R_1, R_2, \ldots R_n$ (заключающееся въ томъ, чтобы вмѣстѣ съ задаваемыми силами сообщать точкамъ системы такія ускоренія, которыя удовлетворяли бы равенству (498, а), выполняется однѣми только силами (a), безъ содѣйствія силъ (b) и (c); въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ смыслѣ силы групъ (b) и (c) не играютъ никакой существенной роли, потому что проэкція всякой силы T_i на соотвѣтственный параметръ P_i равна нулю, а силы $S_1, S_2, \ldots S_n$, должны удовлетворять равенству (512).

На основаніи этихъ замѣчаній мы вправѣ признать группу силъ (a) существенною и необходимою составною частью системы силъ $(R_1, R_2, \ldots R_n)$ дѣйствія связи на связываемыя ею точки; мы будемъ называть силы этой группы *реакціями связи*, а всю совокупность силъ (a) — *совокупностью реакцій связи*.

Силы же $T_1, T_2, \ldots T_n$, $S_1, S_2, \ldots S_n$ слѣдуетъ отнести къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ и отъ конструкціи того механизма, который воспроизводитъ разсматриваемую нами связь.

Для примѣра опредѣленія реакцій обратимся къ тѣмъ удерживающимъ связямъ, которыя упомянуты въ § 62.

Примѣръ 53. Если выразить эту связь равенствомъ:

$$r_{12} - l = 0,$$

то дифференціальные параметры будутъ равны единицѣ и будутъ направлены по продолженіямъ разстоянія M_1M_2 (какъ на черт. 37-мъ); реакціи этой связи будутъ равны λ, гдѣ:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q + K),$$

$$Q = \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2}\right)\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)\frac{z_1 - z_2}{r_{12}}.$$

$$K = \frac{1}{r_{12}}\left[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{r^3_{12}}\left[(x_1 - x_2)(x'_1 - x'_2) + (y_1 - y_2)(y'_1 - y'_2) + (z_1 - z_2)(z'_1 - z'_2)\right]^2;$$

онѣ будутъ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ (какъ на чертежѣ 38-мъ), если λ имѣетъ величину положительную; обратно, если λ имѣетъ величину отрицательную, то реакціи будутъ направлены противоположно дифференціальнымъ параметрамъ (т.-е. такъ, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ).

Что касается до силъ T_1, T_2, S_1, S_2, то эти силы могутъ быть различны, смотря по конструкціи и природѣ механизма, воспроизводящаго эту связь.

Обыкновенно эту связь представляютъ себѣ въ видѣ безконечно-тонкаго однороднаго и идеально-твердаго стержня, къ концамъ котораго прикрѣплены точки m_1 и m_2; при такомъ представленіи связи считаютъ очевиднымъ, что, если не принимать въ разсчетъ массы стержня, то силы дѣйствія этой связи на точки m_1 и m_2 должны состоять только изъ реакцій связи (то-есть, изъ нѣкоторой силы, приложенной къ точкѣ m_1 и направленной къ точкѣ m_2 или отъ нея, и изъ другой силы, равной и прямопротивоположной первой, приложенной къ точкѣ m_2), силъ же T_1, T_2, S_1, S_2 не существуетъ вовсе.

Однако, для того, чтобы это стало очевиднымъ, должно прибавить слѣдующее:

Стержень разсматривается, какъ физическое тѣло, то-есть, какъ система частицъ; каждая частица замѣняется матерьяльною точкою; предполагается, что между каждыми двумя частицами дѣйствуютъ молекулярныя взаимодѣйствія, равныя, прямопротивоположныя и направленныя по линіи, соединяющей частицы; величины этихъ силъ предполагаются равными:

$$\mu_1\mu_2 f(r_{12}),$$

гдѣ μ_1 и μ_2 суть массы частицъ, r_{12} — разстояніе между ними, f — функція, общая для всѣхъ паръ частицъ и притомъ такая, которая обращается въ нуль для r_{12}, равнаго или большаго нѣкоторой весьма малой (но не безконечно-малой) длины ρ, называемой радіусомъ дѣйствія молекулярныхъ силъ; для r_{12} меньшихъ ρ функція f быстро возрастаетъ съ приближеніемъ r_{12} къ нулю.

Далѣе, должно предположить, что частицы стержня расположены симметрично вокругъ линіи $\overline{M_1 M_2}$, соединяющей матерьяльныя точки m_1 и m_2, и вмѣстѣ съ тѣмъ симметрично по отношенію къ плоскости, перпендикулярной къ $\overline{M_1 M_2}$ и проходящей черезъ середину этого разстоянія, къ этому еще присоединимъ предположеніе, что такая симметрія не нарушается, ни при движеніи, ни вслѣдствіе приложенія задаваемыхъ силъ.

При всѣхъ этихъ предложеніяхъ станетъ, дѣйствительно, очевиднымъ, что равнодѣйствующая молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_1, направлена по оси симметріи и притомъ равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_2.

Такую удерживающую связь между точками m_1 и m_2, при которой разстояніе между ними должно оставаться неизмѣннымъ и при которой силъ T_1, T_2, S_1, S_2 не существуетъ, мы будемъ называть *идеальною неизмѣняемою связью* между точками m_1 и m_2 или *идеальнымъ стержнемъ*, связывающимъ эти точки.

стр. 317. Примѣръ 57. Реакціи связи

$$r_1 + r_2 - l = 0$$

равны между собою и имѣютъ величину:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q + K);$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2 x_2 + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_2}$$

$$K = \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} - \frac{(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1)^2}{r_1^3} - \frac{(x_2 x'_2 + y_2 y'_2 + z_2 z'_2)^2}{r_2^3}.$$

Онѣ направлены по продолженіямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2, если λ есть величина положительная.

Если точки m_1 и m_2 остаются постоянно въ плоскости XY, то связь эту можно воспроизвести въ видѣ механизма, состоящаго изъ зубчатаго колеса R (черт. 42), вращающагося вокругъ оси Z, и изъ двухъ зубчатыхъ полосъ AB и CD, сцѣпленныхъ съ этимъ

колесомъ; на концѣ первой полосы находится точка m_1, на концѣ второй — точка m_2; надлежащее приспособленіе не позволяетъ зубцамъ полосъ соскочить съ зубцовъ колеса. Для того, чтобы этотъ механизмъ вполнѣ точно воспроизводилъ условіе, что сумма разстояній $\overline{Om_1}$ и $\overline{Om_2}$ должна оставаться постоянною при всякихъ положеніяхъ точекъ m_1 и m_2, необходимо, чтобы колесо R имѣло ничтожно-малый радіусъ.

Существованіе тренія между частями механизма составляетъ одну изъ главнѣйшихъ причинъ образованія силъ T_1, T_2, S_1, S_2 и другихъ силъ, направленныхъ, подобно S_1 и S_2, вдоль по параметрамъ P_1 и P_2 или противоположно этимъ параметрамъ, но неудовлетворяющихъ равенству (512). Въ механизмѣ, разсматриваемомъ теперь, возникаетъ треніе между шипами оси колеса R и ихъ подшипниками, а кромѣ того и треніе на зубчатыхъ зацѣпленіяхъ. Если даже предположить, что нѣтъ тренія на зубчатыхъ зацѣпленіяхъ, то уже одно треніе на шипахъ оси служитъ причиною образованія приложенныхъ къ точкамъ m_1 и m_2 силъ T_1 и T_2, пропорціональныхъ λ и противодѣйствующихъ вращеніямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2 вокругъ O; кромѣ того, то же самое треніе шиповъ въ подшипникахъ служитъ причиною образованія силъ пропорціональныхъ λ, приложенныхъ къ тѣмъ же точкамъ и противодѣйствующихъ движеніямъ ихъ вдоль по радіусамъ векторамъ; эти силы могутъ удовлетворять или не удовлетворять равенству (512); въ послѣднемъ случаѣ придется причислить ихъ къ силамъ задаваемымъ.

Примѣръ 58. Удерживающая связь

$$r_1 + r_{12} + r_{2a} - l = 0$$

оказываетъ реакціи, имѣющія слѣдующія величины:

$$\text{въ точкѣ } m_1 \text{ реакція равна } 2\lambda \cos\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\text{въ точкѣ } m_2 \text{ реакція равна } 2\lambda \cos\frac{\alpha_2}{2};$$

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{4\left(m_2 \cos^2\frac{\alpha_1}{2} + m_1 \cos^2\frac{\alpha_2}{2}\right)}(Q+K),$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2(x_2 - a) + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_{2a}} +$$

$$+\left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2}\right)\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)\frac{z_1 - z_2}{r_{12}};$$

$$K = \frac{v_1^2 \sin^2(v_1, r_1)}{r_1} + \frac{v_2^2 \sin^2(v_2, r_{2a})}{r_{2a}} + \frac{u_{12}^2 \sin^2(u_{12}, r_{12})}{r_{12}};$$

здѣсь u_{12} означаетъ геометрическую разность между скоростями v_1 и v_2 точекъ m_1 и m_2, то-есть:

$$\bar{u}_{12} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2.$$

Примѣръ 59. Удерживающая связь:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 - a = 0$$

имѣетъ въ точкѣ m_1 реакцію $\lambda\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \lambda r_2$

и въ точкѣ m_2 —реакцію $\lambda\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \lambda r_1$;

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}(Q+K);$$

$$Q = \frac{X_1 y_2 - Y_1 x_2}{m_1} + \frac{Y_2 x_1 - X_2 y_1}{m_2}$$

$$K = 2(x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2).$$

Силы T_1, T_2, S_1, S_2 могутъ образоваться и въ этихъ двухъ послѣднихъ связяхъ преимущественно вслѣдствіе существованія тренія между частями механизмовъ, воспроизводящихъ эти связи.

Въ нижеслѣдующихъ параграфахъ мы будемъ нерѣдко представлять себѣ воображаемыя связи, не оказывающія силъ T_1, $T_2, \ldots T_n$, S_1, $S_2, \ldots S_n$; такія связи мы будемъ называть *идеальными связями*; дѣйствіе ихъ на связываемыя ими точки состоитъ только въ образованіи реакцій, приложенныхъ къ этимъ точкамъ.

Въ тѣхъ же случаяхъ, въ которыхъ нельзя будетъ разсматривать связь какъ идеальную, а придется принять въ разсчетъ и

силы $T_1, T_2, \ldots . T_n, S_1, S_2, \ldots . S_n$, можно будетъ эти силы причислить къ задаваемымъ силамъ, тѣмъ болѣе, что для сужденія объ нихъ мы должны знать самый механизмъ, воспроизводящій связь, и должны имѣть нѣкоторыя экспериментальныя данныя относительно физическихъ свойствъ этого механизма.

§ 68. Реакціи неудерживающей связи.

Положимъ, что точки $m_1, m_2, \ldots . m_n$ связаны какою-либо неудерживающею связью:

$$\text{в}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t) \geqslant 0 \ldots . \quad (492)$$

Какъ уже извѣстно изъ § 63, когда координаты точекъ удовлетворяютъ неравенству в>0, тогда ни скорости, ни ускоренія точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ и *связь*, такъ сказать, не дѣйствуетъ вовсе, находясь *въ состояніи ослабленія.*

Когда же координаты точекъ удовлетворяютъ равенству в$=0$, тогда, вслѣдствіе дѣйствія связи, находящейся *въ состояніи напряженія*, скорости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять условіямъ, приведеннымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія во второе и обратный могутъ быть опредѣлены словами: *связь слабѣетъ* и *связь крѣпнетъ:* про точки, связанныя связью, можно сказать, что онѣ *сходятъ со связи* (когда связь слабѣетъ) или *вступаютъ на связь* (когда связь крѣпнетъ).

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи ослабленія, не можетъ оказывать никакихъ реакцій на связываемыя ею точки, такъ какъ ускоренія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ со стороны связи.

Находясь въ состояніи напряженія, неудерживающая связь не можетъ оказывать реакцій причинамъ, побуждающимъ точки сойти со связи, такъ какъ она этому сходу не препятствуетъ; напротивъ, при дѣйствіи усилій, стремящихся разорвать или разрушить связь, въ ней необходимо развиваются реакціи, тому противодѣйствующія.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не препятствуетъ точкамъ получить скорости, удовлетворяющія неравенству

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial \text{в}}{\partial t} > 0;$$

а потому, если какія-либо причины побуждаютъ точки получить такія скорости, то связь не оказываетъ тому никакихъ противодѣйствій и точки

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{4\left(m_2\cos^2\frac{\alpha_1}{2}+m_1\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\right)}(Q+K),$$

$$Q=\frac{X_1x_1+Y_1y_1+Z_1z_1}{m_1r_1}+\frac{X_2(x_2-a)+Y_2y_2+Z_2z_2}{m_2r_{2a}}+$$

$$+\left(\frac{X_1}{m_1}-\frac{X_2}{m_2}\right)\frac{x_1-x_2}{r_{12}}+\left(\frac{Y_1}{m_1}-\frac{Y_2}{m_2}\right)\frac{y_1-y_2}{r_{12}}+\left(\frac{Z_1}{m_1}-\frac{Z_2}{m_2}\right)\frac{z_1-z_2}{r_{12}};$$

$$K=\frac{v_1^2\sin^2(v_1,r_1)}{r_1}+\frac{v_2^2\sin^2(v_2,r_{2a})}{r_{2a}}+\frac{u^2_{12}\sin^2(u_{12},r_{12})}{r_{12}};$$

здѣсь u_{12} означаетъ геометрическую разность между скоростями v_1 и v_2 точекъ m_1 и m_2, то-есть:

$$\overline{u}_{12}=\overline{v}_1-\overline{v}_2.$$

Примѣръ 59. Удерживающая связь:

$$x_1y_2-y_1x_2-a=0$$

имѣетъ въ точкѣ m_1 реакцію $\lambda\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\lambda r_2$

и въ точкѣ m_2 — реакцію $\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\lambda r_1$;

$$\lambda=-\frac{m_1m_2}{m_2r_2^2+m_1r_1^2}(Q+K);$$

$$Q=\frac{X_1y_2-Y_1x_2}{m_1}+\frac{Y_2x_1-X_2y_1}{m_2}$$

$$K=2(x'_1y'_2-y'_1x'_2).$$

Силы T_1, T_2, S_1, S_2 могутъ образоваться и въ этихъ двухъ послѣднихъ связяхъ преимущественно вслѣдствіе существованія тренія между частями механизмовъ, воспроизводящихъ эти связи.

Въ нижеслѣдующихъ параграфахъ мы будемъ нерѣдко представлять себѣ воображаемыя связи, не оказывающія силъ T_1, T_2, ... T_n, S_1, S_2, ... S_n; такія связи мы будемъ называть *идеальными связями*; дѣйствіе ихъ на связываемыя ими точки состоитъ только въ образованіи реакцій, приложенныхъ къ этимъ точкамъ.

Въ тѣхъ же случаяхъ, въ которыхъ нельзя будетъ разсматривать связь какъ идеальную, а придется принять въ разсчетъ и

силы T_1, T_2, ... T_n, S_1, S_2, ... S_n, можно будетъ [illegible]
причислить къ задаваемымъ силамъ, тѣмъ болѣе, [illegible]
денія объ нихъ мы должны знать самый механизмъ, [illegible]
водящій связь, и должны имѣть нѣкоторыя [illegible]
данныя относительно физическихъ свойствъ этого [illegible]

§ 68. Реакціи неудерживающей связи.

Положимъ, что точки m_1, m_2, ... m_n связаны [illegible]
вающею связью:

$$в(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) \geq 0 \ldots$$

Какъ уже извѣстно изъ § 63, когда координаты [illegible]
неравенству $в > 0$, тогда ни скорости, ни ускоренія [illegible]
никакимъ ограниченіямъ и *связь*, такъ сказать, [illegible]
ходясь *въ состояніи ослабленія*.

Когда же координаты точекъ удовлетворяютъ [illegible]
вслѣдствіе дѣйствія связи, находящейся въ [illegible]
рости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять [illegible]
нымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія [illegible]
быть опредѣлены словами: *связь слабѣетъ* [illegible]
связанныя связью, можно сказать, что онѣ [illegible]
слабѣетъ) или *вступаютъ на связь* (когда [illegible]

Неудерживающая связь, находясь въ [illegible]
оказывать никакихъ реакцій на связываемыя [illegible]
нія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ [illegible]

Находясь въ состояніи напряженія, [illegible]
оказывать реакцій причинамъ, побуждающимъ [illegible]
какъ она этому сходу не препятствуетъ; [illegible]
стремящихся разорвать или разрушить [illegible] задавае-
ваются реакціи, тому противодѣйствующія [illegible] ложеніяхъ A_1,

Неудерживающая связь, находясь [illegible] точекъ и зада-
пятствуетъ точкамъ получить скорости [illegible]

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i \ldots [illegible]$$

а потому, если какія-либо [illegible]
скорости, то связь не оказываетъ [illegible]

дѣйствительно получаютъ эти скорости; имѣя эти скорости, точки сходятъ со связи.

Если скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (493, \text{a})$$

то неудерживающая связь, находясь въ состоянiи напряженiя, не можетъ препятствовать точкамъ получить ускоренiя, удовлетворяющiя неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K s > 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (513)$$

а потому, если задаваемыя силы

$$F_1, \ F_2, \ldots . F_i, \ldots . F_n,$$

приложенныя къ точкамъ

$$m_1, \ m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n,$$

побуждаютъ ихъ принять ускоренiя, удовлетворяющiя неравенству (513), то-есть, если силы $F_1, F_2, \ldots . F_n$ удовлетворяютъ неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K s > 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (514)$$

то связь не можетъ оказать никакихъ реакцiй и точки дѣйствительно получаютъ эти ускоренiя; имѣя такiя скорости и ускоренiя, точки сходятъ со связи.

Если бы та же самая связь была удерживающею, то, при тѣхъ же самыхъ положенiяхъ точекъ, при тѣхъ же скоростяхъ и задаваемыхъ силахъ, она оказала бы совокупность реакцiй, направленныхъ противоположно дифференцiальнымъ параметрамъ, такъ какъ множитель λ, выражаемый формулою:

$$\lambda = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K s}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (498, \text{f})$$

имѣетъ, на основанiи неравенства (514), величину отрицательную.

Такихъ *отрицательныхъ реакцій* неудерживающая связь оказать не можетъ.

Если неудерживающая связь находится въ состояніи напряженія, точки имѣютъ скорости, удовлетворяющія равенству (493, а), а задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ, удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_в < 0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(515)}$$

то эти силы стремятся разрушить связь, потому что онѣ побуждаютъ точки принять ускоренія, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K_в < 0;$$

а этого, при скоростяхъ, удовлетворяющихъ равенству (493, а), связь не допускаетъ. Въ такомъ случаѣ неудерживающая связь должна дѣйствовать такъ же, какъ удерживающая, а именно, она должна оказать реакціи, множитель λ которыхъ опредѣляется по формулѣ (498, f); такъ какъ, на основаніи неравенства (515), этотъ множитель имѣетъ величину положительную, то *реакціи* будутъ *положительныя*, то-есть, будутъ направлены по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Эти реакціи, вмѣстѣ съ задаваемыми силами, сообщаютъ точкамъ такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K_в = 0.$$

Связь остается въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока задаваемыя силы удовлетворяютъ неравенству (515), въ тѣхъ положеніяхъ A_1, $A_2, \ldots A_n$ точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, въ которыхъ скорости точекъ и задаваемыя силы будутъ удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_в = 0,$$

реакціи связи обратятся въ нули.

Чтобы узнать, что станется послѣ этого съ неудерживающею связью (то-есть, ослабѣетъ ли она, или останется напряженною), надо опредѣлить, какой знакъ стала бы пріобрѣтать сумма:

$$Q+K=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}F_iP_i\cos(F_i,\,P_i)+K_8\,,$$

если бы связь была обращена въ удерживающую и матерьяльныя точки продолжали бы свое движеніе, не сходя съ нея.

Если бы оказалось, что сумма $(Q+K)$, послѣ своего обращенія въ нуль, пріобрѣтаетъ при сказанныхъ предположеніяхъ опять *отрицательное значеніе*, то это значитъ, что неудерживающая *связь не ослабѣваетъ* и послѣ прохожденія точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, чрезъ положенія $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Обратно, если бы сумма $(Q+K)$ стала пріобрѣтать при сказанныхъ предположеніяхъ *положительное значеніе*, то предполагаемое дальнѣйшее движеніе точекъ могло бы совершаться только при дѣйствіи отрицательныхъ реакцій со стороны связи; но неудерживающая связь такихъ реакцій оказать не можетъ, а потому *матерьяльныя точки* необходимо *сойдутъ со связи* и послѣдняя ослабѣетъ. Дальнѣйшее движеніе освободившихся точекъ будетъ совершаться подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, причемъ начальными скоростями будутъ тѣ скорости, съ которыми матерьяльныя точки $m_1, m_2, \ldots m_n$, находясь въ положеніяхъ $A_1, A_2, \ldots A_n$, сошли со связи; эти скорости удовлетворяютъ равенству (493, a).

Кромѣ положительныхъ реакцій, въ неудерживающихъ связяхъ могутъ развиваться силы T_i и S_i, преимущественно вслѣдствіе тренія частей механизма между собою и также вслѣдствіе несовершенной гибкости нитей, входящихъ въ составъ тѣхъ механизмовъ, которыми воспроизводятся неудерживающія связи.

Примѣръ 54-й. Неудерживающая связь:

$$(l-r_{12})\geqslant 0,$$

какъ уже упомянуто въ § 59-мъ, можетъ быть воспроизведена въ видѣ тонкой, вполнѣ гибкой, но вполнѣ нерастяжимой нити длины l, къ концамъ которой прикрѣплены точки m_1 и m_2. Эта связь находится въ со-

стоянія напряженія тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l; если тогда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

а задаваемыя силы — условію:

$$(Q_1 + K_1) < 0,$$

(гдѣ

$$Q_1 = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_2} F_2 \cos(F_2, r_{12}),$$

$$K_1 = -\frac{u^2 \sin^2(u, r_{12})}{r_{12}},$$

гдѣ направленіе r_{12} означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2, а u означаетъ геометрическую разность между скоростью v_1 и скоростью v_2, то-есть:

$$u\cos(u,X) = x_1' - x_2',\; u\cos(u,Y) = y_1' - y_2',\; u\cos(u,Z) = z_1' - z_2'),$$

то точки m_1 и m_2 будутъ испытывать со стороны связи реакціи, равныя

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q_1 + K_1)$$

и направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ этой связи, то-есть, *внутрь длины* M_1M_2, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ; реакцій же, направленныхъ внаружу разстоянія M_1M_2, эта связь оказывать не можетъ.

Примѣръ 55-й. Неудерживающая связь:

$$(r_{12} - l) \geqslant 0$$

можетъ оказывать реакціи, направленныя не иначе, какъ *внаружу длины* M_1M_2 (какъ на чертежѣ 37-мъ); такія реакціи оказываетъ она тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l и если притомъ скорости ихъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_2 \cos(v_2, r_{12}) - v_1 \cos(v_1, r_{12}) = 0,$$

V-68.

а задаваемыя силы — условію:

$$(Q+K)<0,$$

гдѣ Q и K суть тѣ же самыя выраженія, которыя означены этими знаками въ предыдущемъ параграфѣ при изложеніи примѣра 53-го.

Величины реакцій, испытываемыхъ точками m_1 и m_2 со стороны этой связи, выражаются формулою:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(Q+K).$$

Примѣръ 56-й. Обратимся теперь къ неудерживающей связи

$$l - r_{12} - r_{23} \geqslant 0,$$

дифференціальные параметры которой были опредѣлены въ § 63-мъ.

Матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3 испытываютъ со стороны этой связи реакціи тогда, когда сумма разстояній r_{12} и r_{23} равна l и если притомъ скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) + v_2 \cos(v_2, r_{23}) - v_3 \cos(v_3, r_{23}) = 0,$$

(которое можно представить такъ:

$$u_{12} \cos(u_{12}, r_{12}) + u_{23} \cos(u_{23}, r_{23}) = 0),$$

а задаваемыя силы — условію:

$$(Q+K)<0;$$

здѣсь Q и K означаютъ слѣдующія выраженія:

$$Q = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_3} F_3 \cos(F_3, r_{23}) +$$

$$+ \frac{1}{m_2} F_2 \left(\cos(F_2, r_{23}) - \cos(F_2, r_{12})\right),$$

$$K = -\frac{u^2_{12} \sin^2(u_{12}, r_{12})}{r_{12}} - \frac{u^2_{23} \sin^2(u_{23}, r_{23})}{r_{23}};$$

подъ направленіемъ r_{12} подразумѣвается направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2; направленіе r_{23} идетъ отъ точки m_2 черезъ

точку m_3; u_{12} есть геометрическая разность между скоростью точки m_1 и скоростью точки m_2; u_{23} — геометрическая разность между скоростями точекъ m_2 и m_3, то-есть:

$$\overline{u_{12}} = \overline{v_1} - \overline{v_2}, \quad \overline{u_{23}} = \overline{v_2} - \overline{v_3}.$$

При этихъ условіяхъ точки m_1 и m_3 испытываютъ со стороны связи реакціи равныя между собою, равныя:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2 m_3}{m_2(m_1 + m_3) + 4m_1 m_3 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(Q + K)$$

и направленныя къ точкѣ m_2 (то-есть, по направленіямъ P_1 и P_3, см. чертежъ 38-й); точка же m_2 испытываетъ реакцію, имѣющую величину и направленіе геометрической суммы двухъ силъ, равныхъ λ, приложенныхъ къ точкѣ m_2 и направленныхъ — одна къ точкѣ m_1, другая — къ точкѣ m_3.

Эта связь можетъ быть воспроизведена въ видѣ весьма тонкой, гибкой нерастяжимой нити длины l, пропущенной черезъ колечко ничтожно-малыхъ размѣровъ; къ концамъ нити прикрѣплены точки m_1 и m_3, а къ колечку — точка m_2.

Несмотря на свою кажущуюся простоту, механизмъ этотъ заключаетъ въ себѣ двѣ причины образованія силъ T_i, S_i и имъ подобныхъ, которыя мы принуждены будемъ относить къ числу задаваемыхъ силъ; одною изъ причинъ служитъ неполная гибкость нити, или, правильнѣе сказать, сопротивленіе нити изгибу, другая причина — треніе нити о кольцо.

Нетрудно подобнымъ же образомъ составить надлежащія формулы и выраженія для неудерживающей связи примѣра 60-го, а также и для всякихъ другихъ неудерживающихъ связей, каковы бы онѣ ни были.

§ 69. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ одною связью.

1. Предположимъ, что имѣемъ систему матерьяльныхъ точекъ

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n,$$

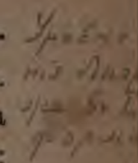
къ которымъ приложены задаваемыя силы и которыя связаны *идеальною связью*, выражаемою равенствомъ (491) или условіемъ (492), смотря по тому, есть ли это связь удерживающая или неудерживающая.

Означимъ чрезъ F_1 равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ m_1, а чрезъ X_1, Y_1, Z_1— проэкціи этой равнодѣйствующей F_1 на оси координатъ; подобныя же обозначенія съ соотвѣтственными значками внизу примѣнимъ и къ остальнымъ точкамъ, такъ что F_i будетъ означать равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, а X_i, Y_i, Z_i— проэкціи этой равнодѣйствующей F_i на оси координатъ.

Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія этой системы точекъ суть уравненія (510) § 67-го, въ которыхъ вмѣсто R_i должны заключаться реакціи идеальной связи; онѣ выражаютъ, что величина ускоренія каждой матерьяльной точки равняется, дѣленной на массу точки, величинѣ равнодѣйствующей *всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ* (задаваемыхъ силъ и реакціи связи на эту точку) и что направленіе ускоренія совпадаетъ съ направленіемъ этой равнодѣйствующей; эти совокупныя дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1},\ m_1 y_1'' = Y_1 + \lambda \frac{\partial v}{\partial y_1},\ m_1 z_1'' = Z_1 + \lambda \frac{\partial v}{\partial z_1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_i x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i},\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda \frac{\partial v}{\partial y_i},\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda \frac{\partial v}{\partial z_i}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n x_n'' = X_n + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_n},\ m_n y_n'' = Y_n + \lambda \frac{\partial v}{\partial y_n},\ m_n z_n'' = Z_n + \lambda \frac{\partial v}{\partial z_n}
\end{array}\right\} \quad (516)$$

Если связь не идеальная, то въ этихъ уравненіяхъ къ проэкціямъ задаваемыхъ силъ присоединятся проэкціи силъ T_i, S_i и другихъ силъ, развивающихся вслѣдствіе тренія и прочихъ несовершенствъ механизма.



§ 70. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями.

1. Положимъ, что система точекъ $m_1, m_2, \ldots . m_n$ связана идеальными удерживающими связями, выражаемыми равенствами:

$$в_1(x_1, y_1, z_1, \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . x_n, y_n, z_n, t)=0 \ldots \textbf{(491, 1)}$$

$$в_2(x_1, y_1, z_1, \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . x_n, y_n, z_n, t)=0 \ldots \textbf{(491, 2)}$$

. . . .

$$в_p(x_1, y_1, z_1, \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . x_n, y_n, z_n, t)=0; \ldots \textbf{(491, p)}$$

p есть число этихъ связей, $в_1, в_2, в_3, \ldots . в_p$ суть какія-либо функціи координатъ точекъ и времени.

Въ этомъ случаѣ къ каждой изъ точекъ системы, кромѣ задаваемыхъ силъ, приложена реакція каждой изъ связей; такъ напримѣръ къ точкѣ m_i приложены:

задаваемыя силы (для равнодѣйствующей этихъ силъ и для проэкцій ея на оси координатъ сохранимъ прежнія обозначенія F_i, X_i, Y_i, Z_i);

реакція связи (491, 1), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ этой точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_1) . P_iв_1 ;$$

реакція связи (491, 2), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_2) . P_iв_2 ;$$

. . . .

и наконецъ реакція связи (491, p), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_p) . P_iв_p .$$

Каждый изъ входящихъ здѣсь знаковъ:

$$\lambda(\text{в}),\ \lambda(\text{в}_2),\ \ldots\ \lambda(\text{в}_p)$$

обозначаетъ нѣкоторый множитель, общій всѣмъ реакціямъ одной изъ связей; напримѣръ, величины реакцій связи (491, 1) въ точкахъ

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_i,\ \ldots\ m_n$$

выражаются произведеніями:

$$\lambda(\text{в}_1)\,.\,P_1\text{в}_1;\ \lambda(\text{в}_1)\,.\,P_2\text{в}_1;\ \ldots\ \lambda(\text{в}_1)\,.\,P_i\text{в}_1;\ \ldots\ \lambda(\text{в}_1)\,.\,P_n\text{в}_1.$$

Совокупность дифференціальныхъ уравненій этой системы матерьяльныхъ точекъ получимъ, составивъ равенства, выражающія, что ускореніе, получаемое каждою точкою, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей всѣхъ приложенныхъ къ ней реакцій и задаваемыхъ силъ и что величина ускоренія равна величинѣ этой равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки: самыя уравненія будутъ слѣдующія: (3n ур-й):

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_1} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial x_1} \quad \textbf{(517, a1)}$$

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial y_1} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial y_1} \quad \textbf{(517, b1)}$$

$$m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial z_1} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial z_1}, \quad \textbf{(517, c1)}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_2} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial x_2}, \quad \textbf{(517, a2)}$$

. . . .

. . . .

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_i} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial x_i}, \quad \textbf{(517, ai)}$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial y_i} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial\text{в}_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial\text{в}_p}{\partial y_i}, \quad \textbf{(517, bi)}$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i}, \quad \text{(517, ci)}$$

. . . .

. . . .

$$m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda(\text{в}_1)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_n} + \lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_n}. \quad \text{(517, cn)}$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n$, (число которыхъ: $3n$), заключающіяся въ этихъ $3n$ дифференціальныхъ уравненіяхъ, связаны между собою p уравненіями связей (отъ (491, 1) до (491, p)); кромѣ того, эти дифференціальныя уравненія заключаютъ въ себѣ p множителей:

$$\lambda(\text{в}_1),\ \lambda(\text{в}_2), \ldots \lambda(\text{в}_p),$$

которые опредѣлятся изъ уравненій, приведенныхъ ниже.

Такъ какъ всѣ связи удерживающія, то скорости точекъ системы должны удовлетворять p равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial t} = 0, \quad \text{(493, 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_2}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \text{в}_2}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \text{в}_2}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial \text{в}_2}{\partial t} = 0, \quad \text{(493, 2)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_p}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \text{в}_p}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial \text{в}_p}{\partial t} = 0, \quad \text{(493, p)}$$

а ускоренія ихъ должны удовлетворять такому же числу равенствъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i}z_i''\right) + K\text{в}_1 = 0, \quad \text{(498, 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_2}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial \text{в}_2}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial \text{в}_2}{\partial z_i}z_i''\right) + K\text{в}_2 = 0, \qquad (498,\ 2)$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_p}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial \text{в}_p}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i}z_i''\right) + K\text{в}_p = 0. \qquad (498,\ \text{p})$$

(Подъ знаками

$$K\text{в}_1,\ K\text{в}_2, \ldots .\ K\text{в}_p$$

подразумѣваются многочлены вида (497); см. § 60-й).

Равенства (498, 1), (498, 2), ... (498, p) послужатъ для опредѣленія множителей λ; для этого надо рѣшить дифференціальныя уравненія (517) относительно ускореній x_1'', y_1'', z_1'', ... x_i'', y_i'', z_i'', ... z_n'' и полученныя оттуда выраженія этихъ ускореній подставить въ равенства (498, 1), (498, 2), ... (498, p); тогда эти равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$\lambda(\text{в}_1)P_{11} + \lambda(\text{в}_2)P_{12} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)P_{1p} + Q_1 + K\text{в}_1 = 0 \ \ldots (518,\ 1)$$

$$\lambda(\text{в}_1)P_{21} + \lambda(\text{в}_2)P_{22} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)P_{2p} + Q_2 + K\text{в}_2 = 0 \ \ldots (518,\ 2)$$

. . . .

$$\lambda(\text{в}_1)P_{p1} + \lambda(\text{в}_2)P_{p2} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)P_{pp} + Q_p + K\text{в}_p = 0 \ \ldots (518,\ \text{p})$$

Для сокращеннаго писанія здѣсь введены знаки, имѣющіе слѣдующія значенія:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}\left(X_i\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i} + Z_i\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i}\right),$$

или, что то же самое:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}(P_i\text{в}_1)F_i\cos(P_i\text{в}_1, F_i);$$

подобнымъ же образомъ Q_k означаетъ:

$$\left.\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(X_i \frac{\partial s_k}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial s_k}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial s_k}{\partial z_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_k) F_i \cos(P_i s_k F_i) \end{aligned}\right\} \ldots . (519)$$

Коэффиціенты у множителей λ въ равенствахъ (518) суть слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} P_{12} = P_{21} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \frac{\partial s_1}{\partial y_i}\frac{\partial s_2}{\partial y_i} + \frac{\partial s_1}{\partial z_i}\frac{\partial s_2}{\partial z_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_1) . (P_i s_2) \cos(P_i s_1,\ P_i s_2) \end{aligned}\right\} \ldots . (520)$$

$$P_{11} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial z_i}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_1)^2,$$

и т. д.

2. Если которая-либо изъ связей принадлежитъ къ числу неудерживающихъ, то надо принять во вниманіе, что она можетъ оказывать только положительныя реакціи, то-есть, реакціи, направленныя по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ; поэтому, какъ только множитель λ, соотвѣтствующій этой неудерживающей связи, обратится въ нуль и послѣ этого начнетъ пріобрѣтать отрицательныя значенія, то это будетъ значить, что матерьяльныя точки сходятъ съ этой связи, а потому связь ослабѣваетъ и реакціи ея уничтожаются.

3. Если по характеру вопроса приходится разсматривать связи подъ видомъ механизмовъ даннаго устройства и необходимо принимать въ разсчетъ силы, образующіяся вслѣдствіе тренія и прочихъ физическихъ причинъ, то эти силы придется помѣстить въ предыдущихъ формулахъ и уравненіяхъ въ числѣ задаваемыхъ силъ.

§ 71. Приведеніе совокупности (517) къ (3n—p) совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ такимъ же числомъ искомыхъ функцій времени.

Число $(3n—p)$ означимъ черезъ $н$.

Исключивъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) множители:

$$\lambda(в_1), \lambda(в_2), \ldots . \lambda(в_p),$$

будемъ имѣть $н$ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ въ себѣ: время t, $3n$ координатъ x_1, y_1, z_1, ... x_n, y_n, z_n и производныя этихъ координатъ по времени, первыя и вторыя.

Всѣ $3n$ координатъ связаны между собою и съ временемъ уравненіями (491, 1), (491, 2), ... (491, p); поэтому p изъ числа этихъ координатъ могутъ быть выражены функціями времени и остальныхъ $н$ координатъ; условимся называть послѣднія *координатами независимыми*, а первыя—*координатами зависимыми*.

Всякія $н$ изъ числа $3n$ координатъ могутъ быть приняты за независимыя.

Сдѣлавъ надлежащій выборъ независимыхъ координатъ и рѣшивъ уравненія связей относительно координатъ зависимыхъ, получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ независимыхъ координатъ и времени.

Производныя по времени отъ зависимыхъ координатъ выразятся функціями: времени, независимыхъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Найденными выраженіями воспользуемся для того, чтобы изъ $н$ дифференціальныхъ уравненій, не заключающихъ множителей λ, исключить зависимыя координаты и ихъ производныя.

Такимъ образомъ мы получимъ $н$ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ: время, независимыя координаты, ихъ первыя и вторыя производныя.

§ 72. Координатные параметры; число независимыхъ координатныхъ параметровъ для данной системы несвободныхъ точекъ.

Положенія, занимаемыя n точками въ пространствѣ, могутъ быть выражены въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ или косоугольныхъ, въ криволинейныхъ цилиндрическихъ, сферическихъ или какихъ бы то ни было ортогональныхъ или косоугольныхъ координатахъ; кромѣ того, могутъ существовать и существуютъ еще многіе другіе способы для той же цѣли; напримѣръ, положеніе n точекъ въ пространствѣ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду (и оси кординатъ $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $ЮZ$, связанныя съ нею), точка $Ю$ которой совпадаетъ съ точкою № 1, ось $ЮZ$ проходитъ черезъ точку № 2 и плоскость $ZЮ\Xi$ заключаетъ въ себѣ точку № 3; тогда положенія всѣхъ n точекъ въ пространствѣ могутъ быть выражены слѣдующими $3n$ величинами: абсолютными координатами $x_1 = x_{ю}$, $y_1 = y_{ю}$, $z_1 = z_{ю}$ точки № 1, углами *ф*, *ж*, *э*, разстояніемъ ζ_2 точки № 2 отъ точки № 1, относительными координатами ξ_3 и ζ_3 точки № 3 и относительными координатами ξ_4, η_4, ζ_4, ... ξ_n, η_n, ζ_n остальныхъ точекъ. Абсолютныя декартовы координаты x_i, y_i, z_i всякой изъ n точекъ выразятся по извѣстнымъ формуламъ (формулы (45) кинематической части стр. 56) въ функціяхъ отъ $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$, *ф*, *ж*, *э*, ξ_i, η_i, ζ_i.

Если точки n образуютъ собою неизмѣняемую систему точекъ, то-есть, если разстояніе между каждыми двумя изъ этихъ точекъ остается постояннымъ, то тогда, при измѣненіи положенія системы въ пространствѣ, измѣняются только шесть величинъ $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$, *ф*, *ж* и *э* изъ числа всѣхъ $3n$, перечисленныхъ выше, прочія же $(3n-6)$ остаются постоянными.

Вообще, тѣмъ или другимъ способомъ, положеніе въ пространствѣ системы n точекъ, связанныхъ p связями вида (491, b) (§ 62), *) можетъ быть выражено посредствомъ нѣсколькихъ величинъ:

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots q_s,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

*) То-есть, связями, уравненія которыхъ не заключаютъ времени.

1) При каждомъ опредѣленномъ положенiи точекъ системы, величины эти получаютъ опредѣленныя значенiя; то-есть, каждой совокупности опредѣленныхъ значенiй декартовыхъ координатъ $x_1, y_1, z_1, \ldots z_n$ соотвѣтствуетъ совокупность опредѣленныхъ значенiй величинъ $q_1, q_2, \ldots q_s$.

2) Величины $q_1, q_2, \ldots q_s$ измѣняются непрерывнымъ образомъ при измѣненiи положенiй точекъ системы.

3) Каждая возможная совокупность опредѣленныхъ значенiй величинъ $q_1, q_2, \ldots q_s$ вполнѣ опредѣляетъ нѣкоторую совокупность опредѣленныхъ значенiй декартовыхъ координатъ данной системы точекъ, а, слѣдовательно, нѣкоторое положенiе точекъ системы въ пространствѣ.

Такiя вевичины $q_1, q_2, \ldots q_s$ мы будемъ называть *координатными параметрами данной системы точекъ.*

А) Относительно числа этихъ координатныхъ параметровъ мы прежде всего докажемъ, что число ихъ не можетъ быть менѣе числа $\varkappa = (3n - p)$ независимыхъ декартовыхъ координатъ данной системы точекъ.

По вышеприведеннымъ свойствамъ 1-му и 2-му, координатные параметры должны выражаться нѣкоторыми функцiями декартовыхъ координатъ; положимъ, что эти функцiи намъ извѣстны:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \chi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ q_2 &= \chi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_s &= \chi_s(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (521)$$

По третьему свойству, декартовы координаты системы точекъ должны вполнѣ опредѣляться по заданнымъ значенiямъ координатныхъ параметровъ; но изъ имѣющихся равенствъ (521) и изъ уравненiй связей:

$$\left.\begin{aligned} \text{в}_1(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) &= 0 \\ \text{в}_2(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{в}_p(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (522)$$

V-72.

нельзя получить опредѣленныхъ рѣшенiй для декартовыхъ координатъ, если число равенствъ (521) вмѣстѣ съ числомъ равенствъ (522) менѣе числа декартовыхъ координатъ, то-есть, если $(s+p)$ менѣе $3n$, или s менѣе $н = (3n - p)$; поэтому число s должно быть не менѣе $н$.

Если $s = н$, то изъ уравненiй (521) и (522) получимъ выраженiя декартовыхъ координатъ въ функцiяхъ отъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_н$; пусть эти выраженiя будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \theta_1(q_1, q_2, \ldots q_н) \\ y_1 = \theta_2(q_1, q_2, \ldots q_н) \\ z_1 = \theta_3(q_1, q_2, \ldots q_н) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \theta_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_н) \end{array}\right\} \ldots\ldots \textbf{(523)}$$

Эти ур- выражаются, напр., переходъ отъ одной системы координатъ къ другой.

B) Слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ случаѣ, когда число координатныхъ параметровъ системы точекъ равно числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, *всѣ координатные параметры* $q_1, q_2, \ldots q_н$ *суть перемѣнныя независимыя*, то-есть, они не должны быть связаны между собою никакими равенствами и могутъ получать всякiя значенiя независимо другъ отъ друга. при $s = 3n - p$

C) Кромѣ того, должно обратить вниманiе на слѣдующее обстоятельство: *первыя части уравненiй* (522) *связей по подстановленiи въ нихъ функцiй* $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{3n}$ *вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обращаться въ нуль тождественно, при всякихъ значенiяхъ координатныхъ параметровъ*; въ самомъ дѣлѣ, еслибы не всѣ, а только $н$ изъ числа декартовыхъ координатъ были замѣнены выражающими ихъ функцiями θ, а затѣмъ уравненiя (522) были бы рѣшены относительно оставшихся p декартовыхъ координатъ, то послѣднiя должны бы были выразиться тѣми же самыми функцiями, какими онѣ выражаются по формуламъ (523).

Число координатныхъ параметровъ можетъ быть болѣе n, но тогда $(s-n)$ параметровъ должны быть функціями остальныхъ n; дѣйствительно, если $s > n$, то, рѣшивъ n первыхъ изъ числа равенствъ (521) вмѣстѣ съ уравненіями (522) относительно декартовыхъ координатъ и подставивъ полученныя выраженія (523) въ оставшіяся $(s-n)$ равенствъ (521), получимъ выраженія координатныхъ параметровъ

$$q_{n+1},\ q_{n+2}, \ldots\ q_s$$

въ функціяхъ остальныхъ $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Также можно выразить декартовы координаты функціями которыхъ-либо n координатныхъ параметровъ, выбранныхъ изъ числа разсматриваемыхъ; а потому, если число s координатныхъ параметровъ данной системы точекъ болѣе числа n независимыхъ декартовыхъ координатъ той же системы, то любые n изъ числа координатныхъ параметровъ могутъ быть приняты за *независимые*, прочіе же $(s-n)$ должны выражаться функціями этихъ независимыхъ координатныхъ параметровъ.

Обратимъ еще вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ s хотя и болѣе n, но менѣе $3n$; относительно этихъ случаевъ мы сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое намъ понадобится въ слѣдующемъ параграфѣ.

D) Можно выразить декартовы координаты въ функціяхъ всѣхъ s координатныхъ параметровъ такимъ образомъ, чтобы полученныя выраженія тождественно удовлетворяли $(3n-s)$ изъ числа p уравненій (522) связей ($(3n-s)$ менѣе p, потому что s болѣе n, а p равно $(3n-n)$); для этого надо рѣшить s равенствъ (521) и избранныя $(3n-s)$ изъ уравненій (522) относительно декартовыхъ координатъ; полученныя выраженія:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \vartheta_1(q_1,\ q_2, \ldots\ q_s) \\ y_1 &= \vartheta_2(q_1,\ q_2, \ldots\ q_s) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= \vartheta_{3n}(q_1,\ q_2, \ldots\ q_s) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(524)}$$

должны будутъ обращать первыя части избранныхъ нами $(3n-s)$ уравненій связей въ нуль тождественно, при всякихъ значеніяхъ $q_1, q_2 \ldots q_s$; остальныя же уравненія связей, число которыхъ равно $(p-3n+s)$, то-есть $(s-n)$, обратятся, при подстановленіи въ нихъ функцій $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ не въ тождества, но въ тѣ уравненія, которыя связываютъ между собою координатные параметры и изъ которыхъ зависимые $(s-n)$ параметровъ могутъ быть выражены въ функціяхъ отъ независимыхъ.

Все сказанное до сихъ поръ въ этомъ параграфѣ примѣняется *съ надлежащими измѣненіями* къ n точкамъ, связаннымъ между собою p связями, уравненія которыхъ (491, 1), (491, 2).... (491, p) (§ 70) заключаютъ время t.

Въ этихъ случаяхъ лучше всего выбрать такіе координатные параметры, которые выражаются функціями декартовыхъ координатъ, не зависящими отъ времени.

Положимъ, что такіе координатные параметры найдены и что число ихъ равно $\varkappa = 3n - p$; пусть они выражаются въ декартовыхъ координатахъ слѣдующими функціями:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \chi_1(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots y_n,\ z_n) \\ q_2 = \chi_2(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots y_n,\ z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_\varkappa = \chi_\varkappa(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots y_n,\ z_n) \end{array}\right\}; \ldots \quad \textbf{(525)}$$

рѣшивъ равенства (525) и уравненія (491, 1)....(491, p) относительно декартовыхъ координатъ, получимъ выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \theta_1(q_1,\ q_2, \ldots q_\varkappa,\ t) \\ y_1 = \theta_2(q_1,\ q_2, \ldots q_\varkappa,\ t) \\ z_1 = \theta_3(q_1,\ q_2, \ldots q_\varkappa,\ t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \theta_{3n}(q_1,\ q_2, \ldots q_\varkappa,\ t) \end{array}\right\}; \ldots \quad \textbf{(526)}$$

время войдетъ въ эти выраженія изъ уравненій связей.

Слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ опредѣленіе 3-го свойства координатныхъ параметровъ должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Каждая совокупность опредѣленныхъ значеній координатныхъ параметровъ $q_1,\ q_2, \ldots q_\varkappa$ вполнѣ опредѣляетъ положеніе системы точекъ въ пространствѣ въ каждый моментъ времени.

V-72.

Замѣчанія B и C относятся и къ этимъ случаямъ, ихъ можно выразить такъ:

B′) Если число координатныхъ параметровъ равно $\kappa = (3n - p)$, то-есть, числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, то всѣ эти координатные параметры суть перемѣнныя независимыя, то-есть, они не должны быть связаны между собою никакими равенствами и могутъ получать всякія значенія независимо другъ отъ друга.

Пр. 349 C′) *Первыя части уравненій* (491, 1)....(491, p) *связей, по подстановленіи въ нихъ функцій* θ (526) *вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обращаться въ нуль тождественно, то-есть, при всякихъ значеніяхъ координатныхъ параметровъ и для всякаго значенія* t.

Число координатныхъ параметровъ можетъ быть болѣе κ (пусть число ихъ будетъ s), но тогда они должны быть связаны между собою и съ временемъ $(s - \kappa)$ уравненіями, или, иначе сказать, $(s - \kappa)$ координатныхъ параметровъ должны выражаться функціями времени и остальныхъ κ независимыхъ параметровъ; за независимые могутъ быть приняты любые изъ числа всѣхъ s координатныхъ параметровъ.

Положимъ, что координатные параметры $q_1, q_2, \dots q_s$, число которыхъ болѣе κ, но меньше $3n$, выражены данными функціями декартовыхъ координатъ; пусть (521) суть эти выраженія.

Раздѣлимъ уравненія (491, 1)....(491, p) на двѣ группы I и E; группа I заключаетъ въ себѣ которыя либо $(3n - s)$ изъ числа уравненій связей, остальныя $(s - \kappa)$ уравненій образуютъ группу E.

Рѣшимъ равенства (521) вмѣстѣ съ уравненіями группы I относительно декартовыхъ координатъ; получимъ выраженія этихъ координатъ въ функціяхъ времени и координатныхъ параметровъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \vartheta_1(q_1, q_2, \dots q_s, t) \\ y_1 = \vartheta_2(q_1, q_2, \dots q_s, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = \vartheta(q_1, q_2, \dots q_s, t) \end{array}\right\} \dots\dots \quad (527)$$

D′) Уравненія группы I, по подстановленіи въ нихъ выраженій (527) вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обратиться въ *тождества*, то-

есть, первыя части ихъ должны быть равны нулю при всякихъ значеніяхъ t, q_1, q_2, ... q_s, каковы бы эти значенія ни были; уравненія же группы E обращаются помощью выраженій (527) въ *уравненія*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ.

Приведенныя здѣсь разсужденія и замѣчанія справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ вторыя части выраженій (521) и (525) заключаютъ время.

§ 73. Дифференціальныя уравненія Лагранжа.

Въ § 71 было объяснено, что изъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (517) можно исключить всѣ множители λ и получить $н = (3n - p)$ дифференціальныхъ уравненій со столькимъ же числомъ искомыхъ функцій времени; эти функціи суть тѣ декартовы координаты, которыя приняты за независимыя.

Если декартовы координаты могутъ быть выражены функціями (526) времени и $н$ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, ... $q_н$ и мы желаемъ ввести послѣдніе вмѣсто декартовыхъ координатъ въ дифференціальныя уравненія движенія, то мы можемъ это сдѣлать въ тѣхъ $н$ дифференціальныхъ уравненіяхъ, о которыхъ говорили выше и въ § 71.

Поступая такимъ образомъ, намъ придется произвести по крайней мѣрѣ два процесса: процессъ исключенія множителей λ и процессъ преобразованія координатъ; оба эти процесса могутъ быть весьма сложны, а потому мы покажемъ Лагранжевъ пріемъ полученія $н$ дифференціальныхъ уравненій движенія въ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, ... $q_н$.

По этому способу процессъ исключенія множителей λ упрощается весьма значительно при помощи соображеній, выводимыхъ на основаніи замѣчанія (C′) предыдущаго параграфа; въ этомъ замѣчаніи сказано, что выраженія (526) обращаютъ уравненія связей (491, 1) .... (491, p) въ *тождества:*

$$в_1[\theta_1(q_1, q_2, \ldots q_н, t), \theta_2(q_1, q_2, \ldots q_н, t), \ldots \ldots \theta_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_н, t)] = 0 \qquad \textbf{(528, 1)}$$

и прочія.

Чтобы не писать длинныхъ формулъ, мы условимся изображать эти тождества такъ:

$$в_1((q_1, q_2, \dots q_n, t)) = 0 \quad (528, 1)$$

$$в_2((q_1, q_2, \dots q_n, t)) = 0 \quad (528, 2)$$

. . . .

$$в_p((q_1, q_2, \dots q_n, t)) = 0. \quad (528, p)$$

Изъ этихъ тождествъ слѣдуютъ ряды другихъ, самый видъ которыхъ укажетъ намъ путь къ преобразованію дифференціальныхъ уравненій (517) для исключенія множителей λ.

Первыя части тождествъ (528) должны быть равны нулю при всякихъ значеніяхъ t и при всякихъ значеніяхъ независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots q_n$; поэтому, если придадимъ этимъ перемѣннымъ какія-угодно значенія, а затѣмъ дадимъ параметру q_1 какое-либо весьма малое приращеніе δq_1, положительное или отрицательное, произвольнаго порядка малости, то будемъ имѣть, между прочимъ:

$$в_1((q_1, q_2, \dots q_n, t)) = 0,$$

$$в_1((q_1 + \delta q_1, q_2, \dots q_n, t)) = 0,$$

гдѣ величинамъ $t, q_1, q_2, \dots q_n$ мы придаемъ тѣ же самыя значенія въ обоихъ видахъ тождества.

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\frac{\partial в_1((q_1, q_2, \dots q_n, t))}{\partial q_1} = 0$$

при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $t, q_1, q_2, \dots q_n$, то-есть,— тождественно.

Примѣняя тѣ же разсужденія къ каждой изъ перемѣнныхъ $q_1, q_2, \dots q_n$ и къ каждой изъ функцій $в_1, в_2, \dots в_p$, получимъ np тождествъ вида:

$$\frac{\partial в_j((q_1, q_2, \dots q_n, t))}{\partial q_k} = 0, \dots \quad (529, j, k)$$

гдѣ j есть которое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3, ... p,

а k есть которое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3, ... n.

Эти же тождества можно представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\theta_j}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial\theta_j}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=0; \; \ldots\ldots \quad \mathbf{(530, j, k)}$$

гдѣ декартовы координаты выражены по формуламъ (526) функціями отъ t, q_1, q_2, ... q_n.

Самый видъ первыхъ частей тождества (530) показываетъ, что для исключенія величинъ λ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) должно поступить слѣдующимъ образомъ.

Замѣнивъ въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ (517) декартовы координаты ихъ выраженіями (526), надо помножить каждое изъ нихъ на производную отъ соотвѣтственной декартовой координаты по q_k (эти производныя получаются изъ выраженій (526)) и полученныя равенства сложить; въ силу тождествъ (530), результатъ этихъ дѣйствій не будетъ заключать величинъ λ и будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+y_i''\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+z_i''\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=Q_k, \; \ldots\ldots \quad \mathbf{(531,\ k)}$$

гдѣ:

$$Q_k=\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right); \; \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(532,\ k)}$$

здѣсь k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, . . . n, а потому мы будемъ имѣть n уравненій вида (531).

Въ полученныхъ уравненіяхъ (531) декартовы координаты должны быть выражены по формуламъ (526), а первыя производныя декартовыхъ координатъ по времени должны быть замѣнены выраженіями:

$$x_1'=\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\frac{\partial\theta_1}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial\theta_1}{\partial q_2}q_2'+\ldots\ldots+\frac{\partial\theta_1}{\partial q_n}q_n',$$

и проч.; эти выраженія мы будемъ писать подъ слѣдующимъ видомъ, напримѣръ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_n}q_n'\\ \frac{dy_i}{dt}&=y_i'=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_n}q_n'\\ \frac{dz_i}{dt}&=z_i'=\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_n}q_n'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(533,\ i)$$

Подъ видомъ заключающихся здѣсь частныхъ производныхъ отъ декартовыхъ координатъ по времени должно всегда подразумѣвать частныя производныя по t отъ соотвѣтствующихъ функцій θ и не слѣдуетъ смѣшивать ихъ съ полными производными x_i', y_i', z_i', выражающими проэкціи на оси координатъ скоростей матерьяльныхъ точекъ.

Вмѣсто составленія выраженій для производныхъ x_i'', y_i'', z_i'', произведемъ слѣдующія преобразованія въ первыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Каждый изъ членовъ первой части уравненія (531, k) можно преобразовать такъ:

$$m_i x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=\frac{d\left(m_i x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt}-m_i x_i'\frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt};$$

а поэтому дифференціальное уравненіе (531, k) можно представить подъ видомъ:

$$\frac{dp_k}{dt}-G_k=Q_k,$$

гдѣ:

$$p_k=\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\ldots\ldots(534,\ k)$$

$$G_k=\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{d\partial x_i}{dt\partial q_k}+y_i'\frac{d\partial y_i}{dt\partial q_k}+z_i'\frac{d\partial z_i}{dt\partial q_k}\right).$$

Теперь намъ придется выразить p_k и G_k въ координатныхъ параметрахъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ и въ производныхъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$.

Изъ выраженій (533) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k};$$

а потому p_k можетъ быть приведено къ виду частной производной по q_k':

$$p_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k'}$$

отъ выраженія суммы живыхъ силъ системы точекъ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2 \right] \ldots \mathbf{(535)}$$

въ координатныхъ параметрахъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ и въ ихъ производныхъ по времени.

Сумма живыхъ силъ точекъ системы называется *живою силою* этой системы; выраженіе ея въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени (это выраженіе легко получить изъ (535) при помощи выраженій (533)) можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$T = T(0) + T(1) + T(2); \ldots\ldots\ldots \mathbf{(535, a)}$$

$T(0)$ есть сумма членовъ, не заключающихъ производныхъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$:

$$T(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]; \ldots\ldots \mathbf{(536)}$$

$T(1)$ есть однородная линейная фукнція относительно производныхъ отъ координатныхъ параметровъ по времени:

$$T(1) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k q_k', \ldots\ldots\ldots \mathbf{(537)}$$

Ў-73.

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right]; \ldots . \text{(537, bis)}$$

$T(2)$ есть однородная квадратичная функція относительно тѣхъ же производныхъ:

$$T(2) = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{e=n} q_e' \sum_{k=1}^{k=n} a_{ke} q_k' \ldots\ldots\ldots \text{(538)}$$

$$a_{ek} = a_{ke} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_e} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_e} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_e}\right] \ldots\ldots \text{(538, bis)}$$

Производныя втораго порядка, заключающіяся въ суммѣ G_k, могутъ быть представлены какъ частныя производныя по q_k отъ скоростей x_i', y_i', z_i', выраженныхъ по формуламъ (533) въ функціяхъ отъ t, q_1, q_2, ... q_n, q_1', ... q_n'; въ самомъ дѣлѣ, составимъ выраженіе полной производной отъ $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ по t:

$$\frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_k} q_n';$$

съ другой стороны изъ выраженій (533) можемъ получить слѣдующее выраженіе для частной производной отъ x_i' по q_k:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_n} q_n';$$

сравнивъ между собою вторыя части этихъ равенствъ, мы заключимъ, что:

$$\frac{d\partial x_i}{dt \partial q_k} = \frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_k}.$$

Поэтому сумма G_k есть частная производная отъ T по q_k:

$$G_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Такимъ образомъ мы получимъ n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\ \frac{dp_2}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\ \ldots\ \frac{dp_n}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_n}=Q_n,\ \ldots\ldots \quad \mathbf{(531)}$$

гдѣ:

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'},\ p_2=\frac{\partial T}{\partial q_2'},\ \ldots\ p_n=\frac{\partial T}{\partial q_n'},\ \ldots\ldots \quad \mathbf{(539)}$$

называемыхъ *дифференціальными уравненіями Лагранжа* *).

$Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ суть суммы вида (532), выраженныя въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени.

Лагранжевъ способъ преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія можетъ быть примѣненъ также и въ тѣхъ случаяхъ, когда декартовы координаты выражены функціями (527) (§ 72) времени и s координатныхъ параметровъ (s менѣе $3n$ и болѣе n) такимъ образомъ, что выраженія (527) обращаютъ $(3n-s)$ уравненія связей въ тождества; тогда Лагранжево преобразованіе приводитъ къ s совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, заключающимъ $(s-n)$ множителей λ.

Положимъ, что уравненія группы I (см. замѣчаніе (D') въ концѣ параграфа 72-го) суть:

$$в_1=0,\ в_2=0,\ в_3=0,\ \ldots\ в_g=0, \qquad \mathbf{(I)}$$

гдѣ $g=3n-s$; остальныя изъ уравненій (491, 1) .... (491, p) образуютъ группу E:

$$в_{g+1}=0,\ в_{g+2}=0,\ \ldots\ в_p=0. \qquad \mathbf{(E)}$$

Выраженія (527) обращаютъ первыя части уравненій группы I въ нуль тождественно при всякихъ значеніяхъ $t, q_1, q_2, \ldots q_s$, даже при такихъ значеніяхъ, которыя не удовлетворяютъ уравненіямъ группы E; поэтому, разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ началѣ настоящаго параграфа, то-есть, разсматривая всѣ координатные параметры $q_1, q_2, q_3, \ldots q_s$ такъ,

---

*) Дифференціальныя уравненія (517) также даны Лагранжемъ, поэтому совокупность (531) слѣдуетъ называть *второю формою Лагранжевыхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ*, какъ ихъ называетъ Якоби.

Y-73.

какъ будто бы они были независимы другъ отъ друга, получимъ sg тождествъ слѣдующаго вида:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_j((q_1, q_2, \dots q_s, t))}{\partial q_k} = 0,$$

гдѣ j есть которое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3,....g,

а k есть которое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3,....s.

Равенства же, въ которыя обращаются уравненія группы E, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{v}_{g+1}((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \\ \mathfrak{v}_{g+2}((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{v}_p((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \end{array}\right\} \dots \text{(E) (540)}$$

суть *уравненія*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ, то-есть, дѣлающія ($s—\kappa$) параметровъ зависимыми отъ остальныхъ; такъ что, если слѣдующія значенія величинъ t, q_1, q_2,...q_s:

$$t = \tau,\ q_1 = k_1,\ q_2 = k_2, \dots q_s = k_s,$$

удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ (540), то значенія:

$$t = \tau,\ k_1 + \delta q_1,\ k_2, \dots k_s$$

могутъ и не удовлетворять имъ, а потому частныя производныя:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_{g+1}}{\partial q_1},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_{g+2}}{\partial q_1}, \dots\dots \frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial q_1}$$

могутъ быть неравными нулю при значеніяхъ величинъ t, q_1, q_2,...q_s, удовлетворяющихъ уравненіямъ (540); то же самое должно сказать и о частныхъ производныхъ этихъ функцій по прочимъ координатнымъ параметрамъ.

Легко теперь видѣть, что, примѣняя къ разсматриваемымъ случаямъ Лагранжево преобразованіе, мы получимъ s совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \lambda(\mathfrak{v}_{g+1})\frac{\partial \mathfrak{v}_{g+1}}{\partial q_k} + \dots \lambda(\mathfrak{v}_p)\frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial q_k}, \dots \text{(541,k)}$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, ... s; въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ осталось (s—$\varkappa$) множителей:

$$\lambda(\text{в}_{g+1}),\ \lambda(\text{в}_{g+2}),\ \ldots\ldots \lambda(\text{в}_p).$$

Для поясненія сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ составленія дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Вмѣсто перваго примѣра мы укажемъ на примѣненіе Лагранжевыхъ уравненій къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки въ сферическихъ координатахъ; въ этомъ случаѣ $n=1$, $p=0$, $\varkappa=3$, $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=\psi$,

$$x = r\cos\psi\sin\varphi,\ \ y = r\sin\psi\sin\varphi,\ \ z = r\cos\varphi,$$

$$Q_1=F\cos(F,\ \alpha),\ \ Q_2=rF\cos(F,\ \beta),\ \ Q_3=r\sin\varphi F\cos(F,\ \gamma),$$

гдѣ α, β и γ суть направленія координатныхъ осей сферическихъ координатъ, а F есть сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ; составивъ Лагранжевы дифференціальныя уравненія, получимъ уравненія (38) (страница 42), помноженныя: второе — на r и третье — на $r\sin\varphi$.

Подобнымъ же образомъ можно примѣнить Лагранжевы уравненія къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія точки въ какихъ угодно координатахъ; надо только знать, какъ выражаются декартовы координаты въ новыхъ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, q_3, дальнѣйшія же дѣйствія указываются видомъ Лагранжевыхъ уравненій и формулами, приведенными выше.

Примѣръ 64-й. Система состоитъ изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ m_1 и m_2, связанныхъ удерживающею связью, приведенною въ примѣрѣ 57-мъ (стр. 317); кромѣ того матерьяльная точка m_1 должна постоянно оставаться въ плоскости XY, а точка m_2—на оси Z. Къ точкѣ m_2 приложена только сила тяжести m_2g, къ точкѣ же m_1 не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ и плоскость XY предполагается идеально гладкою; положительная часть оси Zовъ направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ $n=2$, число связей и преградъ равно 4-мъ:

$$r_1+r_2-l=0,\ \ z_1=0,\ \ x_2=0,\ \ y_2=0,$$

такъ что $p=4$ и $\varkappa=2$; примемъ за координатные параметры q_1 и q_2 полярные координаты ρ_1 и θ_1 точки m_1 въ плоскости XY.

Декартовы координаты выразятся въ координатныхъ параметрахъ такъ:

$$x_1=\rho_1\cos\theta_1,\ \ y_1=\rho_1\sin\theta_1,\ \ z_1=0,\ \ x_2=0,\ \ y_2=0,\ \ z_2=l-\rho_1.$$

Живая сила системы:

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left(\rho_1{}'\right)^2+\frac{1}{2}\,m_1\rho_1{}^2\left(\theta_1{}'\right)^2.$$

Лагранжевы дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ слѣдующія:

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\rho_1}{dt^2}-m_1\rho_1\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2=-m_2 g,$$

$$m_1\frac{d(\rho_1{}^2\theta_1{}')}{dt}=0.$$

Примѣръ 65-й. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ точекъ m_1 и m_2; первая находится въ постоянномъ разстояніи L отъ начала координатъ, а вторая — въ постоянномъ разстояніи l отъ первой; кромѣ того, предположимъ, что обѣ точки остаются въ одной вертикальной плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть эта плоскость есть плоскость XY и ось Y направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ число точекъ равно двумъ, а число преградъ и связей—четыремъ, поэтому $n=2$.

Означимъ черезъ φ_1 и φ_2 углы, составляемые направленіями $\overline{OM_1}$ и $\overline{M_1M_2}$ съ осью Y, и примемъ эти углы за координатные параметры системы.

Выраженія (526) будутъ здѣсь слѣдующія:

$$x_1=L\sin\varphi_1,\quad x_2=L\sin\varphi_1+l\sin\varphi_2$$
$$y_1=L\cos\varphi_1,\quad y_2=L\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2$$
$$z_1=0,\qquad z_2=0.$$

Живая сила системы:

$$T=\frac{(m_1+m_2)}{2}L^2(\varphi_1{}')^2+\frac{m_2}{2}l^2(\varphi_2{}')^2+m_2Ll\varphi_1{}'\varphi_2{}'\cos(\varphi_2-\varphi_1);$$
$$p_1=(m_1+m_2)L^2\varphi_1{}'+m_2Ll\varphi_2{}'\cos\omega,$$
$$p_2=m_2l^2\varphi_2{}'+m_2Ll\varphi_1{}'\cos\omega;\ (\varphi_2-\varphi_1)=\omega.$$

Два дифференціальныя уравненія будутъ:

$$(m_1 + m_2)L^2\varphi_1'' + m_2 Ll\frac{d(\varphi_2'\cos\omega)}{dt} - m_2 Ll\varphi_1'\varphi_2'\sin\omega =$$

$$= -(m_1 + m_2)Lg\sin\varphi_1$$

$$m_2 l^2\varphi_2'' + m_2 Ll\frac{d(\varphi_1'\cos\omega)}{dt} + m_2 Ll\varphi_1'\varphi_2'\sin\omega = -m_2 lg\sin\varphi_2.$$

Примѣръ 66-й. Система состоитъ изъ четырехъ матерьяльныхъ точекъ M_1, M_2, M_3, M_4, связанныхъ попарно идеально-твердыми стержнями M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1 одинаковой длины l; всѣ точки притягиваются къ началу координатъ силами, прямопропорціональными разстояніямъ отъ него и массамъ ихъ; кромѣ этого, предположимъ, что всѣ точки остаются въ плоскости XY и что массы точекъ, находящихся на противолежащихъ вершинахъ ромба $M_1M_2M_3M_4$, равны между собою: $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$.

Здѣсь $n = 4$; за координатные параметры возьмемъ: полярныя координаты ρ_c, θ_c центра C ромба, разстояніе $\xi = CM_1$ точки M_1 отъ этого центра и уголъ ϑ, составляемый направленіемъ CM_1 съ осью $X^{\text{овъ}}$; разстояніе η_2 точки M_2 отъ точки C равно корню квадратному изъ разности $(l^2 - \xi^2)$ и направленіе CM_2 составляетъ съ осью $X^{\text{овъ}}$ уголъ $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$.

Живая сила этой системы выражается такъ:

$$T = (m_1 + m_2)\Big[(\rho_c')^2 + \rho_c^2(\theta_c')^2\Big] + \Big(m_2 l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2\Big)(\vartheta')^2 +$$

$$+ \frac{m_1 l^2 - (m_1 - m_2)\xi^2}{l^2 - \xi^2}(\xi')^2.$$

Дифференціальныя уравненія движенія (по сокращеніи общихъ множителей) будутъ:

$$\rho_c'' - \rho_c(\theta_c')^2 = -\mu\rho_c;\quad \frac{d}{dt}(\rho_c^2\theta_c') = 0;$$

$$\frac{m_1 l^2 - (m_1 - m_2)\xi^2}{l^2 - \xi^2}\xi'' + \frac{m_2 l^2\xi}{(l^2 - \xi^2)^2}(\xi')^2 - (m_1 - m_2)\xi(\vartheta')^2 =$$

$$= -\mu(m_1 - m_2)\xi;$$

$$\frac{d[(m_2 l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2)\vartheta']}{dt} = 0.$$

Примѣчаніе I. Число n независимыхъ декартовыхъ координатъ или независимыхъ координатныхъ параметровъ системы точекъ называется *числомъ степеней свободы этой системы:* такъ, свободная матерьяльная точка имѣетъ въ пространствѣ три, а на какой-либо поверхности — двѣ степени свободы, въ примѣрахъ 64 и 65-мъ число степеней свободы равно двумъ, а въ примѣрѣ 66 — четыремъ.

Примѣчаніе II. Суммы:

см. пр. 532

$$X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

могутъ имѣть измѣренія силъ ((29) стр. 27) только въ исключительныхъ случаяхъ, а не вообще; поэтому первыя части Лагранжевыхъ уравненій не всегда имѣютъ измѣреніе произведенія изъ массы на ускореніе.

§ 74. Гамильтонова форма дифференціальныхъ уравненій движенія.

Лагранжевы уравненія (531), подобно всякой совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка, могутъ быть приведены къ совокупности двойнаго числа обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двойнымъ же числомъ искомыхъ функцій времени.

Для этого, принявъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$ за новыя искомыя функціи, надо замѣнить, въ уравненіяхъ (531), вторыя производныя $q_1'', q_2'', \ldots q_n''$ — первыми производными отъ новыхъ перемѣнныхъ; послѣ этого дифференціальныя уравненія (531) вмѣстѣ съ n дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \ \frac{dq_2}{dt} = q_2', \ \ldots \ \frac{dq_n}{dt} = q_n'$$

образуютъ совокупность $2n$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ $2n$ искомыми функціями времени: $q_1, q_2, \ldots q_n, q_1', q_2', \ldots q_n'$.

Если же принять величины $p_1, p_2, \ldots$ за новыя искомыя функціи, какъ сдѣлалъ Пуассонъ, то можно получить весьма сим-

метричную форму совокупности $2н$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, найденную Гамильтономъ.

Для этого надо прежде всего выразить производныя q_k' въ функціяхъ отъ величинъ p_k.

По формуламъ (539), (535, a), (537) и (538) вторыя выражаются слѣдующими линейными функціями первыхъ:

$$p_k = \alpha_k + a_{1k}q_1' + a_{2k}q_2' + \ldots + a_{нk}q_н'; \quad \ldots\ldots (542, \mathbf{k})$$

k есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... $н$.

Рѣшивъ эти $н$ равенствъ относительно величинъ q_1', q_2', ..., получимъ требуемыя выраженія; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_j' = \beta_j + h_{1j}p_1 + h_{2j}p_2 + \ldots + h_{нj}p_н, \quad \ldots\ldots (543, \mathbf{j})$$

гдѣ j есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... $н$.

Коэффиціенты h и β (съ различными значками внизу) выражаются въ коэффиціентахъ a и α, и обратно; зависимость между тѣми и другими представляется рядомъ равенствъ, которыя слѣдуютъ изъ тождествъ, получающихся при подстановленіи выраженій (542) величинъ p_1, p_2, ... $p_н$ въ равенства (543); эта зависимость—слѣдующая:

$$\beta_j = -(\alpha_1 h_{1j} + \alpha_2 h_{2j} + \ldots + \alpha_н h_{нj}) \quad \ldots\ldots (544, \mathbf{j})$$

$$h_{1j}a_{1j} + h_{2j}a_{2j} + \ldots + h_{нj}a_{нj} = 1 \quad \ldots\ldots (545, \mathbf{jj})$$

$$h_{1j}a_{1k} + h_{2j}a_{2k} + \ldots + h_{нj}a_{нk} = 0\,, \quad \ldots\ldots (545, \mathbf{jk})$$

гдѣ j есть каждое изъ чиселъ 1, 2, ... $н$; k—одно изъ тѣхъ же чиселъ, но неравное j; конечно: $h_{kj} = h_{jk}$.

Подставивъ выраженія (543) вмѣсто величинъ q_k' въ выраженіе (535, a) живой силы, получимъ другое выраженіе ея, въ функціи отъ t, q_1, q_2, ... $q_н$, p_1, p_2, ... $p_н$; это новое выраженіе живой силы, *союзное* первому, мы будемъ обозначать буквою $\mathfrak{T}$ и будемъ называть *вторымъ союзнымъ выраженіемъ живой силы*.

Чтобы вывести это выраженіе, помножимъ первое изъ равенствъ (542) ($k=1$) на q_1', второе ($k=2$)—на q_2', и т. д. и сложимъ полученные результаты, получится:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' = T(1) + 2\,T(2);$$

придавъ же къ обѣимъ частямъ этого равенства сумму $[T(1) + 2\,T(0)]$, получимъ:

$$2\,T = \sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' + T(1) + 2\,T(0) \; \ldots\ldots \; \textbf{(535, b)}$$

Если во второй части этого выраженія замѣнить величины q_k' ихъ выраженіями (543), то она получитъ форму второго союзнаго выраженія удвоенной живой силы.

Сначала преобразуемъ выраженіе $T(1)$:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j q_j' = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j + \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \sum_{k=1}^{k=n} h_{kj} p_k;$$

если во второмъ членѣ перемѣнимъ порядокъ суммованія и примемъ во вниманіе равенства (544), то будемъ имѣть:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j - \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k \; \ldots\ldots \; \textbf{(546)}$$

Далѣе:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{e=1}^{e=n} h_{ke} p_e;$$

поэтому изъ выраженія (535, b) окажется, что второе союзное выраженіе живой силы имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(2) + \mathfrak{T}(0), \; \ldots\ldots\ldots \; \textbf{(535, c)}$$

гдѣ:

$$\mathfrak{T}(2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=n} h_{k\epsilon} p_\epsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(547)}$$

$$\mathfrak{T}(0)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \beta_k + T(0) \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(548)}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что вторая союзная форма выраженія живой силы состоитъ изъ двухъ частей, одна изъ которыхъ не заключаетъ величинъ p_k, другая же есть однородная функція второй степени относительно этихъ величинъ.

Изъ выраженій (543), (535, c), (547), (548) слѣдуетъ, что $q_k{}'$ могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$q_k{}'=\beta_k+\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_k}, \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(549, k)}$$

а кромѣ того, если еще введемъ въ наши формулы слѣдующую сумму:

$$S=\sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(550)}$$

то $q_k{}'$ выразится въ видѣ частной производной по p_k:

$$q_k{}'=\frac{\partial(\mathfrak{T}+S)}{\partial p_k} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(549, k, bis)}$$

Частныя производныя отъ T по q_k могутъ быть тоже выражены помощью частныхъ производныхъ отъ $\mathfrak{T}$ и S; для этого мы составимъ два слѣдующія выраженія.

Если въ $\mathfrak{T}$ подставить, вмѣсто $p_1, p_2, \ldots p_n$, выраженія (542), то $\mathfrak{T}$ обратится T; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_k}+\sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=n}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_\epsilon}\frac{\partial p_\epsilon}{\partial q_k}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(551)}$$

здѣсь, подъ частными производными отъ $p_1, p_2, \ldots$ по q_k, подразумѣваются частныя производныя, получаемыя изъ выраженій (542).

Затѣмъ, если во второй части равенства:

$$2T = \sum_{e=1}^{e=n} q'_e p_e - S + 2\mathfrak{T}(0). \quad \ldots \quad (535, \mathrm{d})$$

замѣнить величины $p_1, p_2, \ldots$ ихъ выраженіями (542), то вторая часть приметъ видъ, тождественный виду первой части; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$2\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{e=1}^{e=n} q'_e \frac{\partial p_e}{\partial q_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} - \sum_{e=1}^{e=n} \beta_e \frac{\partial p_e}{\partial q_k} + 2\frac{\partial \mathfrak{T}(0)}{\partial q_k},$$

которое, на основаніи выраженій (549), можно еще представить такъ:

$$2\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{e=1}^{e=n} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_e}\frac{\partial p_e}{\partial q_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} + 2\frac{\partial \mathfrak{T}(0)}{\partial q_k}.$$

Вычтя изъ него равенство (551) получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial(\mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0))}{\partial q_k} \quad \ldots\ldots \quad (552, \mathrm{k})$$

Къ этому должно прибавить, что, такъ какъ $\mathfrak{T}(0)$ не заключаетъ въ себѣ величинъ $p_1, p_2, \ldots$, то выраженія (549, k, bis) можно представить такъ:

$$q_k' = \frac{\partial(\mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0))}{\partial p_k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (553, \mathrm{k})$$

Изъ всего выведеннаго и сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены слѣдующею совокупностью $2n$ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1} + Q_1; & \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_1}; \\
\dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_2} + Q_2; & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_2}; \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\dfrac{dp_n}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_n} + Q_n; & \dfrac{dq_n}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_n};
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (554)$$

гдѣ Φ есть функція отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$:

$$\Phi = \mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(555)}$$

значенія величинъ $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}(0)$ и S выражаются формулами (535, c), (547), (548), (544), (545), (536); Q_k (532) должны быть выражены функціями отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$.

Эти уравненія мы будемъ называть *Гамильтоновыми совокупными дифференціальными уравненіями.*

Такъ какъ $T = \mathfrak{T}$, то изъ равенства (535, d) окажется, что

$$\mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0) = \sum_{e=1}^{e=n} p_e q_e' - \mathfrak{T},$$

а потому, если q_e' будутъ выражены въ $p_1, p_2, \ldots p_n$, то Φ можетъ быть представлена подъ видомъ:

$$\Phi = \sum_{e=1}^{e=n} p_e q_e' - \mathfrak{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(556)}$$

§ 75. Возможныя варьяціи положеній данной системы точекъ; возможныя варьяціи координатъ и координатныхъ параметровъ.

Въ слѣдующихъ главахъ намъ придется весьма нерѣдко, при перемѣнѣ координатныхъ параметровъ, преобразовывать дифференціальныя уравненія движенія изъ одной формы въ другую; такія преобразованія значительно упрощаются тѣмъ, что вся совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ можетъ быть заключена въ одно уравненіе, надъ которымъ процессы преобразованія совершаются скорѣе и проще, чѣмъ надъ отдѣльными дифференціальными уравненіями.

Въ составъ этого уравненія, которое выведемъ въ слѣдующемъ параграфѣ, войдутъ нѣкоторыя весьма малыя величины, о которыхъ дадимъ понятіе въ настоящемъ параграфѣ.

Пусть имѣемъ систему n матерьяльныхъ точекъ, подчиненныхъ p связямъ, выражаемымъ уравненіями (491, 1) . . . . (491, p) (§ 70); положимъ, что время входитъ въ эти уравненія явнымъ образомъ.

Если $3n$ болѣе p, то $\kappa = (3n - p)$ декартовыхъ координатъ суть величины независимыя и произвольныя. При всякомъ значенiи t мы можемъ придать κ декартовымъ координатамъ произвольныя значенiя, а значенiя остальныхъ $3n - \kappa = p$ координатъ опредѣлить изъ p уравненiй связей; полученная такимъ образомъ система значенiй декартовыхъ координатъ опредѣлитъ одну изъ *совокупностей положенiй точекъ, возможную* въ моментъ t; понятно, что число различныхъ совокупностей положенiй системы точекъ, возможныхъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени, безконечно велико.

Возьмемъ двѣ какiя-либо *весьма близкiя* совокупности положенiй точекъ, возможныя въ одинъ и тотъ же моментъ t времени; пусть

$$M_1,\ M_2, \ldots . M_i, \ldots . M_n \qquad \text{(I)}$$

суть положенiя, занимаемыя точками

$$m_1,\ m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n$$

въ первой совокупности, а

$$M_1',\ M_2', \ldots . M_i', \ldots . M_n' \qquad \text{(II)}$$

положенiя, занимаемыя точками во второй совокупности положенiй; пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . x_n, y_n, z_n$ суть декартовы координаты положенiй $M_1,\ M_2, \ldots . M_i, \ldots . M_n$; декартовы же координаты положенiй совокупности (II) означимъ такъ:

$$x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2, \ldots . x_i + \delta x_i, \ldots . x_n + \delta x_n$$

$$y_1 + \delta y_1,\ y_2 + \delta y_2, \ldots . y_i + \delta y_i, \ldots . y_n + \delta y_n$$

$$z_1 + \delta z_1,\ z_2 + \delta z_2, \ldots . z_i + \delta z_i, \ldots . z_n + \delta z_n.$$

Говоря, что эти двѣ совокупности положенiй весьма близки, мы подразумѣваемъ, что разстоянiя

$$\overline{M_1M_1'},\ \overline{M_2M_2'}, \ldots . \overline{M_iM_i'}, \ldots . \overline{M_nM_n'} \ldots \qquad \text{(557)}$$

суть ничтожно-малыя длины произвольной степени малости; поэтому и проэкціи ихъ на оси координатъ, то-есть, величины:

$$\left.\begin{matrix} \delta x_1, & \delta x_2, \ldots \delta x_i, \ldots \delta x_n \\ \delta y_1, & \delta y_2, \ldots \delta y_i, \ldots \delta y_n \\ \delta z_1, & \delta z_2, \ldots \delta z_i, \ldots \delta z_n \end{matrix}\right\} \ldots \ldots \quad \textbf{(558)}$$

суть также ничтожно-малыя длины произвольной степени малости.

Координаты какъ первой, такъ и второй совокупности положеній точекъ системы должны удовлетворять уравненіямъ связей; напримѣръ, должны быть удовлетворены слѣдующія два равенства

$$\text{в}_1(x_1,\ y_1, \ldots z_n,\ t) = 0, \ \ldots \quad \textbf{(491, 1)}$$

$$\text{в}_1(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1, \ldots z_n + \delta z_n,\ t) = 0, \ldots \quad \textbf{(491, 1, bis)}$$

гдѣ t имѣетъ одно и то же значеніе въ обоихъ уравненіяхъ.

Разложивъ первую часть уравненія (491, 1, bis) по восходящимъ степенямъ величинъ (558), принявъ во вниманіе уравненіе (491, 1) и имѣя въ виду ничтожную малость величинъ (558), должны будемъ заключить, что величины эти должны удовлетворять уравненію

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \ \ldots \quad \textbf{(559, 1)}$$

при всякихъ значеніяхъ величинъ t, x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_n, удовлетворяющихъ уравненіямъ связей (491, 1), ... (491, p).

Для краткости, условимся обозначать первую часть равенства (559, 1) знакомъ $\delta\text{в}_1$.

Такимъ образомъ мы найдемъ, что величины (558) должны удовлетворять p слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\delta\text{в}_1 = 0,\ \delta\text{в}_2 = 0,\ \delta\text{в}_3 = 0, \ldots \delta\text{в}_p = 0 \ldots \quad \textbf{(559)}$$

при всякихъ значеніяхъ t и при всякихъ такихъ значеніяхъ коорди-

V-75.

нать x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_n, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (491, 1), ... (491, p) связей; здѣсь $\delta\vartheta_k$ означаетъ слѣдующую сумму:

$$\delta\vartheta_k = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\vartheta_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\vartheta_k}{\partial z_i}\delta z_i\right) \ldots\ldots \quad (560)$$

Весьма малыя величины (558), удовлетворяющія уравненіямъ (559), называются *возможными варьяціями координатъ данной системы точекъ.* при неизменном значении t.

Весьма малыя длины (557), проэкціи которыхъ на координатныя оси суть возможныя варьяціи координатъ, могутъ быть названы *возможными варьяціями положеній точекъ системы*; величины и направленія этихъ варьяцій мы будемъ обозначать буквами ε съ надлежащими значками внизу; такимъ образомъ знаки:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_i, \ldots \varepsilon_n$$

будутъ означать величины и направленія возможныхъ варьяцій положеній точекъ

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n.$$

Такъ какъ:

$$\delta x_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, X),\ \delta y_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, Y),\ \delta z_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, Z), \ldots \quad (561)$$

то уравненія (559) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

см. 503 стр. 315

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i\vartheta_1) \cos(P_i\vartheta_1, \varepsilon_i) = 0, \ldots \quad (559, 1, \text{bis})$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i\vartheta_2) \cos(P_i\vartheta_2, \varepsilon_i) = 0, \ldots \quad (559, 2, \text{bis})$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i\vartheta_p) \cos(P_i\vartheta_p, \varepsilon_i) = 0. \ldots \quad (559, p, \text{bis})$$

Число варьяцій координатъ равняется числу координатъ.

E) Если всѣ точки системы свободны, не подлежатъ никакимъ преградамъ или связямъ, то всѣ $3n$ варьяцій координатъ *произвольны и независимы*, то-есть, каждая изъ нихъ, независимо отъ прочихъ, можетъ имѣть произвольный знакъ и произвольную весьма малую величину; варьяціи положеній свободныхъ точекъ могутъ имѣть, совершенно независимо одна отъ другой, произвольныя направленія и произвольныя весьма малыя величины.

F) Каждая удерживающая связь ограничиваетъ независимость варьяцій координатъ системы точекъ, связывая ихъ между собою однимъ уравненіемъ вида (559); если число этихъ связей есть p, то только $н=(3n-p)$ варьяцій координатъ независимы и произвольны, прочія же p варьяцій координатъ выражаются изъ p уравненій (559) линейными однородными функціями первыхъ. Число независимыхъ варьяцій координатъ равняется числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, то-есть, числу степеней свободы системы точекъ.

Существованіе неудерживающей связи:

$$\text{в}(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2, \ldots . z_n,\ t) \geqslant 0 \ldots \ldots \quad \mathbf{(492)}$$

между точками системы подчиняетъ варьяціи координатъ нѣкоторому условію при тѣхъ положеніяхъ точекъ, при которыхъ координаты ихъ обращаютъ в въ нуль или въ ничтожно-малую положительную величину:

Когда координаты $x_1, y_1, z_1, \ldots . z_n$ удовлетворяютъ равенству $\text{в}=0$, тогда варьяціи координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \text{в}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial \text{в}}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial \text{в}}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqslant 0 \ldots . \quad \mathbf{(562)}$$

Когда координаты точекъ, удовлетворяя неравенству $\text{в}>0$, дѣлаютъ функцію в равною какой-либо ничтожно-малой положительной величинѣ α, тогда варьяціи координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\delta \text{в} \geqslant (-\alpha).$$

Если же координаты точекъ, удовлетворяя неравенству $\text{в} > 0$, дѣлаютъ функцію в равною какой-либо не малой положительной величинѣ, то варьяціи координатъ не подлежатъ тогда никакому ограниченію со стороны этой неудерживающей связи.

G) Слѣдовательно, каждая неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, подчиняетъ варьяціи координатъ связываемыхъ ею точекъ условію вида (562); это условіе можно еще представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i \text{в}) \cos(P_i \text{в},\ \varepsilon_i) \geqslant 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \textbf{(562 bis)}$$

Если положенія точекъ системы имѣющей n степеней свободы, выражаются помощью n независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots q_n$, то варьяціи послѣднихъ:

$$\delta q_1,\ \delta q_2, \dots \delta q_n \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \textbf{(563)}$$

независимы и произвольны, а возможныя варьяціи декартовыхъ координатъ точекъ выражаются слѣдующими линейными функціями варьяцій (563):

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n}\delta q_n \end{aligned}\right\} \dots \textbf{(564, i)}$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ, 1, 2, ... n.

Если же число s координатныхъ параметровъ болѣе n, то тогда варьяціи этихъ параметровъ связаны между собою $(s-n)$ уравненіями линейными и однородными относительно этихъ варьяцій; если уравненія, связывающія координатные параметры между собою, суть уравненія (540), приведенныя въ § 73-мъ, то возможныя варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_s$ должны удовлетворять слѣдующимъ $(s-n)$ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{r}\delta в_{g+1}((q_1, q_2, \ldots q_s, t)) = 0\\ \delta в_{g+2}((q_1, q_2, \ldots q_s, t)) = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \delta в_p((q_1, q_2, \ldots q_s, t)) = 0\end{array}\right\}; \ldots\ldots \mathbf{(565)}$$

здѣсь первая часть каждаго изъ уравненій представлена символически; напримѣръ, послѣднее уравненіе слѣдовало бы написать такъ:

$$\frac{\partial в_p}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial в_p}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial в_p}{\partial q_s}\delta q_s = 0; \ldots\ldots \mathbf{(565, p)}$$

Возможныя варьяціи декартовыхъ координатъ выразятся линейными функціями возможныхъ варьяцій координатныхъ параметровъ по формуламъ, подобнымъ формуламъ (564).

§ 76. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія точекъ системы.

1. Помножимъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (517) параграфа 70-го на возможную варьяцію соотвѣтственной координаты, то-есть, обѣ части уравненія (517, a, 1) помножимъ на δx_1, обѣ части уравненія (517, b, 1)—на δy_1, и такъ далѣе; полученные результаты сложимъ; получится слѣдующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) + \lambda(в_1)\delta в_1 + \ldots \lambda(в_p)\delta в_p \ldots \mathbf{(566)}$$

гдѣ $\delta в_1$, $\delta в_2$, ... суть суммы вида (560) (§ 75).

Если δx_1, δy_1, ... δz_n суть возможныя варьяціи координатъ точекъ и если всѣ связи — удерживающія, то равенство (566), на основаніи уравненія (559), получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] = 0, \mathbf{(567)}$$

Это уравн. содержит вар'яции координат, которые необходимо исключить.

V-76.

Такимъ образомъ мы можемъ выставить слѣдующее положеніе:

Положеніе А. *Матерьяльныя точки, связанныя какими-либо удерживающими преградами и связями, получаютъ, вслѣдствіе дѣйствія приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству* (567) *при всякихъ возможныхъ значеніяхъ варьяцій координатъ. Возможныя варьяціи координатъ точекъ суть весьма малыя величины* δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, ... δx_i, δy_i, δz_i, ... δx_n, δy_n, δz_n, *удовлетворяющія равенствамъ:*

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_1}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial в_1}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial в_1}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \;.\;.\;.\;.\; \textbf{(559,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_2}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial в_2}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial в_2}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \;.\;.\;.\;.\; \textbf{(559,2)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_p}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial в_p}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial в_p}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\,; \;.\;.\;.\; \textbf{(559,p)}$$

$в_1$, $в_2$, ... $в_p$ *суть первыя части уравненій:*

$$в_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t)=0 \;.\;.\; \textbf{(491,1)}$$

$$в_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t)=0 \;.\;.\; \textbf{(491,2)}$$

. . . .

$$в_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t)=0 \;.\;.\; \textbf{(491,p)}$$

всѣхъ удерживающихъ преградъ и связей, связывающихъ матерьяльныя точки.

Примѣчаніе. *Слѣдуетъ обратить вниманіе, что равенства* (559) *не заключаютъ частныхъ производныхъ:*

$$\frac{\partial в_1}{\partial t},\ \frac{\partial в_2}{\partial t}, \ldots \frac{\partial в_p}{\partial t}\,.$$

ибо [illegible] виртуальныя [illegible] перемещенія, относящіяся къ одному моменту времени (см. выше стр. 380).

Если въ числѣ связей, связывающихъ точки системы, имѣются *неудерживающія связи*, находящіяся *въ состояніи напряженія*, то изъ уравненія (566) получается иное условіе.

Положимъ, что связи №№ 1 и 2 суть неудерживающія, а всѣ прочія— удерживающія, и что точки системы находятся въ такихъ положеніяхъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ не только равенствамъ:

$$в_3 = 0,\ \ в_4 = 0, \dots . в_p = 0, \dots . \quad \textbf{(491, 3, 4,...p)}$$

но также и равенствамъ $в_1 = 0$, $в_2 = 0$; тогда возможныя варьяціи координатъ должны удовлетворять равенствамъ:

$$\delta в_3 = 0,\ \delta в_4 = 0, \dots . \delta в_p = 0 \dots \quad \textbf{(559, 3, 4 ... p)}$$

и кромѣ того, какъ слѣдуетъ изъ пункта (*G*) § 75-го, условіямъ

$$\delta в_1 \geqslant 0,\ \ \delta в_2 \geqslant 0 \ \dots\dots\dots \quad \textbf{(568)}$$

Принявъ во вниманіе, что *множители* $\lambda(в_1)$, $\lambda(в_2)$, *соотвѣтствующіе неудерживающимъ связямъ, не могутъ быть отрицательными* (см. § 68), мы можемъ изъ равенства (566) заключить, что ускоренія, получаемыя точками системы, должны удовлетворять равенству (567) при всѣхъ тѣхъ возможныхъ варьяціяхъ координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3),.... (559, p) и равенствамъ (559, 1) (559, 2) и что тѣ же ускоренія должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] < 0 \quad \textbf{(569)}$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3),....(559, p) и неравенствамъ:

$$\delta в_1 > 0,\ \delta в_2 > 0.$$

Если тѣ же *неудерживающія связи* находятся *въ состояніи ослабленія*, то-есть, координаты точекъ удовлетворяютъ равенствамъ (491, 3, 4,... p) и неравенствамъ $в_1 > 0$, $в_2 > 0$, то тогда неудерживающія связи не могутъ оказывать реакцій, величины $\lambda(в_1)$, $\lambda(в_2)$ равны нулю, а потому равенство (566) обратится въ равенство вида (567).

Хотя это равенство имѣетъ тотъ же самый видъ, какъ и равенство, полученное при предположеніи, что связи №№ 1 и 2 суть удерживающія,

но значенія заключающихся въ немъ возможныхъ варьяцій координатъ теперь уже менѣе ограничены, а именно:

если точки системы столь мало сошли съ неудерживающихъ связей, что координаты ихъ дѣлаютъ функціи в_1 и в_2 весьма малыми положительными величинами α_1 и α_2, то возможныя варьяціи координатъ должны удовлетворять условіямъ и равенствамъ:

$$\delta\text{в}_1 \geqslant (-\alpha_1),\ \delta\text{в}_2 \geqslant (-\alpha_2),\ \delta\text{в}_3 = 0, \ldots \delta\text{в}_p = 0; \quad . \ . \ . \ \textbf{(570)}$$

если же неудерживающія связи ослабѣли настолько, что в_1 и в_2 суть не весьма малыя положительныя величины, то тогда возможныя варьяціи координатъ, заключающіяся въ равенствѣ (567), должны удовлетворять только равенствамъ (559, 3), ...(559, p).

2. Мы увидимъ ниже, какое значеніе имѣетъ положеніе *A* и какую роль оно играетъ въ механикѣ; теперь же мы докажемъ, что одно равенство (567) заключаетъ въ себѣ неявнымъ образомъ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ, такъ что, еслибы мы и не знали еще этихъ дифференціальныхъ уравненій, а положеніе *A* было бы дано намъ въ качествѣ основного принципа механики, то изъ равенства (567) могли бы вывести всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

При доказательствѣ мы будемъ основываться на нижеслѣдующей леммѣ.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ суть перемѣнныя величины, могущія принимать всякія значенія, заключающіяся въ нѣкоторыхъ предѣлахъ: α — въ предѣлахъ $+\alpha_1$ и $(-\alpha_1)$, β — въ предѣлахъ $+\beta_1$ и $(-\beta_1)$, и т. д.; притомъ мы предполагаемъ, что эти перемѣнныя въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны и совершенно независимы одна отъ другой, т. е. мы можемъ дать произвольное значеніе величинѣ α, въ то же время произвольное значеніе величинѣ β, и т. д.

Пусть $A, B, C, \ldots E$ суть какія-либо величины, *не зависящія* отъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$, или какія-либо функціи, *не заключающія* перемѣнныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$.

Лемма. *Для того, чтобы равенство:*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots + E\varepsilon = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ \textbf{(571)}$$

могло существовать при всякихъ значеніяхъ независимыхъ и произвольныхъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$, *необходимо, чтобы коэффиціенты этихъ величинъ были порознь равны нулю, т.-е.*:

$$A=0,\ B=0,\ C=0, \ldots, E=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ величины $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ независимы и въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны, то мы можемъ взять $\beta=0$, $\gamma=0, \ldots \varepsilon=0$, а α—произвольнымъ; такъ какъ равенство (571), получающее тогда видъ: $A\alpha=0$, должно имѣть мѣсто для всякихъ значеній α, даже и не равныхъ нулю, то мы должны заключить, что $A=0$, и т. д.

а). Эта лемма можетъ быть непосредственно примѣнена къ равенству (567) въ томъ случаѣ, когда всѣ точки свободны, тогда всѣ $3n$ варьяцій координатъ произвольны и независимы (см. пунктъ E въ § 75); онѣ входятъ линейнымъ и однороднымъ образомъ въ первую часть этого равенства и, конечно, не заключаются въ тѣхъ выраженіяхъ $(X_1 - mx_1'')$ и проч., на которыя онѣ помножены; слѣдовательно, эти варьяціи могутъ быть тогда разсматриваемы, какъ величины, означенныя чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ въ леммѣ, и на основаніи этой леммы мы должны заключить, что равенство (567) распадается на $3n$ дифференціальныхъ уравненій (509) параграфа 64-го; это суть дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ точекъ.

б). Въ тѣхъ случаяхъ, когда точки системы связаны между собою связями, вышеприведенная лемма не можетъ быть примѣнена непосредственно къ равенству (567), потому что не всѣ варьяціи координатъ точекъ произвольны и независимы одна отъ другой; но можно первую часть этого равенства преобразовать такъ, что въ ней останутся только независимыя варьяціи и притомъ линейнымъ однороднымъ образомъ; къ преобразованному равенству лемма будетъ примѣнима.

Пусть, по прежнему, система состоитъ изъ n точекъ, связанныхъ p связями; число независимыхъ варьяцій равно $\kappa=(3n-p)$ (см. пунктъ (F) въ § 75-мъ).

Выбравъ n варьяцій координатъ за независимыя и рѣшивъ уравненія (559, 1, 2 ... р) относительно остальныхъ p варьяцій, которыя мы назовемъ зависимыми, получимъ выраженія послѣднихъ въ видѣ линейныхъ однородныхъ функцій отъ независимыхъ варьяцій; если въ равенствѣ (567) замѣнимъ зависимыя варьяціи полученными выраженіями, то первая часть его обратится въ однородную линейную функцію отъ n независимыхъ варьяцій координатъ. Примѣнивъ къ преобразованному равенству вышеприведенную лемму, получимъ n дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ: время, координаты и производныя отъ координатъ по времени, перваго и второго порядка.
6). Можно исключить зависимыя варьяціи изъ равенства (567) и изъ уравненій (559, 1, 2, ... р) другимъ путемъ, не рѣшая послѣднихъ уравненій, но пользуясь пріемомъ, предложеннымъ Эйлеромъ и примѣненнымъ Лагранжемъ къ уравненіямъ механики.

Этотъ пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: каждое изъ равенствъ (559, 1, 2, ... р) помножается на нѣкоторый множитель (равенство (559, 1)—на множитель $\lambda(в_1)$, равенство (559, 2)—на множитель $\lambda(в_2)$, и т. д.); по умноженіи, эти равенства слагаются съ равенствомъ (567), такъ что получается равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(A_i\delta x_i+B_i\delta y_i+C_i\delta z_i)=0, \quad . \ . \ . \ . \ (556, \text{bis})$$

(566 — рукописная поправка над 556)

гдѣ

$$A_i = X_i - m_i x_i'' + \lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial x_i} + \lambda(в_2)\frac{\partial в_2}{\partial x_i} + \ . \ . \ . \ . + \lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial x_i},$$

и проч.; множители $\lambda(в_1)$, $\lambda(в_2)$, ... $\lambda(в_p)$ должны быть таковы, чтобы они обращали въ нуль коэффиціенты зивисимыхъ варьяцій равенствъ (566, bis).

Послѣ этого въ равенствѣ (566, bis) останутся только независимыя варьяціи, а по вышеприведенной леммѣ и ихъ коэффиціенты должны быть равны нулю; поэтому мы будемъ имѣть: p равенствъ, выражающихъ, что коэффиціенты зависимыхъ варьяцій равны нулю

и n равенствъ, выражающихъ, что коэффиціенты независимыхъ варьяцій равны нулю, всего—$3n$ равенствъ вида:

$$\left.\begin{aligned} 0&=X_i-m_i x_i''+\lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial x_i}+\ldots\ldots+\lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial x_i}\\ 0&=Y_i-m_i y_i''+\lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial y_i}+\ldots\ldots+\lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial y_i}\\ 0&=Z_i-m_i z_i''+\lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial z_i}+\ldots\ldots+\lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial z_i}\end{aligned}\right\}, \ldots \textbf{(517, bis)}$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ: $1, 2, 3, \ldots. n$.

Полученныя равенства суть совокупныя дифференціальныя уравненія (517), составленныя въ параграфѣ 70-мъ.

3. Доказавъ, что изъ положенія (A) совокупныя дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть выведены, мы вправѣ смотрѣть на это положеніе, какъ на особую форму выраженія совокупности дифференціальныхъ уравненій движенія системы матерьяльныхъ точекъ. Поэтому мы должны быть теперь увѣрены, что изъ равенства (567) можно получить тѣ же самые результаты, какіе получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, когда произведемъ надъ ними преобразованія, имѣющія цѣлью исключить множители λ или совершить перемѣну координатныхъ параметровъ; часто случается, что требуемые результаты получаются изъ равенства (567) помощью менѣе сложныхъ дѣйствій, чѣмъ изъ самыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Въ слѣдующихъ главахъ мы будемъ имѣть случаи неоднократно пользоваться равенствомъ (567) съ упомянутою цѣлью.

Для того же, чтобы теперь показать примѣръ подобнаго пользованія равенствомъ (567), приводимъ въ § 78-мъ выводъ Лагранжевыхъ уравненій изъ этого равенства; но такъ какъ въ этомъ и въ другихъ подобныхъ преобразованіяхъ мы встрѣчаемся съ выраженіями такими, какъ напримѣръ:

$$\frac{d\delta x}{dt},\ \delta x',\ \frac{d\delta q_1}{dt}\ \delta q_1',$$

то намъ придется предварительно ознакомиться съ ними въ слѣдующемъ 77-мъ параграфѣ.

V-77.

§ 77. Варьяцiя скорости точки и скорость варьяцiи движущейся точки.

Пусть нѣкоторая движущаяся точка описываетъ траэкторiю $MM'M''$ .... (черт. 43); M есть положенiе точки въ пространствѣ въ моментъ t, M' — положенiе ея въ моментъ t', M'' — въ моментъ t'', и т. д.

Если положенiя, занимаемыя разсматриваемою точкою въ пространствѣ, могутъ получать какiя-либо варьяцiи, то, сообщивъ варьяцiи всѣмъ точкамъ траэкторiи $MM'M''$ ...., мы произведемъ измѣненiе движенiя разсматриваемой точки; это измѣненiе мы будемъ называть *варьяцiею движенiя* этой точки, а получаемое чрезъ варьяцiю новое движенiе будемъ называть *измѣненнымъ*.

Пусть $M_1M_1'M_1''$.... (черт. 43) есть траэкторiя измѣненнаго движенiя, причемъ M_1, M_1', M_1'', ... суть положенiя, занимаемыя движущеюся точкою въ моменты t, t', t'', ... при этомъ измѣненномъ движенiи; длины $\overline{MM_1} = \varepsilon$, $\overline{M'M_1'} = \varepsilon'$,, $\overline{M''M_1''} = \varepsilon''$, ... суть варьяцiи положенiй M, M', M'', ...; вообще варьяцiя каждой точки первоначальной траэкторiи есть весьма малая длина, проведенная изъ этой точки въ соотвѣтственную точку траэкторiи измѣненнаго движенiя.

Варьяцiи точекъ первоначальной траэкторiи могутъ быть приписаны или отнесены къ движущейся точкѣ и тогда можно сказать, что *варьяцiя движущейся точки* измѣняетъ свою длину и свое направленiе съ теченiемъ времени, то-есть, вмѣстѣ съ движенiемъ точки. Измѣненное движенiе можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ соединенiя первоначальнаго движенiя съ варьяцiею движущейся точки.

Какъ первоначальное, такъ и измѣненное движенiя должны обладать неотъемлемыми качествами движенiя: непрерывностью и послѣдовательностью положенiй точки (см. стр. 6 кинематической части): отсюда слѣдуетъ, что *варьяцiя движущейся точки* должна измѣнять свою длину и свое направленiе съ теченiемъ времени непрерывнымъ образомъ: въ остальныхъ отношенiяхъ варьяцiя произвольна.

Если изъ какой-либо неподвижной точки O (черт. 44) проведемъ длину, равную и параллельную варьяцiи движущейся точки, то другой

конецъ этой длины будетъ чертить *непрерывную* кривую линію $EE'E''$, ..., которую можно назвать *годографомъ варьяціи движущейся точки*. (На чертежѣ 44-мъ проведены радіусы векторы OE, OE', OE'', равные и параллельные длинамъ ε, ε', ε'').

Скорость точки, описывающей годографъ варьяціи, мы будемъ называть *скоростью варьяціи движущейся точки* и будемъ обозначать ее слѣдующимъ знакомъ: $v(\varepsilon)$. (На чертежѣ 44-мъ линія $\overline{EV(\varepsilon)}$ изображаетъ величину и направленіе скорости варьяціи въ моментъ t).

Понятно, что въ измѣненномъ движеніи скорость движущейся точки отличается отъ скорости въ первоначальномъ движеніи (на чертежѣ 43-мъ изображены скорости того и другого движенія для момента t, а именно: линія $\overline{MV}$ изображаетъ скорость v движущейся точки въ моментъ t при первоначальномъ движеніи, а линія $\overline{M_1V_1}$ — скорость v_1 въ тотъ же моментъ при измѣненномъ движеніи). Геометрическую разность между скоростью измѣненнаго движенія и соотвѣтствующею скоростью первоначальнаго движенія мы будемъ называть *варьяціею скорости* и обозначать знакомъ $\varepsilon(v)$; конечно, соотвѣтствующія скорости суть тѣ, которыя относятся къ одному и тому же моменту времени, такъ что варьяція скорости въ моментъ t есть геометрическая разность между скоростью v_1 въ моментъ t и скоростью v въ тотъ же моментъ:

$$\overline{\varepsilon(v)}=\overline{v_1}-\overline{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (572)$$

(На чертежѣ 43-мъ изъ точки M_1 проведена длина $\overline{M_1\beta}$, равная и параллельная скорости $\overline{MV}$, поэтому длина $\overline{\beta V_1}$ изображаетъ величину и направленіе варьяціи скорости въ моментъ t).

Можно доказать, что *скорость варьяціи движущейся точки равна и параллельна варьяціи скорости ея*, то-есть, что:

$$\overline{v(\varepsilon)}=\overline{\varepsilon(v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (573)$$

Для доказательства мы воспользуемся тѣмъ пріемомъ, который мы употребили при доказательствѣ параллелограмма скоростей на стр. 208 кинематической части.

Проведемъ изъ точки M_1 (черт. 45) длину $M_1\mathfrak{m}'$, равную и параллельную длинѣ MM' и проведемъ прямыя изъ M_1, чрезъ точки M_1' и $\mathfrak{m}'$, и изъ $\mathfrak{m}'$ чрезъ точку M_1'; въ образовавшемся треугольникѣ $M_1M_1'\mathfrak{m}'$ сторона $M_1\mathfrak{m}'$ будетъ равна и параллельна хордѣ MM' и сторона $\mathfrak{m}'M_1'$ равна и параллельна хордѣ EE' годографа варьяціи скорости.

Отложимъ по проведеннымъ прямымъ линіямъ слѣдующія длины, пропорціональныя сторонамъ вышесказанпгао треугольника:

$$\overline{M_1A_1}=\frac{\overline{M_1M_1'}}{\vartheta}, \quad \overline{M_1A}=\frac{\overline{M_1\mathfrak{m}'}}{\vartheta}, \quad \overline{\mathfrak{m}'Q}=\frac{\overline{\mathfrak{m}'M_1'}}{\vartheta},$$

гдѣ $\vartheta=(t'-t)$; соединивъ точки A и A_1 прямою линіею, получимъ треугольникъ M_1A_1A, подобный треугольнику $M_1M_1'\mathfrak{m}'$, а потому длина AA_1 равна и параллельна длинѣ $\mathfrak{m}'Q$.

Слѣдовательно, длина $\mathfrak{m}'Q$ имѣетъ величину и направленіе геометрической разности между длинами M_1A_1 и M_1A.

Уменьшая затѣмъ величину промежутка времени ϑ приближеніемъ момента t' къ моменту t и разсуждая такъ, какъ на стр. 209 кинематической части, мы заключимъ, что въ предѣлѣ (при неограниченномъ приближеніи ϑ къ нулю) длина $\mathfrak{m}'Q$ обращается въ длину $\overline{M_{I}Q}(\varepsilon)$ (черт. 43), равную и параллельную скорости $\overline{EV}(\varepsilon)$ (черт. 44) годографа варьяціи, длина M_1A_1—въ скорость $\overline{M_1V_1}$ измѣненнаго движенія и длина M_1A—въ длину $\overline{M_1\beta}$ (черт. 43), равную и параллельную скорости $\overline{MV}$ первоначальнаго движенія; а такъ какъ длина $\mathfrak{m}'Q$ при всякихъ значеніяхъ ϑ равна и параллельна длинѣ AA_1, даже и тогда, когда t' совпадетъ съ t, то отсюда видно, что скорость варьяціи есть геометрическая разность между скоростью измѣненнаго и скоростью первоначальнаго движенія, т.-е., говоря короче: *скорость варьяціи равна и параллельна варьяціи скорости.*

Прежде чѣмъ извлечь слѣдствія изъ этой теоремы, мы должны обратить вниманіе на то обстоятельство, что варьяція положенія точки можетъ быть также названа варьяціею радіуса вектора точки, такъ какъ ее можно разсматривать, какъ геометрическую разность

между радіусами векторами измѣненнаго и первоначальнаго положеній точки.

Знакъ δ, стоящій передъ какою-либо функціею отъ координатъ какихъ-либо точекъ, мы употребляемъ и будемъ употреблять для обозначенія приращенія, получаемаго значеніемъ этой функціи при варьированіи положеній этихъ точекъ; такъ, напримѣръ, δx или, что то же самое, $\delta(r\cos(r, X))$ означаетъ приращеніе, получаемое проэкціею на ось $X^{\text{овъ}}$ радіуса вектора точки при варьированіи положенія точки, т.-е., алгебрическую разность между проэкціею радіуса вектора r_1 измѣненнаго положенія точки и проэкціею радіуса вектора r начальнаго положенія ея, т.-е.:

$$\delta x = \delta(r\cos(r, X)) = r_1\cos(r_1, X) - r\cos(r, X).$$

Если условимся обозначать варьяцію положенія точки знакомъ $\varepsilon(r)$ (такъ какъ это есть варьяція радіуса вектора), то равенства (561) параграфа 75-го получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \delta(r\cos(r, X)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r), X), \\ \delta y &= \delta(r\cos(r, Y)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r), Y), \\ \delta z &= \delta(r\cos(r, Z)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r), Z) \end{aligned}\right\} \ldots (\mathbf{561}, \text{bis})$$

(Вмѣсто $\varepsilon(r)$ мы будемъ иногда писать просто ε, по прежнему).

На основаніи этихъ замѣчаній изъ приведенной теоремы могутъ быть выведены слѣдующія заключенія.

1) Относительно проэкцій величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси. Замѣнивъ въ равенствахъ (561, bis) радіусъ векторъ r—скоростью v, будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \delta x' &= \delta(v\cos(v, X)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v), X) \\ \delta y' &= \delta(v\cos(v, Y)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v), Y) \\ \delta z' &= \delta(v\cos(v, Z)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v), Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathbf{574})$$

Съ другой стороны, проэкціи скорости $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} v(\varepsilon)\cos\left(v(\varepsilon),\ X\right) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\left(\varepsilon(r),\ X\right)]}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}, \\ v(\varepsilon)\cos\left(v(\varepsilon),\ Y\right) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\left(\varepsilon(r),\ Y\right)]}{dt} = \frac{d\delta y}{dt}, \\ v(\varepsilon)\cos\left(v(\varepsilon),\ Z\right) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\left(\varepsilon(r),\ Z\right)]}{dt} = \frac{d\delta z}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (575)$$

Такъ какъ $v(\varepsilon)$ равна и параллельна $\varepsilon(v)$, то и проэкціи ихъ на какое бы то ни было направленіе равны между собою, а потому изъ равенствъ (574) и (575) слѣдуетъ:

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d\delta x}{dt},\quad \delta\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d\delta y}{dt},\quad \delta\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d\delta z}{dt} \quad \ldots (576)$$

2) Относительно проэкцій величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе, измѣняющееся одновременно съ движеніемъ точки.

Мы проведемъ это направленіе U черезъ начало координатъ и отложимъ на немъ, отъ начала же координатъ, длину равную единицѣ; точку, находящуюся на концѣ отложенной длины, мы обозначимъ чрезъ $M(U)$, радіусъ векторъ ея — чрезъ (1_U) и скорость ея знакомъ $v(1_U)$ или v_U.

Кромѣ того, мы еще предположимъ, что законъ вращенія направленія U подлежитъ варьированію; обозначимъ варьяцію подвижной точки $M(U)$ или радіуса вектора (1_U) знакомъ $\varepsilon(1_U)$, или просто ε_U; при этомъ мы должны имѣть въ виду, что длина радіуса вектора (1_U) остается постоянно равною единицѣ также и при варьированіи.

Проэкціи величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе U равны между собою:

$$\varepsilon(v)\cos\left(\varepsilon(v),\ U\right)=v(\varepsilon)\cos\left(v(\varepsilon),\ U\right) \quad \ldots\ldots (577)$$

По формулѣ (14) стр. 30 кинематической части проэкція скорости на вращающееся направленіе выражается такъ:

$$v(\varepsilon)\cos\left(v(\varepsilon),\ U\right)=\frac{d[\varepsilon(r)\cos\left(\varepsilon(r),\ U\right)]}{dt}-\varepsilon(r)v_U\cos\left(\varepsilon(r), v_U\right) \quad (578)$$

V-77.

Съ другой стороны, проэкція варьяціи скорости на подвижное направленіе U можетъ быть выражена, съ помощью формулъ (574), такъ:

$$\varepsilon(v)\cos\left(\varepsilon(v),\ U\right)=\cos(U,\ X)\delta\left(v\cos(v,\ X)\right)+$$
$$+\cos(U,Y)\delta\left(v\cos(v,Y)\right)+\cos(U,Z)\delta\left(v\cos(v,\ Z)\right);\ \ldots\ \textbf{(579)}$$

примѣнивъ равенства (561 bis) къ варьяціи точки $M(U)$ и принявъ во вниманіе, что радіусъ векторъ (1_U) этой точки равенъ единицѣ, получимъ:

$$\delta\left(\cos(U,X)\right)=\varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,\ X),\quad \delta\left(\cos(U,\ Y)\right)=\varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,\ Y),$$
$$\delta\left(\cos(U,\ Z)\right)=\varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,\ Z);$$

изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$v\cos(v,\ X)\delta\left(\cos(U,\ X)\right)+v\cos(v,\ Y)\delta\left(\cos(U,\ Y)\right)+$$
$$+v\cos(v,Z)\delta\left(\cos(U,\ Z)\right)=v\varepsilon_U\cos(v,\ \varepsilon_U)\ \ldots\ \textbf{(580)}$$

По ничтожной малости варьяцій, алгебрическая варьяція δ произведенія двухъ величинъ выражается, подобно дифференціалу произведенія, формулою:

$$\delta(\alpha\beta)=\alpha\delta\beta+\beta\delta\alpha,$$

а потому изъ формулъ (579) и (580) можемъ получить слѣдующую:

$$\varepsilon(v)\cos\left(\varepsilon(v),\ U\right)=\delta\left(v\cos(v,\ U)\right)-v\varepsilon_U\cos(v,\ \varepsilon_U)\ \ldots\ \textbf{(581)}$$

Изъ равенствъ (577), (578) и (581) получаемъ слѣдующее равенство, которымъ мы воспользуемся въ послѣдующихъ главахъ:

$$\delta\left(v\cos(v,\ U)\right)=\frac{d(\varepsilon\cos(\varepsilon,\ U))}{dt}-\varepsilon v_U\cos(v_U,\varepsilon)+v\varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,v),\ \textbf{(582)}$$

здѣсь ε поставлено вмѣсто $\varepsilon(r)$.

3) Относительно величинъ $\delta q_k'$ и $\frac{d\delta q_k}{dt}$.

Положимъ, что какіе-либо координатные параметры $q_1, q_2, \ldots q_n$ системы точекъ выражены функціями времени и декартовыхъ

V-77.78.

координатъ системы; взявъ полную производную по времени отъ выраженія:

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i} \delta z_i \right),$$

взявъ затѣмъ алгебрическую варьяцію δ отъ выраженія:

$$q'_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i} z'_i \right)$$

и сравнивъ полученные результаты, мы найдемъ, что, на основаніи равенствъ (576), должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства:

$$\delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d \delta q_k}{dt}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(583, k)}$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

§ 78. Выводъ дифференціальныхъ уравненій Лагранжа изъ равенства (567).

Члены равенства (567), заключающіе ускоренія, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$m_i x''_i \delta x_i = \frac{d(m_i x'_i \delta x_i)}{dt} - m_i x'_i \frac{d \delta x_i}{dt} = \frac{d(m_i x'_i \delta x_i)}{dt} - m x'_i \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) =$$

На основании ф 576 стр. 394

Сдѣлавъ такое преобразованіе во всѣхъ подобныхъ членахъ этого равенства, замѣнимъ производныя отъ варьяцій δx_i, δy_i, δz_i — варьяціями: $\delta x'_i$, $\delta y'_i$, $\delta z'_i$, на основаніи равенствъ (576); тогда равенство (567) получитъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \delta T - \frac{dR}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \textbf{(567, A)}$$

гдѣ:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i).$$

$\delta T = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 \ldots) = \sum m_i (x'_i \delta x'_i + y'_i \delta y'_i + z'_i \delta z'_i)$

Замѣнимъ варьяціи декартовыхъ координатъ выраженіями (564) § 75-го, а затѣмъ, въ выраженіи R, производныя отъ декартовыхъ координатъ по $q_1, q_2, \ldots q_n$ замѣнимъ производными отъ x_i', y_i', z_i' по $q_1', q_2', \ldots q_n'$, основываясь на формулахъ:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'}=\frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'}=\frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

выведенныхъ въ § 73-мъ; тогда равенство (567, А) получитъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta q_k + \delta T - \frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = 0, \ldots \ldots \text{(584)}$$

гдѣ Q_k выражается формулами (532) § 73-го, а p_k есть частная производная отъ T по q_k' (см. (539) § 73); при этомъ предполагается, что T выражено формулою (535, а) § 73-го.

Затѣмъ развернемъ: выраженіе δT и производную по времени отъ суммы, заключающей величины p_k:

$$\delta T = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k'} \delta q'_k$$

$$\frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dt} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{d \delta q_k}{dt};$$

принявъ же во вниманіе равенства (583), найдемъ, что равенство (584) (то-есть (567)) получаетъ, послѣ всѣхъ этихъ преобразованій, слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{dp_k}{dt} \right) \delta q_k = 0 \ldots \ldots \text{(585)}$$

Такъ какъ всѣ варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ произвольны и незави-

симы, то изъ равенства (585), на основаніи леммы, приведенной въ § 76-мъ, получимъ уравненія Лагранжа.

§ 79. Положенія равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ. Уравненія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ. Условія равновѣсія задаваемыхъ силъ.

1. Когда всѣ матерьяльныя точки данной системы находятся одновременно въ такихъ положеніяхъ, что приложенныя къ каждой точкѣ задаваемыя силы и реакціи связей взаимно уравновѣшиваются, тогда говорятъ, что *система точекъ находится въ положеніи равновѣсія.*

Можно выразиться иначе: *когда ускоренія всѣхъ точекъ системы равны нулю, тогда система находится въ положеніи равновѣсія*; подъ словами «положеніе системы» мы подразумѣваемъ совокупность одновременныхъ положеній всѣхъ точекъ системы.

2. При такомъ положеніи системы, дифференціальныя уравненія движенія (517) § 70 обратятся въ совокупныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 0&=X_i+\lambda(\text{в}_1)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i}+\lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_2}{\partial x_i}+\ldots+\lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial x_i}\\ 0&=Y_i+\lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i}+\lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_2}{\partial y_i}+\ldots+\lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial y_i}\\ 0&=Z_i+\lambda(\text{в}_1)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i}+\lambda(\text{в}_2)\frac{\partial \text{в}_2}{\partial z_i}+\ldots+\lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right\}, \ldots \mathbf{(586, i)}$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

Эти уравненія, число которыхъ равно $3n$, т.-е., утроенному числу точекъ системы, называются *уравненіями равновѣсія силъ и реакцій, приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ системы.*

Если число p связей менѣе утроеннаго числа точекъ системы, то, исключивъ изъ $3n$ уравненій (586) множители $\lambda(\text{в}_1)$, $\lambda(\text{в}_2)$, . . . $\lambda(\text{в}_p)$, получимъ $н=3n-p$ уравненій.

3. Эти новыя уравненія выражаютъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы система точекъ могла

имѣть положеніе равновѣсія; поэтому мы будемъ называть эти n уравненій *условіями равновѣсія задаваемыхъ силъ*, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ.

Если задаваемыя силы выражаются функціями времени и координатъ точекъ, то изъ n условій равновѣсія и изъ p уравненій связей опредѣлятся, для каждаго момента времени, координаты всѣхъ точекъ въ положеніи равновѣсія системы; если опредѣленныя такимъ образомъ значенія $3n$ координатъ окажутся независящими отъ времени, т.-е., постоянными, то выражаемое этими координатами положеніе равновѣсія системы можетъ быть также и положеніемъ ея покоя.

Подробному разсмотрѣнію положеній равновѣсія системы точекъ мы посвятимъ далѣе особую главу; но все то, что уже сказано и что будетъ сказано въ настоящей главѣ относительно положеній, уравненій и условій равновѣся системы точекъ, необходимо для объясненія статическаго значенія дифференціальныхъ уравненій движенія и равенства (567).

§ 80. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій равновѣсія.

Это равенство получится изъ равенства (567), если въ послѣднемъ положить равными нулю ускоренія всѣхъ точекъ системы; получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{(567, b)}$$

Такъ что, аналогично положенію (А) § 76-го, можемъ выставить слѣдующее:

Положеніе В. *Система, состоящая изъ n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями:* (491, 1), (491, 2) . . . . (491, p) (§ 76), *находится въ положеніи равновѣсія при условіи, чтобы приложенныя къ точкамъ задаваемыя силы удовлетворяли равенству* (567, b) *при всякихъ возможныхъ совокупностяхъ варьяцій координатъ; каждая возможная совокупность варьяцій координатъ должна удовлетворять равенствамъ* (559, 1), (559, 2), ... (559, p) (§ 76).

Если нѣкоторыя изъ связей — неудерживающія (положимъ, это суть связи №№ 1 и 2), то при тѣхъ положеніяхъ равновѣсія системы, при которыхъ неудерживающія связи находятся въ состояніи напряженія, задаваемыя силы должны удовлетворять равенству (567, b) при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ:

$$\delta в_1 = 0,\ \delta в_2 = 0,\ \delta в_3 = 0, \ldots \delta в_p = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ задаваемыя силы должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) < 0 \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(569, b)}$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\delta в_1 > 0,\ \delta в_2 > 0,\ \delta в_3 = 0, \ldots \delta в_p = 0.$$

Поступая такимъ же образомъ, какъ и въ § 76-мъ, мы убѣдимся, что изъ равенства (567, b) и положенія (B) можно вывести уравненія равновѣсія (586) или условія равновѣсія, смотря по желанію; поэтому можно смотрѣть на положеніе (B), какъ на особую форму выраженія уравненій или условій равновѣсія. Впослѣдствіи мы будемъ пользоваться равенствомъ (567, b) и будемъ извлекать изъ него тѣ же самые результаты, какіе получаются изъ уравненій равновѣсія.

§ 81. Такъ называемыя начала: возможныхъ перемѣщеній и д'Аламбера.

Обращаясь теперь къ общепринятому толкованію равенствъ (567, b), (567) и дифференціальныхъ уравненій движенія (517), должно сдѣлать оговорку, что эти толкованія имѣютъ, въ нѣкоторыхъ пунктахъ, нѣсколько метафизическій характеръ.

Замѣнивъ варьяціи координатъ выраженіями (561) § 75-го и означивъ черезъ F_i равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, можемъ выразить равенство (567, b) такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i F_i \cos(F_i,\ \varepsilon_i) = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(567, c)}$$

заключающіяся здѣсь возможныя варьяціи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ положеній точекъ должны удовлетворять равенствамъ (559, 1, bis), (559, 2, bis), ... (559, p, bis) (§ 75).

2. Матерьяльныя точки, образующія систему, могутъ совершать весьма различныя движенія при прохожденіи черезъ занимаемыя ими положенія; пусть $Ds_1, Ds_2, \ldots Ds_n$ суть элементы путей, пробѣгаемые точками въ теченіе ничтожно-малаго промежутка времени θ при какомъ-либо возможномъ движеніи системы черезъ занимаемое ею положеніе; эти элементы путей, которые мы будемъ называть *возможными перемѣщеніями точекъ*, должны удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$D\mathrm{в}_1=0,\ D\mathrm{в}_2=0,\ \ldots\ D\mathrm{в}_p=0\ , \ldots\ldots \quad (587)$$

гдѣ:

$$D\mathrm{в}_k=\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i\mathrm{в}_k)\cos(P_i\mathrm{в}_k,\ Ds_i)+\frac{\partial \mathrm{в}_k}{\partial t}\theta.$$

Сравнивъ эти равенства съ равенствами (559, bis) § 75-го, можемъ судить, что *если уравненія всѣхъ связей*, которымъ подчинена система точекъ, *не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то всѣ возможныя варьяціи положеній точекъ могутъ служить возможными перемѣщеніями ихъ и обратно.*

Положимъ, что въ самомъ дѣлѣ уравненія всѣхъ связей системы не заключаютъ времени, тогда въ равенствѣ (567, c) варьяціи могутъ быть замѣнены перемѣщеніями и равенство это получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i Ds_i\cos(F_i,\ Ds_i)=0\ \ldots\ldots\ldots \quad (567,\mathrm{d})$$

Каждый изъ членовъ первой части этого равенства выражаетъ величину работы задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ одной изъ точекъ системы, на протяженіи возможнаго перемѣщенія этой точки (см. § 25, стр. 107), а потому въ сказанныхъ случаяхъ положеніе (B) можетъ быть высказано въ слѣдующей формѣ:

Положеніе (B, 1). *Если система n матерьяльныхъ точекъ,*

связанныхъ p удерживающими независящими отъ времени связями, находится въ положеніи равновѣсія и совершаетъ какое-либо возможное движеніе, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ равна нулю, каково бы ни было возможное движеніе системы и каковы бы ни были возможныя перемѣщенія; всякая совокупность одновременныхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяетъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i в_1)\cos(P_i в_1, Ds_i)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (588, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i в_2)\cos(P_i в_2, Ds_i)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (588, 2)$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i в_p)\cos(P_i в_p, Ds_i)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (588, p)$$

Обратно, всякое положеніе системы, при которомъ задаваемыя силы удовлетворяютъ равенству (567, d) *при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній (удовлетворяющихъ равенствамъ* (588)), *есть положеніе равновѣсія.*

Если въ числѣ связей есть неудерживающія связи, то, для тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, при которыхъ точки системы сходятъ съ одной или съ нѣсколькихъ связей, сумма работъ задаваемыхъ силъ должна быть менѣе нуля, когда положеніе системы есть положеніе равновѣсія.

Это положеніе извѣстно подъ именемъ *начала возможныхъ перемѣщеній.* Оно носитъ названіе «начала» или «принципа» потому, что, принявъ его за основаніе въ качествѣ основнаго начала механики, можно изъ него вывести уравненія равновѣсія системы точекъ, связанныхъ удерживающими независящими отъ времени связями, а слѣдовательно и всю статику такихъ системъ.

Существованіе этого принципа было впервые подмѣчено въ теоріи простыхъ машинъ: рычага, блоковъ, ворота и наклонной плоскости, гдѣ этотъ принципъ почти очевиденъ, если не принимать въ разсчетъ тренія и разсматривать простые механизмы, какъ идеальныя связи; но нельзя утверждать, чтобы этотъ принципъ былъ самъ по себѣ, безъ доказательства, очевиденъ для всякихъ связей, не зависящихъ отъ времени. Поэтому въ тѣхъ курсахъ и сочиненіяхъ по механикѣ, въ которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній выставляется какъ основное положеніе статики системы несвободныхъ точекъ, является надобность доказать это начало независимо отъ общихъ уравненій равновѣсія системы; извѣстны многія такія доказательства, придуманныя различными авторами; они состоятъ, по большей части, или въ томъ, что предполагаемыя связи замѣняются другими простѣйшими связями, для которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній очевидно, или въ томъ, что, чрезъ присоединеніе новыхъ простѣйшихъ связей, система точекъ приводится къ системѣ простыхъ машинъ. Въ слѣдующемъ параграфѣ будутъ приведены нѣкоторыя изъ доказательствъ подобнаго рода.

Если уравненія связей заключаютъ время, то равенства (587) отличаются отъ равенствъ (559), а потому тогда возможныя совокупности варьяцій положеній точекъ не могутъ служить возможными перемѣщеніями точекъ.

Напримѣръ, возможныя варьяціи положеній точекъ m_1 и m_2, связанныхъ связью, упомянутою на стр. 307, должны удовлетворять равенству:

$$\varepsilon_1 \cos(r_{21}, \varepsilon_1) - \varepsilon_2 \cos(r_{21}, \varepsilon_2) = 0,$$

между тѣмъ, какъ возможныя перемѣщенія этихъ точекъ должны удовлетворять равенству:

$$Ds_1 \cos(r_{21}, Ds_1) - Ds_2 \cos(r_{21}, Ds_2) + (l_0 - L)\, ke^{-kt} = 0,$$

а потому не можетъ быть, чтобы ε_1 равнялось Ds_1 и, въ то же время, ε_2 было равно Ds_2.

Въ этихъ случаяхъ правильнѣе было бы называть положеніе (B) на-

чаломъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ; оно можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Положеніе В. Если система n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ p удерживающими связями, находится въ положеніи равновѣсія, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ равна нулю, каковы бы ни были возможныя варьяціи; всякая совокупность возможныхъ варьяцій положеній точекъ удовлетворяетъ равенствамъ: (559, 1, bis), (559, 2, bis)....(559, p, bis).

Обратно, всякое положеніе системы, удовлетворяющее равенству (567, c) при всякихъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ, есть положеніе равновѣсія.

Въ параграфѣ 62-мъ на стр. 320—321 было упомянуто, что геометрическія разности $u_1, u_2, \ldots u_n$ между каждыми двумя совокупностями возможныхъ скоростей точекъ должны удовлетворять равенству (505); точно также геометрическія разности между двумя совокупностями возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяютъ тѣмъ же самымъ равенствамъ (559), которымъ удовлетворяютъ возможныя варьяціи положеній; поэтому послѣднія могутъ быть названы геометрическими разностями между возможными перемѣщеніями точекъ системы.

На иностранныхъ языкахъ начало возможныхъ перемѣщеній называется такъ: Le principe des vitesses virtuelles, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, the principle of virtual velocities; въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ объяснено происхожденіе этого термина и значеніе его.

3. **Говоря о положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, мы можемъ выразиться такимъ образомъ:**

При положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ, взаимно-уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.

Такую форму выраженія мы будемъ употреблять, когда найдемъ нужнымъ, взамѣнъ того выраженія, которое помѣщено въ началѣ этого параграфа.

Обращаемся теперь къ толкованію дифференціальныхъ уравненій движенія въ смыслѣ уравненій равновѣсія.

Вообразимъ себѣ, что въ каждой матерьяльной точкѣ, кромѣ задаваемыхъ силъ и реакцій связей, приложена сила, прямопротивоположная ускоренію ея и равная произведенію изъ массы точки на ускореніе ея; эту воображаемую силу называютъ *силою инерціи*; проэкціи на оси ко-

ординатъ силы инерціи J_i, которую мы воображаемъ себѣ приложенною къ точкѣ m_i, суть:

$$\left.\begin{aligned} J_i \cos(J_i, X) &= -m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Y) &= -m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Z) &= -m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (589, \text{i})$$

Вообразивъ себѣ такія силы и сравнивъ дифференціальныя уравненія движенія (517, bis) стр. 389 съ уравненіями равновѣсія (586) стр. 398, можемъ придти къ мысли разсматривать дифференціальныя уравненія движенія, какъ уравненія равновѣсія силъ: задаваемыхъ, реакцій связей и силъ инерціи; въ самомъ дѣлѣ, дифференціальныя уравненія движенія точки m_i выражаютъ, что *равнодѣйствующая F_i всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равнодѣйствующая R_i реакцій всѣхъ тѣхъ связей, которымъ подчинена эта точка, и сила инерціи J_i этой точки взаимно уравновѣшиваются*, т.-е.:

$$\overline{F_i} + \overline{J_i} + \overline{R_i} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (517, \text{B})$$

Примѣчаніе. Фиктивную *силу инерціи* не должно смѣшивать со *свойствомъ инерціи матеріи.*

Воображаемая сила $Д_i$, равная и прямопротивоположная силѣ инерціи, называется *движущею* или *эффективною силою* (Effectivkraft), а сила $П_i$, равная и прямопротивоположная равнодѣйствующей R_i реакцій связей, называется *потерянною силою.*

Уравненія (517, bis) стр. 389 можно еще выразить такъ:

$$\overline{F_i} = \overline{Д_i} + \overline{П_i}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (517, \text{C})$$

т.-е., *равнодѣйствующая всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ каждой изъ матерьяльныхъ точекъ системы, разлагается на двѣ составляющія: на потерянную силу, которая уравновѣшивается съ реакціями связей, и на движущую силу, которая сообщаетъ матерьяльной точкѣ то самое ускореніе, какое бы она сообщила свободной точкѣ той же массы.*

Кромѣ того, уравненія (517, bis) можно еще представить такъ:

$$\overline{П_i} + \overline{R_i} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (517, \text{D})$$

потому что геометрическая разность между силою F_i и движущею силою есть сила потерянная, т.-е.:

$$\left.\begin{array}{l} X_i - m_i x_i'' = \Pi_i \cos(\Pi_i, X) \\ Y_i - m_i y_i'' = \Pi_i \cos(\Pi_i, Y) \\ Z_i - m_i z_i'' = \Pi_i \cos(\Pi_i, Z) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (590, \mathrm{I})$$

а уравненія равновѣсія (586) можно представить такъ:

$$\overline{F_i} + \overline{R_i} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (586, \mathrm{D})$$

Сравнивъ выраженія (517, D) съ выраженіями (586, D) и припомнивъ послѣднюю форму словеснаго выраженія уравненій равновѣсія, а именно слѣдующую: „при положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ, взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей“, можемъ сказать слѣдующее относительно движенія системы точекъ:

Положеніе A_1. *Во всякій моментъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ, потерянныя силы всѣхъ точекъ взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.*

Это положеніе, данное д'Аламберомъ въ его Traité de Dynamique (1743), называется *началомъ или принципомъ д'Аламбера.* Изъ соединенія начала д'Аламбера съ началомъ возможныхъ варьяцій или перемѣщеній получается положеніе A, изъ котораго могутъ быть выведены дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, какъ было показано въ § 76-мъ.

§ 82. Нѣкоторыя свѣдѣнія относительно исторіи открытія начала возможныхъ перемѣщеній и нѣкоторые способы непосредственнаго доказательства этого начала.

Несомнѣнно, что практическое знаніе статики и употребленіе нѣкоторыхъ простыхъ машинъ были извѣстны въ глубокой древности; объ этомъ свидѣтельствуютъ съ одной стороны нѣкоторыя указанія древнихъ авторовъ, съ другой — остатки громадныхъ и искусно возведенныхъ построекъ древняго Египта, Индіи и древней Греціи, при возведеніи которыхъ необходимо было доставлять издалека и поднимать на большія высоты огромныя сплошныя массы, что не могло быть выполнено безъ посредства механическихъ приспособленій.

Сомнительно, однако, чтобы въ древности существовала правильная теорія статики; по крайней мѣрѣ правильныя теоретическія разсужденія въ первый разъ встрѣчаются только у Архимеда.

По этой причинѣ сочиненія Архимеда считаются древнѣйшими сочиненіями по механикѣ и его называютъ основателемъ этой науки; однако, дошедшіе до насъ остатки сочиненій этого великаго геометра относятся только къ статикѣ (теорія рычага, равновѣсіе плавающихъ тѣлъ, положенія центровъ инерціи однородныхъ площадей).

Первые слѣды изученія вопросовъ динамики встрѣчаются въ первый разъ 17 столѣтій спустя послѣ Архимеда, а именно въ трудахъ знаменитаго художника Леонардо-да-Винчи (родившагося въ 1452 году), который вполнѣ правильно понималъ нѣкоторые изъ законовъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости и законъ возрастанія скорости при этомъ или при свободномъ паденіи [1]). Повидимому Италія въ XV и XVI столѣтіяхъ была мѣстомъ рожденія динамики и возрожденія механики. Бенедетти, умершій въ 1570 году, уже зналъ, что скорость, пріобрѣтенная свободнопадающимъ тѣломъ, не зависитъ отъ массы тѣла; онъ зналъ также о существованіи центробѣжной силы и о томъ, что оторвавшаяся отъ вращающагося тѣла часть его продолжаетъ двигаться по касательной; ему же принадлежитъ первое опредѣленіе понятія о моментѣ вокругъ оси (virtus movens) [2]). Открытіе начала возможныхъ перемѣщеній принадлежитъ, по словамъ Лагранжа [3]), вѣроятно Гвидо Убальди [4]) (1545—1607), который подмѣтилъ это начало въ рычагѣ и въ подвижныхъ блокахъ и показалъ, что, основываясь на этомъ принципѣ, можно вывести законы равновѣсія рычага, блоковъ и вóрота. Галилей (1564—1642) [5]) распро-

---

[1]) Почерпнуто изъ сочиненія Дюринга: Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Dühring. 1872; Дюрингъ же ссылается (стр. 13—16) на сочиненія:

Venturi, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci. Paris, 1797.

Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, 4 vols. Paris, 1838—41.

[2]) Также изъ сочиненія Дюринга, который цитируетъ (стр. 17):

Benedicti Divers. speculat. Taurini, 1585.

[3]) Mécanique Analytique par Lagrange стр. 18, тома I-го, третьяго изданія.

[4]) Guido Ubaldi marquis del Monte, Mechanicorum liber. Pisauri. 1577.

[5]) Главнѣйшія сочиненія Галилея по механикѣ суть:

Discorsi intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quello si muovono. 1612 (по гидромеханикѣ).

Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo. 1632.

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. 1638.

странилъ это начало на остальныя простыя машины, основанныя на принципѣ наклонной плоскости, и разсматривалъ его какъ основной принципъ законовъ равновѣсія всѣхъ машинъ (во 2-мъ предложеніи III-го діалога сочиненія: Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze, 1638 и въ сочиненіи: Della scienza meccanica).

Галилея называютъ основателемъ динамики; ему мы обязаны открытіемъ начала инерціи, изслѣдованіями надъ паденіемъ тѣлъ, открытіемъ законовъ движенія свободно-падающихъ тѣлъ и тѣлъ, брошенныхъ наклонно къ горизонту, открытіемъ начала независимости движеній, изслѣдованіемъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости, открытіемъ соотношенія между длинами и временами качаній маятниковъ; кромѣ того, изъ трудовъ его по статикѣ замѣчательны: дополненіе къ Архимедову доказательству принципа рычага, статика тяжелаго тѣла на наклонной плоскости и гидромеханика, основанная на началѣ возможныхъ перемѣщеній.

Начало возможныхъ перемѣщеній въ примѣненіи къ двумъ силамъ, взаимно-уравновѣшивающимся чрезъ посредство какого-либо простаго механизма, выражено Галилеемъ въ формѣ положенія, что моменты обѣихъ силъ при равновѣсіи системы должны быть равны по величинѣ и противоположны по знаку. Подъ словомъ „моментъ" (momentum, movimentum) Галилей подразумѣваетъ (какъ объясняютъ тѣ, которые толкуютъ его сочиненія) произведеніе изъ силы и проэкціи возможной скорости на направленіе силы; это значеніе слова „моментъ" было удержано Валлисомъ въ его механикѣ, изданной въ 1669 году, въ которой статика механизмовъ также выводится изъ начала возможныхъ перемѣщеній.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что до Галилея понятіе о величинѣ силы не было еще установлено и поэтому онъ затруднялся дать сжатое и вполнѣ ясное понятіе о значеніи того, что онъ подразумѣваетъ подъ словомъ „моментъ"; взамѣнъ опредѣленія, котораго онъ дать не могъ, Галилей поясняетъ этотъ терминъ нѣсколькими другими наименованіями, которыя впослѣдствіи, по почину различныхъ авторовъ, въ свою очередь сдѣлались терминами; напримѣръ, въ 3-мъ днѣ Discorsi встрѣчаемъ слѣдующую фразу: „l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del discendere".

Della scienza meccanica; это сочиненіе издано на итальянскомъ языкѣ семь лѣтъ спустя послѣ смерти Галилея, но раньше, въ 1634 году, оно появилось въ переводѣ на французскій языкъ: Mersenne, Les mécaniques de Galilée. Paris.

Обобщеніе начала возможныхъ перемѣщеній на всякія системы матерьяльныхъ точекъ было указано Иваномъ Бернулли (въ письмѣ къ Вариньону) въ 1717 году *), который выразилъ его въ слѣдующей формѣ: „Если какія-либо силы приложены какимъ-либо образомъ и дѣйствуютъ посредственно или непосредственно, то равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если сумма положительныхъ *энергій* равняется суммѣ отрицательныхъ. Подъ энергіей надо подразумѣвать произведеніе изъ силы и проэкціи перемѣщенія на направленіе силы; притомъ надо считать энергію положительною или отрицательною, смотря по знаку проэкціи".

Терминъ: „vitesse virtuelle" введенъ Ив. Бернулли; прилагательное „virtuel" происходитъ отъ латинскаго „virtus", равнозначущаго итальянскому „talento", что значитъ *способность, мощь;* это прилагательное выражаетъ, что vitesse virtuelle есть принадлежность, составная часть момента. Слово „возможный" не есть точный переводъ слова virtuel; точный переводъ термина Бернулли былъ бы: „скорость, входящая въ составъ момента".

Наиболѣе обширное и многостороннее развитіе начала возможныхъ перемѣщеній мы находимъ въ аналитической механикѣ Лагранжа, въ которой всѣ уравненія статики, динамики и гидромеханики выводятся изъ этого начала и начала д'Аламбера. Эта книга, появившаяся въ первый разъ въ 1788 году **), есть самое капитальное сочиненіе по механикѣ и не утратила своей новизны даже и до нашихъ дней; можно сказать съ полною увѣренностью, что къ механикѣ Лагранжа прибавлено до настоящаго времени весьма немногое.

Такъ какъ начало возможныхъ перемѣщеній не настолько очевидно, чтобы можно было принять его безъ доказательства, то Лагранжъ, въ первомъ отдѣлѣ своей книги, приводитъ одно изъ двухъ своихъ доказательствъ этого начала; это доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Идея этого доказательства заключается въ замѣнѣ всѣхъ взаимноуравновѣшивающихся задаваемыхъ силъ $F_1, F_2, \ldots F_n$ реакціями особой связи, состоящей изъ одной нити, обходящей систему сложныхъ блоковъ и натягиваемой вѣсомъ одного груза; при этомъ предполагается,

---

*) Это письмо помѣщено въ книгѣ: Nouvelle mécanique. P. Varignon. Paris, 1725.

**) Книга эта состоитъ изъ двухъ частей: статики съ гидростатикою и динамики съ гидродинамикою; первыя главы статики, гидростатики, динамики и гидродинамики заключаютъ въ себѣ весьма подробное изложеніе значенія и историческаго развитія разныхъ принциповъ механики.

что *всѣ связи* суть *идеальныя*, что *на блокахъ нѣтъ тренія*, что *нить не обладаетъ жесткостью и что натяженіе ея одинаково по всей длинѣ*.

Примѣчаніе. Натяженіе нити въ какомъ-либо ея сѣченіи есть равнодѣйствующая всѣхъ молекулярныхъ силъ, которыя дѣйствуютъ изъ частицъ, находящихся по одну сторону сѣченія, на частицы, находящіяся по другую сторону его; если дѣйствительно разрѣзать нить по этому сѣченію (перпендикулярному къ длинѣ нити), то, чтобы образовавшіяся оконечности нити не отдѣлились другъ отъ друга, придется къ каждой изъ этихъ оконечностей приложить по силѣ; обѣ силы будутъ равны, прямопротивоположны и перпендикулярны къ сѣченію; каждая изъ этихъ силъ представляетъ величину натяженія нити въ разсматриваемомъ сѣченіи. —

Предположимъ, что величины силъ F_1, F_2,....F_n находятся въ соизмѣримыхъ отношеніяхъ между собою, такъ что можно подобрать силу P, которая въ цѣлое число k_1 разъ менѣе силы F_1, вмѣстѣ съ тѣмъ въ цѣлое число k_2 разъ менѣе силы F_2, и т. д.:

$$F_1 = k_1 P, \ F_2 = k_2 P, \dots . F_n = k_n P.$$

Затѣмъ представимъ себѣ механизмъ, состоящій изъ n полиспастовъ, то-есть изъ n системъ подвижныхъ блоковъ и n системъ неподвижныхъ блоковъ; блоки каждой системы сидятъ свободно на одной оси, вокругъ которой они могутъ вращаться независимо другъ отъ друга. Къ осямъ подвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены матерьяльныя точки: къ оси M_1 (черт. 46) прикрѣплена точка m_1, къ оси M_2 — точка m_2, и т. д. Оси неподвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены на направленіяхъ силъ F_1, F_2,..., а именно: ось A_1 прикрѣплена на продолженіи силы F_1, ось A_2— на направленіи силы F_2, и т. д.

Далѣе, представимъ себѣ, что къ оси M_1 прикрѣпленъ одинъ конецъ тонкой, гибкой и нерастяжимой нити, которая затѣмъ обходитъ по одному разу всѣ блоки всѣхъ полиспастовъ; число блоковъ на каждой оси и расположеніе нити таковы, что нить между M_1 и A_1 проходитъ k_1 разъ, между M_2 и A_2 проходитъ k_2 разъ, и т. д.; наконецъ, обойдя всѣ блоки, нить свѣшивается съ послѣдняго неподвижнаго блока внизъ, поддерживая грузъ, вѣсъ котораго равенъ P.

На чертежѣ 46-мъ изображена система полиспастовъ для трехъ точекъ m_1, m_2, m_3, гдѣ $k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$; надо замѣтить, что нить при переходѣ отъ одного полиспаста къ другому, должна сходить съ неподвижнаго блока и направляться къ неподвижному же блоку другаго

полиспаста; такъ и проведены части B_1 и B_2 на чертежѣ 46-мъ; если бы мы провели часть B_1 къ одному изъ блоковъ, сидящихъ на оси M_2, то это было бы ошибкою въ конструкціи механизма.

Радіусы всѣхъ блоковъ должны быть ничтожно-малы: на черт. 46-мъ блокамъ приданы конечные размѣры и радіусамъ блоковъ, сидящихъ на одной оси, даны неодинаковые радіусы; это сдѣлано только для наглядности чертежа.

Понятно, что послѣ введенія этого механизма силы F_1, F_2, ... должны быть отняты, такъ какъ грузъ P, черезъ посредство нити и полиспастовъ, тянетъ точку M_1 къ точкѣ A_1 съ силою k_1P, точку M_2 къ точкѣ A_2 съ силою k_2P, и т. д.

Для того, чтобы система точекъ m_1, m_2,.... при дѣйствіи натяженій, замѣняющихъ силы F_1, F_2,.... и при дѣйствіи реакцій тѣхъ связей, которымъ она подчинена, могла находиться въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы грузъ P, стремясь опуститься внизъ и сдвинуть съ мѣста точки m_1, m_2, m_3, ..., побуждалъ ихъ получить только *невозможныя* перемѣщенія; но это требованіе равносильно условію, *чтобы при возможныхъ перемѣщеніяхъ грузъ не опускался*. Выразимъ это условіе формулою.

Пусть $\varepsilon_1 = M_1E_1$ (черт. 46), $\varepsilon_2 = M_2E_2$,.... суть варьяціи положеній или ничтожно-малыя перемѣщенія точекъ. Если направленіе перемѣщенія точки составляетъ острый уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкахъ M_2 и M_3 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе EA между новымъ положеніемъ точки m и точкою A будетъ менѣе первоначальнаго разстоянія на длину $(AM - AE)$; но эта длина разнится на величину высшаго порядка малости отъ длины MC (см. въ точкахъ M_2 и M_3 на чертежѣ 46-мъ), гдѣ C есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки E на направленіе MA.

Вслѣдствіе этого сумма длинъ нитей между точками M_2 и A_2 уменьшится на длину

$$k_2\overline{(M_2C_2)} = k_2\,\varepsilon_2\cos(\varepsilon_2,\ F_2)$$

и если бы всѣ остальныя точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P опустился бы на ту же самую длину.

Если направленіе перемѣщенія составляетъ тупой уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкѣ M_1 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе между точкою M и точкою A увеличится на длину

$$k_1\overline{(M_1C_1)} = -\,k_1\varepsilon_1\cos(\varepsilon_1,\ F_1)$$

I-82.

и если бы всѣ остальныя точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P поднялся бы на такую длину.

Если всѣ точки получатъ какія-либо перемѣщенія, то грузъ P опустится на длину, равную:

$$k_1\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1, F_1) + k_2\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2, F_2) + \ldots + k_n\varepsilon_n \cos(\varepsilon_n, F_n),$$

причемъ поднятіе груза скажется, какъ отрицательное опусканіе.

Условіе, что грузъ не долженъ опускаться при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы, выразится формулою:

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) \leqslant 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) \leqslant 0.$$

Если всѣ связи удерживающія, то возможныя варьяціи должны удовлетворять уравненіямъ (559, bis) § 75-го, а слѣдовательно, тогда каждой совокупности возможныхъ варьяцій соотвѣтствуетъ возможная же совокупность варьяцій равныхъ и противоположныхъ.

Принявъ во вниманіе это обстоятельство, можемъ заключить, что если всѣ связи удерживающія, то грузъ P не долженъ ни опускаться, ни подниматься при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы уже доказали, что онъ не долженъ опускаться, но если возможны перемѣщенія $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, при которыхъ грузъ поднимается, то возможны также перемѣщенія: $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots -\varepsilon_n$, равныя и прямопротивоположныя первымъ; при нихъ грузъ на столько же опустится, на сколько онъ поднимется при первыхъ; а слѣдовательно, при положеніи равновѣсія такой системы, такія перемѣщенія, при которыхъ грузъ поднимается, должны быть также невозможны.

Итакъ, если всѣ связи удерживающія, то положеніе равновѣсія системы точекъ возможно только тогда, когда при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ удовлетворяется равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(567,\ b)}$$

Таково доказательство Лагранжа, помѣщенное имъ въ Mécanique analytique; другое доказательство, помѣщенное въ Théorie des fonctions analytiques (оно также помѣщено, въ видѣ прибавленія въ концѣ 2 тома, 3-го изданія, Mécanique analytique, просмотрѣннаго и исправленнаго Бертраномъ), не принадлежитъ къ числу непосредственныхъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, это есть выводъ выраженій реакцій связей.

Изъ числа другихъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, упомянемъ объ доказательствахъ Фурье [1]), Поансо [2]), Коши [3]), Ампера [4]), Карла Неймана [5]). Амперово доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Доказательство Ампера, подобно доказательству Коши, относится непосредственно не къ началу возможныхъ перемѣщеній, но къ выводу выраженій реакцій идеальной связи; оно можетъ быть раздѣлено на двѣ части: въ первой доказывается, что реакціи идеальной связи направлены по дифференціальнымъ параметрамъ ея, во второй части доказывается, что во всѣхъ реакціяхъ одной и той же связи множитель λ одинъ и тотъ же.

Первая часть доказательства заключается въ слѣдующемъ. Пусть точки $m_1, m_2, \dots m_n$ связаны одною связью (491, b) (стр. 315), не заключающею времени. Если введемъ $(3n-3)$ новыхъ связей, такихъ, которыя закрѣпятъ точки $m_2, m_3, \dots m_n$ въ занимаемыхъ ими положеніяхъ $M_2, M_3, \dots M_n$, координаты коихъ суть: (a_2, b_2, c_2), $(a_3, b_3, c_3), \dots$, то уравненіе связи обратится въ уравненіе поверхности:

$$и(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \dots a_n, b_n, c_n) = 0,$$

а реакція связи въ точкѣ m_1 — въ реакцію этой поверхности; но реакція поверхности направлена по дифференціальному параметру P_1, а потому и реакція связи имѣетъ то же самое направленіе. Это самое относится и

---

[1]) Fourier. Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des momens. Journal de l'école polytechnique. II Tome, 5 Cahier.

[2]) Poinsot. Eléments de Statique.

[3]) Доказательство Коши можно, между прочимъ, найти въ механикѣ Муаньо.

[4]) Ampère. Sur le principe des vitesses virtuelles. J. de l'école polytechnique. T. VI, Cah. 13.

[5]) Neumann. Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig. 1879.

У-82.

ко всякой изъ точекъ, связываемыхъ связью; слѣдовательно, реакціи связи должны выражаться формулами (511) страницы 332-й.

Во второй части доказательства предполагается извѣстнымъ, что реакціи идеальнаго стержня равны и прямопротивоположны; имѣется въ виду доказать, что множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ въ выраженіяхъ (511) равны между собою.

Предположимъ, что введены $(3n-6)$ новыхъ связей, закрѣпляющихъ всѣ точки, за исключеніемъ точекъ m_1 и m_2; черезъ это всякія перемѣщенія точекъ $m_3, m_4, \ldots m_n$ сдѣлаются невозможными и равенство вида: (588) (§ 81), которому должны будутъ удовлетворять возможныя перемѣщенія точекъ m_1 и m_2, получитъ слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 \cos(P_1, Ds_1) + P_2 Ds_2 \cos(P_2, Ds_2) = 0.$$

Присоединимъ затѣмъ еще четыре связи: двѣ неподвижныя поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_1, и двѣ другія поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_2; линія пересѣченія первыхъ двухъ должна быть касательною къ направленію параметра P_1, а линія пересѣченія вторыхъ двухъ поверхностей — касательною къ дифференціальному параметру P_2. Вслѣдствіе такого стѣсненія точекъ m_1 и m_2, перемѣщенія ихъ станутъ возможными только по направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ P_1 и P_2 или по направленіямъ прямопротивоположнымъ, т.-е.

$$\cos(P_1, Ds_1) = \pm 1, \ \cos(P_2, Ds_2) = \pm 1,$$

а потому вышеприведенное равенство получитъ видъ:

$$\pm P_1 Ds_1 \pm P_2 Ds_2 = 0 \, ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (591)$$

но дифференціальные параметры P_1, P_2 и перемѣщенія Ds_1, Ds_2 суть величины положительныя, слѣдовательно, равенство (591) требуетъ, чтобы знаки косинусовъ были противоположны, т.-е., если перемѣщеніе Ds_1 направлено по P_1, то перемѣщеніе Ds_2 должно быть направлено противоположно P_2, или обратно; во всякомъ случаѣ, равенству (591) можно дать слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 = P_2 Ds_2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (592)$$

Далѣе, свяжемъ точки m_1 и m_2 идеальными стержнями съ нѣкоторою постороннею матерьяльною точкою A, къ которой приложимъ нѣкоторую силу F такимъ образомъ, чтобы вся система оставалась въ положеніи равновѣсія.

Эта сила F разовьетъ реакціи Λ_1 и Λ_2 въ стержняхъ AM_1 и AM_2, а чрезъ посредство стержней разовьются въ точкахъ M_1 и M_2 реакціи тѣхъ связей, которымъ эти точки подчинены.

Надо замѣтить, что возможныя положенія точки A образуютъ нѣкоторую поверхность, и для того, чтобы эта точка находилась въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы сила F была перпендикулярна къ этой поверхности, а слѣдовательно, и ко всякой линіи, которую можетъ описывать точка A при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ M_1 и M_2; пусть $D\sigma$ есть элементъ одной изъ такихъ линій, т.-е. возможное перемѣщеніе точки A; для равновѣсія необходимо, чтобы былъ:

$$\cos(F,\ D\sigma) = 0;$$

съ другой же стороны, такъ какъ сила F и реакціи $A\Lambda_1$ и $A\Lambda_2$ (черт. 47), приложенныя къ точкѣ A, должны взаимно уравновѣшиваться, то должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$\Lambda_1 D\sigma \cos(AM_1,\ D\sigma) + \Lambda_2 D\sigma \cos(AM_2,\ D\sigma) = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(593)}$$

при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній точки A.

Точка M_1 тоже находится въ положеніи равновѣсія, поэтому реакція $\overline{M_1\Lambda_1}$ стержня M_1A, реакція $\lambda_1 P_1$ связи $s = 0$ и реакція $\mathfrak{R}_1$ линіи пересѣченія двухъ поверхностей, на которой должна оставаться точка M_1, — эти три реакціи должны взаимно уравновѣшиваться; но такъ какъ реакція $\mathfrak{R}_1$ перпендикулярна къ направленію P_1, то, проэктируя эти три реакціи на это направленіе, получимъ:

$$\Lambda_1 \cos(\overline{M_1A},\ P_1) + \lambda_1 P_1 = 0,$$

или

$$\Lambda_1 \cos(\overline{AM_1},\ P_1) = \lambda_1 P_1\,; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(594)}$$

точно также получимъ слѣдующее равенство:

$$\Lambda_2 \cos(\overline{AM_2},\ P_2) = \lambda_2 P_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(595)}$$

Къ этому надо еще прибавить, что возможныя перемѣщенія концовъ идеальныхъ стержней должны удовлетворять равенствамъ:

$$Ds_1 \cos(\overline{AM_1},\ Ds_1) = D\sigma \cos(\overline{AM_1},\ D\sigma) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(596)}$$

$$Ds_2 \cos(\overline{AM_2},\ Ds_2) = D\sigma \cos(\overline{AM_2},\ D\sigma) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(597)}$$

Помножимъ теперь равенство (594) на Ds_1, вычтемъ изъ него равенство (595), помноженное на Ds_2, и примемъ во вниманіе равенство (592); получимъ:

$$\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM_1}, P_1) - \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM_2}, P_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1;$$

такъ какъ Ds_1 направлено по P_1, когда Ds_2 направлено противоположно P_2 или обратно, то первую часть этого равенства можно представить такъ:

$$\pm[\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM_1}, Ds_1) + \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM_2}, P_2)];$$

изъ равенствъ же (596), (597) и (593) слѣдуетъ, что эта сумма равна нулю; а потому должно быть

$$(\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1 = 0$$

при всякихъ значеніяхъ перемѣщенія Ds_1; это требуетъ, чтобы λ_1 равнялось λ_2.

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = \lambda_n .$$

Доказательство Коши отличается отъ доказательства Ампера только тѣмъ, что точки m_1 и m_2 связываются равноплечнымъ рычагомъ и притомъ принципъ рычага предполагается уже извѣстнымъ.

ГЛАВА VI.

Объ интегралахъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

§ 83. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія данной системы точекъ; число постоянныхъ произвольныхъ.

Въ § 71-мъ было сказано, какъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія (517) § 70-го получить n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка, заключающихъ столько же независимыхъ координатъ и ихъ производныя по времени.

Эта совокупность дифференціальныхъ уравненій должна послужить для опредѣленія вида тѣхъ n функцій отъ времени, которыми выражаются независимыя координаты системы движущихся точекъ.

Если эти n функцій будутъ опредѣлены, то функціи времени, выражающія законъ измѣненія p зависимыхъ координатъ, опредѣлятся изъ уравненій связей (491, 1), (491, 2), ... (491, p).

Для сохраненія симметріи въ тѣхъ формулахъ и выраженіяхъ, которыя мы будемъ писать въ настоящей главѣ, предположимъ, что декартовы координаты могутъ быть выражены функціями отъ n независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_n$; при этомъ мы можемъ даже допустить, что эти функціи заключаютъ время явнымъ образомъ. Пусть (526) (§ 72) суть эти выраженія.

Дѣлая такое предположеніе, мы нисколько не ограничиваемъ общности нашихъ разсужденій, потому что независимыя декартовы координаты могутъ быть разсматриваемы, какъ независимые координатные параметры.

Для опредѣленія вида тѣхъ функцій времени:

$$q_1 = \mathfrak{f}_1(t),\ q_2 = \mathfrak{f}_2(t), \ldots . q_n = \mathfrak{f}_n(t), \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(598)}$$

которыя выражаютъ законъ измѣненія координатныхъ параметровъ при движеніи системы точекъ подъ вліяніемъ данныхъ силъ, надо найти надлежащее число интеграловъ совокупности (531) (§ 72) дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Относительно интегрированія и интеграловъ этихъ дифференціальныхъ уравненій намъ придется высказать много сходнаго съ тѣмъ, что уже сказано въ § 18 (стр. 46—59) относительно интегрированія дифференціальныхъ уравненій движенія одной свободной матерьяльной точки; поэтому, при изложеніи нѣкоторыхъ пунктовъ настоящаго параграфа, мы будемъ выражаться сжато, безъ подробныхъ объясненій.

Функціи (598) должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (531), обращая ихъ въ тождества.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (531) можетъ быть произведено по способу составленія рядовъ:

$$q_k = q_{ko} + q'_{ko}\vartheta + q''_{ko}\frac{\vartheta^2}{1.2} + q'''_{ko}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots, ^{*)} \ldots (599, k)$$

выражающихъ разложенія искомыхъ функцій въ строки, расположенныя по возрастающимъ степенямъ разности $(t-t_0)=\vartheta$; t_0 есть какой-либо моментъ движенія; величины координатныхъ параметровъ въ моментъ t_0 мы условимся обозначать знаками:

$$q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}, \ldots \ldots \ldots (600)$$

а величины производныхъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ — знаками:

$$q'_{10}, q'_{20}, \ldots q'_{n0}, \ldots \ldots \ldots (601)$$

и т. д. Значенія вторыхъ и высшихъ производныхъ: $q''_{ko}, q'''_{ko}, \ldots$ для момента t_0 выразятся функціями: отъ t_0, отъ величинъ (600) и отъ величинъ (601); эти выраженія получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531) и изъ производныхъ отъ этихъ уравненій по времени.

Ряды (599) должны выражать искомыя функціи (598); слѣдовательно, эти функціи должны заключать, кромѣ t, еще t_0, величины (600) и величины (601), т.-е.:

$$q_k = \mathfrak{f}_k(t, t_0, q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}, q'_{10}, q'_{20}, \ldots q'_{n0}), \ . \ (598, k)$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, ... n.

Если изъ дифференціальныхъ уравненій (531) помощью какихъ-либо преобразованій можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \ldots \ldots \ldots (602, 1)$$

гдѣ φ_1 есть какая-либо функція отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n, q'_1, q'_2, \ldots q'_n$, то, интегрируя уравненіе (602, 1), получимъ равенство:

$$\varphi_1(t, q_1, q_2, \ldots q_n, q'_1, q'_2, \ldots q'_n) = C_1, \ldots (603, 1)$$

---

*) k есть которое-либо изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

гдѣ C_1 есть произвольная постоянная; равенство (603, 1) есть одинъ изъ *первыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Уравненіе (602, 1) обращается въ тождество, если вмѣсто вторыхъ производныхъ $q_1'', q_2'', \ldots q_n''$ подставимъ въ него выраженія, получаемыя для этихъ производныхъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли n первыхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1,\ \varphi_2 = C_2, \ldots \varphi_n = C_n, \ldots\ldots \quad \textbf{(603)}$$

такихъ, что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \ldots \frac{d\varphi_n}{dt} = 0 \ldots\ldots \quad \textbf{(602)}$$

равносильны совокупности дифференціальныхъ уравненій (531), т.-е., что всѣ уравненія (531) могутъ быть получены изъ уравненій (602); въ такомъ случаѣ эти n первыхъ интеграловъ (603) могутъ служить для выраженія величинъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$ въ функціяхъ отъ времени t, отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k' = \mathfrak{F}_k(t, q_1, q_2, \ldots q_n, C_1, C_2, \ldots C_n), \ldots \quad \textbf{(604, k)}$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, ... n.

Если изъ n первыхъ интеграловъ (603), помощью какихъ-либо преобразованій, можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(605, 1)}$$

гдѣ Φ_1 есть какая-либо функція отъ t, отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, то, интегрируя уравненіе (605, 1), получимъ равенство:

$$\Phi_1(t, q_1, q_2, \ldots q_n, C_1, C_2, \ldots C_n) = \Gamma_1, \ldots \quad \textbf{(606, 1)}$$

гдѣ Γ_1 есть произвольная постоянная; равенство (606, 1) есть одинъ

П-83.

изъ *вторыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли $н$ такихъ вторыхъ интеграловъ:

$$\Phi_1 = \Gamma_1, \ \Phi_2 = \Gamma_2, \dots \Phi_н = \Gamma_н, \dots \quad \textbf{(606)}$$

что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \ \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \dots \frac{d\Phi_н}{dt} = 0 \dots \quad \textbf{(605)}$$

равносильны совокупности первыхъ интеграловъ (603), т.-е., что всѣ равенства (603) могутъ быть получены изъ уравненій (605); въ такомъ случаѣ эти $н$ вторыхъ интеграловъ (606) могутъ служить для выраженія координатныхъ параметровъ въ функціяхъ отъ времени t и $2н$ произвольныхъ постоянныхъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k = \psi_k(t, C_1, C_2, \dots C_н, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_н), \dots \quad \textbf{(598, A, k)}$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, ... $н$.

Выраженія для q_k' получатся или непосредственно изъ выраженій (598, A), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_k или изъ выраженій (604), если замѣнить въ нихъ $q_1, q_2, \dots q_н$ функціями $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_н$.

Между произвольными постоянными $C_1, C_2, \dots C_н, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_н$, величиною t_0 и величинами (600) и (601) существуетъ зависимость, выражаемая $2н$ равенствами вида:

$$\varphi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \dots q_{н0}, q'_{10}, q'_{20}, \dots q'_{н0}) = C_k \dots \quad \textbf{(607, k)}$$

$$\Phi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \dots q_{н0}, C_1, C_2, \dots C_н) = \Gamma_k, \dots \quad \textbf{(608, k)}$$

(гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, ... $н$).

Эта же зависимость можетъ быть представлена подъ видомъ слѣдующихъ формулъ, выражающихъ, что величины (600) и (601) могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи отъ t_0 и $2н$ произвольныхъ постоянныхъ:

$$q_{k0} = \psi_k(t_0, C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n) \quad . \quad . \quad \mathbf{(609, k)}$$

$$q'_{k0} = \psi_k'(t_0, C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n); \quad . \quad . \quad \mathbf{(610, k)}$$

отсюда слѣдуетъ, что величины (600) и (601) столь же произвольны, какъ и постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$.

Функціи ψ_k (598, A) обратятся въ функціи $\mathfrak{f}_k$ (598), если произвольныя постоянныя C_k и Γ_k выразить по формуламъ (607) и (608) функціями отъ t_0 и отъ величинъ (600) и (601).

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ системы точекъ; величины (600) суть координатные параметры *начальнаго положенія* системы и могутъ быть названы *начальными величинами координатныхъ параметровъ*; величины (601) могутъ быть названы *начальными величинами производныхъ* $q_1', q_2', \ldots q_n'$; проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ *начальныхъ скоростей* точекъ системы опредѣлятся изъ формулъ (533) § 73-го по величинамъ (600) и (601).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начальнаго момента, полагая $t_0=0$; тогда начальныя величины координатныхъ параметровъ будемъ обозначать знаками: $k_1, k_2, \ldots k_n$, а начальныя величины первыхъ производныхъ отъ координатныхъ параметровъ — знаками: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$; начальныя величины декартовыхъ координатъ точекъ системы будемъ обозначать буквами: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots a_n, b_n, c_n$, а начальныя величины проэкцій скоростей точекъ системы на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ — буквами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Изъ вышесказаннаго видно, *что функціи времени, выражающія законъ измѣненія координатныхъ параметровъ движущейся системы n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ p связями, заключаютъ въ себѣ 2н постоянныхъ произвольныхъ; столько же произвольныхъ постоянныхъ заключаютъ и тѣ функціи времени, которыя выражаютъ законъ измѣненія декартовыхъ координатъ всѣхъ точекъ системы.*

Существованіе произвольныхъ постоянныхъ въ функціяхъ ψ_k показываетъ, что при дѣйствіи данныхъ задаваемыхъ силъ система можетъ совершать безчисленное множество различныхъ движеній, различающихся количественными значеніями произвольныхъ постоянныхъ, или, что то же самое, количественными значеніями начальныхъ величинъ координатныхъ параметровъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Примѣчаніе. При помощи выраженій (543) § 74-го, первыя части первыхъ интеграловъ (603) могутъ быть преобразованы въ функціи отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$; эти функціи будемъ обозначать знакомъ ϕ; напримѣръ, интегралъ (603, 1) получитъ слѣдующій видъ:

$$\phi_1(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C \quad \ldots \quad \textbf{(603, 1, bis)}$$

Начальныя значенія величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ будемъ обозначать такъ:

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n.$$

§ 84. Интегралы совокупности (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Въ § 74-мъ было показано, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены совокупностью Гамильтоновыхъ дифференціальныхъ уравненій (554) (стр. 376) перваго порядка.

Интеграломъ этой совокупности (554) называется всякое равенство вида:

$$\phi(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C, \quad \ldots \quad \textbf{(611)}$$

(гдѣ C — произвольная постоянная), удовлетворяющее слѣдующему требованію: полная производная по времени отъ функціи ϕ, т.-е. сумма

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) \quad \ldots \ldots \quad \textbf{(612)}$$

должна обратиться въ нуль тождественно, когда вмѣсто производ-

ныхъ q_k' и p_k' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (554).

Вся совокупность (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка будетъ вполнѣ проинтегрирована, если, $q_1, q_2, \ldots q_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_n$ будутъ выражены такими функціями времени, которыя обращаютъ дифференціальныя уравненія въ тождества.

Выраженія эти могутъ быть получены, если найдемъ $2n$ интеграловъ

$$\phi_1 = C_1,\ \phi_2 = C_2, \ldots \phi_{2n} = C_{2n} \quad \ldots \ldots \quad \textbf{(613)}$$

данной совокупности (554); притомъ эти интегралы должны быть таковы, чтобы совокупность равенствъ:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = 0,\ \frac{d\phi_2}{dt} = 0, \ldots \frac{d\phi_{2n}}{dt} = 0 \quad \ldots \ldots \quad \textbf{(614)}$$

была равносильна совокупности (554), то есть, чтобы чрезъ рѣшеніе равенствъ (614) относительно $p_1', p_2', \ldots p_n', q_1', q_2', \ldots q_n'$ получились бы всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554).

Если такіе $2n$ интеграловъ будутъ найдены, то, рѣшивъ ихъ относительно величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, получимъ искомыя выраженія этихъ величинъ въ функціяхъ времени; эти функціи будутъ заключать, кромѣ времени, $2n$ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{2n}$.

Всякое равенство вида:

$$F(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{2n}) = C \quad \ldots \ldots \quad \textbf{(615)}$$

есть интегралъ совокупности (554), потому что полная производная первой части его, а именно:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \phi_2}\frac{d\phi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \phi_{2n}}\frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ $q_1', q_2', \ldots q_n', p_1', p_2', \ldots p_n'$ вторыми частями дифференціальныхъ уравненій (554), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя по t отъ $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{2n}$.

П-84.

Всякій новый интегралъ:

$$\varphi(t,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n,\ p_1,\ p_2,\ldots p_n)=C\ .\ .\ .\ \textbf{(611)}$$

той же совокупности (554), отличающійся отъ $2n$ интеграловъ (613), можетъ быть представленъ подъ видомъ (615). Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ себѣ, что мы исключили изъ φ величины $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ при помощи равенствъ (613); повидимому, φ должно тогда обратиться въ функцію отъ t, C_1, C_2, $C_3, \ldots C_{2n}$, т.-е., въ функцію отъ t, φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_{2n}$

$$\varphi=f(t,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots \varphi_{2n}),$$

но легко убѣдиться, что функція f не должна заключать времени явнымъ образомъ; въ самомъ дѣлѣ, полная производная отъ f по t, то-есть:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \varphi_{2n}}\frac{d\varphi_{2n}}{dt}$$

должна обращаться, при посредствѣ равенствъ (614), въ нуль; поэтому дожно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

значитъ функція f должна быть функціею только отъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n}$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что хотя совокупныя дифференціальныя уравненія (554) имѣютъ безчисленное множество интеграловъ, но только $2n$ изъ нихъ суть интегралы независимые, всѣ же прочіе интегралы суть нѣкоторыя комбинаціи независимыхъ интеграловъ; притомъ любые $2n$ интеграловъ могутъ быть приняты за независимые, если изъ нихъ, путемъ полнаго дифференцированія по времени, могутъ быть получены всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554), какъ указано относительно интеграловъ (613).

Каждый изъ интеграловъ совокупности (554), по замѣщеніи въ немъ величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ выраженіями (542) параграфа 74-го, обращается въ одинъ изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія (531) параграфа 73-го; поэтому послѣднія

имѣютъ безчисленное множество первыхъ интеграловъ, но только $2n$ изъ нихъ суть интегралы независимые, прочіе же первые интегралы суть комбинаціи независимыхъ первыхъ интеграловъ.

Въ слѣдующихъ трехъ главахъ будутъ показаны нѣкоторые пріемы, при помощи которыхъ могутъ быть найдены нѣкоторые изъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемыя силы и связи удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ.

ГЛАВА VII.

Законъ движенія центра инерціи.

§ 85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Сложимъ дифференціальныя уравненія (517, a 1) (517, a 2) . . . . . (517, a n) параграфа 70-го, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda(\text{в}_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_p}{\partial x_i}; \ldots \textbf{(616, a)}$$

точно также, сложивъ всѣ тѣ уравненія (517), которыя заключаютъ вторыя производныя отъ координатъ y, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i + \lambda(\text{в}_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_p}{\partial y_i}; \ldots \textbf{(616, b)}$$

сложивъ затѣмъ всѣ остальныя уравненія, т.-е.: (517, c 1) (517, c 2). . . . (517, c n), получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i + \lambda(\text{в}_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(\text{в}_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i} \ldots \textbf{(616, c)}$$

Вторыя части этихъ уравненій суть проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ *геометрической суммы всѣхъ задаваемыхъ силъ и всѣхъ реакцій связей, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ системы.*

§ 86. Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Если геометрическая сумма всѣхъ силъ и всѣхъ реакцій связей равна нулю во все время движенія системы, то тогда дифференціальныя уравненія (616) обратятся въ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = 0;\quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = 0;\quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = 0 \quad \ldots\ldots (617)$$

Очевидно, каждое изъ этихъ уравненій можетъ быть проинтегрировано два раза: первые интегралы будутъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = C_1;\quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = C_2;\quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = C_3;\quad \ldots\ldots (618)$$

вторые интегралы:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i &= C_1 t + \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i &= C_2 t + \Gamma_2, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i &= C_3 t + \Gamma_3, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (619)$$

Представимъ себѣ точку C, координаты (x_c, y_c, z_c) которой связаны съ координатами всѣхъ точекъ системы слѣдующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ y_c &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ z_c &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (620)$$

Тогда интеграламъ (619) можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$Mx_c = C_1t + \Gamma_1;\ My_c = C_2t + \Gamma_2;\ Mz_c = C_3t + \Gamma_3, \quad \ldots \quad \textbf{(619 bis)}$$

гдѣ

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(621)}$$

есть *масса всей системы*, т.-е., сумма массъ всѣхъ точекъ системы.

Интегралы (619 bis) выражаютъ, что точка C движется равномѣрно и прямолинейно, причемъ скорость ея такова, что еслибы эта точка была матерьяльною точкою и масса ея равнялась бы массѣ всей системы, то количество движенія этой точки C равнялось бы геометрической суммѣ количествъ движеній всѣхъ точекъ системы.

Эта точка C называется *центромъ инерціи* системы точекъ.

§ 87. Законъ движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

На основаніи выраженій (620) первыя части дифференціальныхъ уравненій (616) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2},\ M\frac{d^2y_c}{dt^2},\ M\frac{d^2z_c}{dt^2};$$

тогда эти уравненія (616) обращаются въ дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, совпадающей съ центромъ инерціи системы, масса которой равна массѣ всей системы и къ которой какъ будто приложены всѣ задаваемыя силы и всѣ реакціи связей, приложенныя въ дѣйствительности къ точкамъ системы.

Такимъ образомъ дифференціальныя уравненія (616) выражаютъ слѣдующій *общій законъ движенія* какой-либо системы точекъ, называемый *закономъ движенія центра инерціи*:

Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ движется такимъ образомъ, какъ будто бы это была свободная матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всѣ задаваемыя силы и реакціи связей.

Въ такомъ видѣ этотъ законъ есть дѣйствительно *общій* законъ

движенія, такъ какъ онъ имѣетъ мѣсто при всякихъ задаваемыхъ силахъ и при всякихъ связяхъ; подчиняя связи и задаваемыя силы нижеслѣдующимъ ограниченіямъ, мы получимъ слѣдующія специальныя формы этого закона, имѣющія мѣсто во многихъ вопросахъ и задачахъ механики.

1. Когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда уравненія (616) получаютъ слѣдующій видъ:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}X_i;\quad M\frac{d^2y_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i;\quad M\frac{d^2z_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}Z_i,\ldots\mathbf{(616,A)}$$

т.-е. *когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда центръ инерціи системы движется, какъ свободная матерьяльная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложены всѣ задаваемыя силы;* эта спеціальная форма закона движенія центра инерціи имѣетъ мѣсто, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

a) когда всѣ точки системы свободны,

b) когда реакціи связей попарно равны и прямопротивоположны; напримѣръ, если всѣ связи суть идеальныя связи, указанныя въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ и 55-мъ (см. стр. 336—338, 344—346) и соединяющія точки системы между собою, но не съ посторонними или неподвижными точками.

2. *Когда не только геометрическая сумма всѣхъ реакцій равна нулю, но также равна нулю и геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ,* тогда получается еще болѣе частная форма закона движенія центра инерціи, а именно *тогда центръ инерціи системы движется такъ, какъ двигалась бы по инерціи матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы;* въ этихъ случаяхъ мы имѣемъ шесть интеграловъ (618) и (619) дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

Если, напримѣръ, всѣ точки системы свободны и всѣ задаваемыя силы суть силы взаимнодѣйствія между точками системы, попарно равныя и прямопротивоположныя (такъ что всякой силѣ M_if

(черт. 48), приложенной къ одной изъ точекъ, соотвѣтствуетъ сила $M_k f$ равная ей и прямопротивоположная, приложенная къ другой точкѣ системы), то тогда геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ будетъ равна нулю, а потому центръ инерціи системы будетъ двигаться равномѣрно и прямолинейно.

Въ примѣрахъ 61, 62 и 63-мъ (стр. 326—327) центры инерціи системы должны совершать прямолинейныя равномѣрныя движенія, такъ что въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ мы имѣемъ по шести интеграловъ вида (618) и (619).

Въ примѣрѣ 66-мъ (§ 73, стр. 371) центръ инерціи системы совпадаетъ съ центромъ C ромба, реакціи идеальныхъ стержней попарно равны и прямопротивоположны; геометрическая сумма силъ притяженія точекъ системы къ началу координатъ равна $2\mu(m_1+m_2)\rho_c$ и направлена параллельно $\overline{CO}$; въ самомъ дѣлѣ, означивъ абсолютныя координаты вершинъ ромба знаками: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, будемъ имѣть слѣдующія выраженія проэкцій геометрической суммы задаваемыхъ силъ:

$$-\mu[m_1(x_1+x_3)+m_2(x_2+x_4)]=-2\mu(m_1+m_2)x_c$$

$$-\mu[m_1(y_1+y_3)+m_2(y_2+y_4)]=-2\mu(m_1+m_2)y_c,$$

такъ какъ

$$x_1+x_3=x_2+x_4=2x_c \text{ и } y_1+y_3=y_2+y_4=2y_c.$$

Первыя два дифференціальныя уравненія этого примѣра суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы въ полярныхъ координатахъ.

§ 88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣленія положенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Положеніе центра инерціи данной системы матерьяльныхъ точекъ, занимающихъ данныя положенія въ пространствѣ, опредѣляется вычисленіемъ по формуламъ (620) § 86-го или помощью геометрическихъ построеній, основанныхъ на этихъ формулахъ. Мы ограничиваемся нѣсколькими замѣчаніями, касающимися этого предмета.

1) Если выразить положеніе точекъ системы и центра инерціи въ другихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ ξ, η, ζ, то

зависимость между новыми координатами центра инерціи и новыми координатами точекъ системы сохранитъ прежній видъ:

$$\xi_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i; \quad \eta_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i; \quad \zeta_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i, \quad . \; . \; \textbf{(620, bis)}$$

въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи формулъ преобразованія координатъ (часть кинематическая, стр. 56, формулы (45), (46) и проч.).

2) Въ косоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ зависимость между координатами центра инерціи и координатами точекъ системы выражается формулами того же самаго вида (620), какъ и въ прямоугольныхъ координатахъ.

3) Центръ инерціи двухъ матерьяльныхъ точекъ находится на линіи кратчайшаго разстоянія между ними и дѣлитъ это разстояніе на части, обратно пропорціональныя массамъ прилежащихъ матерьяльныхъ точекъ.

4) Центръ инерціи нѣсколькихъ матерьяльныхъ точекъ можетъ быть опредѣленъ помощью ряда послѣдовательныхъ дѣйствій: опредѣливъ положеніе центра инерціи $C(1, 2)$ точекъ m_1 и m_2 и представивъ себѣ, что въ $C(1, 2)$ сосредоточена масса (m_1+m_2), опредѣлимъ положеніе центра инерціи точекъ $C(1, 2)$ и m_3; найденная точка $C(1, 2, 3)$ будетъ центромъ инерціи трехъ точекъ m_1, m_2, m_3, и т. д.

5) Если всѣ точки системы лежатъ въ одной плоскости, то центръ инерціи системы находится въ той же плоскости; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту плоскость за плоскость ΥZ и принявъ во вниманіе, что $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n$, найдемъ: $\xi_c = 0$.

6) Если всѣ точки системы лежатъ на одной прямой, то центръ инерціи находится на той же прямой; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту прямую за ось Ξ, мы найдемъ $\eta_c = 0$, $\zeta_c = 0$.

7) Если система состоитъ изъ четнаго числа матерьяльныхъ точекъ или, иначе сказать, изъ нѣкотораго числа паръ точекъ; если массы обѣихъ точекъ каждой пары равны между собою, а расположе-

ніе системы таково, что средины кратчайшихъ разстояній между парными точками заключаются въ одной плоскости, то въ этой плоскости очевидно заключается центръ инерціи всей системы; въ самомъ дѣлѣ возьмемъ эту плоскость за плоскость YZ и составимъ выраженіе для ξ_c; такъ какъ обѣ точки каждой пары имѣютъ равныя массы и находятся по обѣ стороны плоскости YZ въ равныхъ разстояніяхъ отъ нея, то получимъ $\xi_c=0$.

8) Если подобная симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится на линіи пересѣченія этихъ плоскостей.

9) Если симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ тремъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія ихъ.

10) Если распредѣлить систему точекъ на нѣсколько группъ и сначала опредѣлить положеніе центра инерціи каждой изъ этихъ группъ, то, чтобы затѣмъ найти положеніе центра инерціи всей системы, надо поступить такъ: предположивъ, что масса каждой группы сосредоточена въ ея центрѣ инерціи, надо искать положеніе центра инерціи всѣхъ этихъ новыхъ воображаемыхъ матерьяльныхъ точекъ.

Эти замѣчанія оказываются весьма полезными во многихъ частныхъ случаяхъ.

§ 89. О томъ, какъ разсматривается сплошное тѣло въ механикѣ системы матерьяльныхъ точекъ.

Мы должны здѣсь обратить вниманіе на способы опредѣленія и вычисленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ, но прежде этого слѣдуетъ объяснить, какимъ образомъ механика системы точекъ примѣняется къ сплошнымъ тѣламъ.

Данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на весьма большое число мелкихъ частей, называемыхъ элементами тѣла и представляютъ себѣ, что каждый элементъ замѣняется матерьяльною точкою той же массы, заключающеюся въ объемѣ элемента или на его поверхности; къ этой совокупности матерьяльныхъ точекъ, которая замѣняетъ сплошное тѣло, примѣняютъ теоремы и формулы механики системы матерьяльныхъ точекъ.

Совокупность матерьяльныхъ точекъ, которою мы замѣняемъ сплошное тѣло, тѣмъ болѣе походитъ на самое тѣло, чѣмъ мельче элементы, на которые мысленно раздробляемъ тѣло; поэтому мы раздробляемъ тѣло на элементы безконечно-малыхъ размѣровъ и предполагаемъ, что размѣры ихъ приближаются къ нулю, а число элементовъ—къ безконечности.

Если принять въ разсчетъ кинематическія свойства разсматриваемаго тѣла, то придется допустить существованіе нѣкоторыхъ связей между матерьяльными точками, замѣняющими элементы тѣла; вслѣдствіе этого совокупность точекъ обратится въ систему точекъ, замѣняющую данное сплошное тѣло, обладающее данными кинематическими свойствами.

Напримѣръ, если данное сплошное тѣло предполагается идеально твердымъ, то придется допустить, что разстоянія между матерьяльными точками, замѣняющими собою элементы тѣла, остаются неизмѣнными, какимъ бы силамъ тѣло ни было подвержено; поэтому идеально-твердое тѣло замѣняется въ механикѣ такъ называемою *неизмѣняемою системою матерьяльныхъ точекъ.*

Объ условіяхъ, выражающихъ кинематическія свойства деформирующихся тѣлъ, мы будемъ говорить въ другихъ мѣстахъ нашего курса.

Дробленіе тѣла на безконечно-малые элементы производится разсѣченіемъ его координатными поверхностями той системы координатъ, помощью которой выражаютъ положеніе точекъ тѣла въ пространствѣ.

При употребленіи прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ каждый безконечно-малый элементъ объема имѣетъ видъ прямоугольнаго параллелопипеда, имѣющаго безконечно-малыя ребра dx, dy, dz; объемъ такого параллелопипеда равенъ:

$$dO = dxdydz$$

и масса его равна:

$$dm = \rho dxdydz,$$

гдѣ σ есть плотность матеріи тѣла въ одной изъ точекъ этого элемента (см. стр. 29).

Матерьяльная точка, которою мы замѣняемъ элементъ тѣла, должна быть помѣщена внутри или на поверхности этого элемента; положеніе ея въ самомъ элементѣ можетъ быть какое угодно, такъ какъ въ окончательныхъ результатахъ предполагается, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля; мы можемъ предположить, что матерьяльная точка, замѣняющая элементъ, находится или въ центрѣ параллелопипеда, или въ одной изъ его вершинъ; мы предпочтемъ помѣщать ее въ той вершинѣ элементарнаго параллелопипеда, координаты которой имѣютъ наименьшія значенія.

При употребленіи прямолинейныхъ косоугольныхъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ косоугольныхъ безконечно-малыхъ параллелопипедовъ; объемъ такого параллелопипеда равенъ:

$$dO = \omega dxdydz;$$

ω есть объемъ косоугольнаго параллелопипеда, ребра котораго параллельны осямъ координатъ и имѣютъ длины, равныя единицѣ; этотъ объемъ выражается такъ:

$$\omega = \begin{vmatrix} 1, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & 1, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma,$$

гдѣ

$$\alpha = \cos(Y, Z),\ \beta = \cos(Z, X),\ \gamma = \cos(X, Y).$$

При употребленіи круговыхъ цилиндрическихъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ отрѣзковъ колецъ съ прямоугольными сѣченіями; на чертежѣ 49-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ такой элементъ. Если координаты точки A суть ρ, θ, z, то координаты точки C_1 суть $(\rho + d\rho)$, $(\theta + d\theta)$, $(z + dz)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: плоскости $z(ABB_1A_1)$ и $(z + dz)$ (DCC_1D_1), плоскости $\theta(ADD_1A_1)$ и $(\theta + d\theta)$ (BCC_1B_1), цилиндрическія поверхности $\rho(ADCB)$ и $(\rho + d\rho)$ $(A_1D_1C_1B_1)$. Пре-

небрегая безконечно-малыми величинами четвертаго и высшихъ порядковъ малости, найдемъ, что объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = d\rho \,.\, \rho d\theta \,.\, dz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Въ сферическихъ координатахъ элементъ объема есть часть сферическаго слоя, заключающагося между сферами r и $(r+dr)$; на чертежѣ 50-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Положимъ, что координаты точки D суть r, φ, ψ, а координаты точки B_1: $(r+dr)$, $(\varphi+d\varphi)$, $(\psi+d\psi)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: двѣ плоскости $\psi(ADD_1A_1)$ и $(\psi+d\psi)$ (BCC_1B_1), двѣ шаровыя поверхности $r(ADCB)$ и $(r+dr)$ $(A_1D_1C_1B_1)$, двѣ коническія поверхности $\varphi(DCC_1D_1)$ и $(\varphi+d\varphi)$ (ABB_1A_1).

Если пренебречь безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ малости, начиная съ четвертаго, то объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \,.\, rd\varphi \,.\, r\sin\varphi d\psi = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi.$$

§ 90. Центръ инерціи сплошнаго тѣла.

Центромъ инерціи сплошнаго тѣла называется та точка, къ которой приближается и съ которою совпадаетъ центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, замѣняющей тѣло, по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ размѣры элементовъ тѣла до нуля, а число ихъ увеличиваемъ до безконечности.

Центръ инерціи есть весьма важная въ механическомъ отношеніи точка сплошнаго тѣла; такъ, центръ инерціи идеально-твердаго тѣла обладаетъ слѣдующими свойствами.

Такъ какъ реакціи неизмѣняемыхъ связей той системы точекъ, которая замѣняетъ собою идеально-твердое тѣло, попарно равны и прямопротивоположны, то центръ инерціи свободнаго твердаго тѣла, неподверженнаго никакимъ силамъ, движется равномѣрно и прямолинейно; при этомъ само тѣло можетъ двигаться не поступательно, тогда центръ инерціи будетъ единственною точкою тѣла, имѣющею прямо-

линейное и равномѣрное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траэкторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какимъ бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло матерьяльною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центрѣ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Примѣры.

Для полученія формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, примѣнимъ формулы (620) (§ 86-го) къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma x dO;\ y_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma y dO;\ z_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma z dO, \quad (622)$$

гдѣ

$$M=\int\int\int\sigma dO;\ dO=dxdydz,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрической поверхностью, производящія которой параллельны оси Z, плоскостью XY и поверхностью:

$$z=f(x,\ y),$$

небрегая безконечно-малыми величинами четвертаго и высшихъ порядковъ малости, найдемъ, что объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Въ сферическихъ координатахъ элементъ объема есть часть сферическаго слоя, заключающагося между сферами r и $(r+dr)$; на чертежѣ 50-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Положимъ, что координаты точки D суть r, φ, ψ, а координаты точки B_1: $(r+dr)$, $(\varphi+d\varphi)$, $(\psi+d\psi)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: двѣ плоскости $\psi(ADD_1A_1)$ и $(\psi+d\psi)$ (BCC_1B_1), двѣ шаровыя поверхности $r(ADCB)$ и $(r+dr)$ $(A_1D_1C_1B_1)$, двѣ коническія поверхности $\varphi(DCC_1D_1)$ и $(\varphi+d\varphi)$ (ABB_1A_1).

Если пренебречь безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ малости, начиная съ четвертаго, то объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \cdot rd\varphi \cdot r\sin\varphi d\psi = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi.$$

§ 90. Центръ инерціи сплошнаго тѣла.

Центромъ инерціи сплошнаго тѣла называется та точка, къ которой приближается и съ которою совпадаетъ центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, замѣняющей тѣло, по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ размѣры элементовъ тѣла до нуля, а число ихъ увеличиваемъ до безконечности.

Центръ инерціи есть весьма важная въ механическомъ отношеніи точка сплошнаго тѣла; такъ, центръ инерціи идеально-твердаго тѣла обладаетъ слѣдующими свойствами.

Такъ какъ реакціи неизмѣняемыхъ связей той системы точекъ, которая замѣняетъ собою идеально-твердое тѣло, попарно равны и прямопротивоположны, то центръ инерціи свободнаго твердаго тѣла, неподверженнаго никакимъ силамъ, движется равномѣрно и прямолинейно; при этомъ само тѣло можетъ двигаться не поступательно, тогда центръ инерціи будетъ единственною точкою тѣла, имѣющею прямо-

линейное и равномѣрное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траэкторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какимъ бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло матерьяльною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центрѣ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Примѣры.

Для полученія формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, примѣнимъ формулы (620) (§ 86-го) къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma x dO;\ y_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma y dO;\ z_c=\frac{1}{M}\int\int\int\sigma z dO,\ (622)$$

гдѣ

$$M=\int\int\int\sigma dO;\ dO = dxdydz\,,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрическою поверхностью, производящія которой параллельны оси Z, плоскостью XY и поверхностью:

$$z = f(x,\ y),$$

VII-91

кромѣ того предполагается, что плотность σ матеріи этого тѣла есть функція только отъ x и y, но не отъ z, такъ что во всѣхъ точкахъ каждой линіи, параллельной оси $Z^{\text{овъ}}$, плотность одна и та же.

Примѣнивъ формулы (622) къ этому случаю и произведя интегрированіе по z въ предѣлахъ отъ $z=0$ до $z=f(x, y)$, получимъ:

$$x_c=\frac{1}{M}\int\int \varkappa x dxdy,\quad y_c=\frac{1}{M}\int\int \varkappa y dxdy,\quad \varkappa=\sigma f(x, y)\,. \quad \textbf{(623)}$$

$$z_c=\frac{1}{2M}\int\int \varkappa f(x, y)dxdy,\qquad M=\int\int \varkappa dxdy,$$

гдѣ интегрированія распространены по площади основанія цилиндрическаго тѣла.

Очевидно, координаты x_c и y_c выражаются какъ координаты центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной по площади основанія цилиндрическаго тѣла съ *поверхностною плотностью* $\varkappa=\sigma f(x, y)$.

Въ другихъ случаяхъ вопросъ приводится къ опредѣленію положенія центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной вдоль по нѣкоторой кривой или прямой линіи съ данною *линейною плотностью* λ, такъ, что на элементъ ds линіи приходится количество массы λds.

Замѣчанія, приведенныя въ § 88, примѣняются съ пользою и при опредѣленіи центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ и площадей.

Обращаемся къ примѣрамъ.

Примѣръ 67-й. Центръ инерціи однородной дуги круга находится на радіусѣ, проведенномъ къ серединѣ дуги; взявъ центръ круга за начало координатъ, а направленіе вышесказаннаго радіуса—за ось $X^{\text{овъ}}$, опредѣлимъ разстояніе центра инерціи C отъ O по формулѣ:

$$OC=x_c=\frac{\int xds}{\int ds}=\frac{2R^2\int\limits_0^{\alpha}\cos\theta d\theta}{2R\int\limits_0^{\alpha}d\theta}=\frac{R(2R\sin\alpha)}{2R\alpha},$$

гдѣ R — радіусъ круга и 2α уголъ при центрѣ, занимаемый дугою.

VII-91.

Такъ какъ $2R \sin \alpha$ есть длина хорды, а $2R\alpha$ — длина дуги, то OC выражается такъ

$$OC = \frac{(\text{радіусъ}).(\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 68-й. Центръ инерціи дуги однородной цѣпной линіи:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

предполагая, что одинъ конецъ дуги совпадаетъ съ самою нижнею точкою кривой.

Вычисленіе положенія центра инерціи произведемъ по формуламъ:

$$sx_c = \int x ds, \; sy_c = \int y ds.$$

Вычисленіе значительно облегчается при помощи слѣдующихъ выраженій:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{a}; \; s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\frac{dy}{dx}.$$

Координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = x - \frac{a}{s}(y - a); \; y_c = \frac{1}{2}\left(y + \frac{a}{s}x\right).$$

Опредѣленіе положенія центровъ инерціи дугъ другихъ плоскихъ кривыхъ можно найти въ собраніяхъ задачъ по механикѣ: Jullien *), de Saint-Germain **) и въ Раціональной Механикѣ Сомова.

Примѣръ 69-й. Положеніе центра инерціи дуги винтовой однородной линіи:

$$x^2 + y^2 = a^2, \; z = b \arccos \frac{x}{a},$$

считая дугу отъ точки: $z = 0$, $y = 0$, $x = a$.

Координаты центра инерціи дуги суть:

$$x_c = b\frac{y}{z}, \; y_c = b\frac{(a-x)}{z}, \; z_c = \frac{z}{2}.$$

---

*) Jullien. Problèmes de Mécanique rationnelle 1855.

**) de Saint-Germain. Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle 1877.

VII-91.

Примѣръ 70-й. Положеніе центра инерціи однородной площади кругового сектора.

Разстояніе центра инерціи C_1 отъ центра O круга равно:

$$x_1 = OC_1 = \frac{2}{3}\frac{(\text{радіусъ}).(\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 71-й. Положеніе центра инерціи однородной площади кругового сегмента можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ. Площадь сектора можно раздѣлить на двѣ части хордою, стягивающею дугу сектора; одна часть будетъ площадь равносторонняго треугольника, другая— площадь сегмента.

Центры инерціи всѣхъ этихъ площадей находятся на оси $X^{овъ}$; означимъ чрезъ x_1, x_2 и x разстоянія отъ O центровъ инерціи площадей сектора, треугольника и сегмента; знаками S_1, S_2 и S обозначимъ величины этихъ площадей.

Нетрудно видѣть, что x опредѣлится по формулѣ:

$$x = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2},$$

гдѣ x_1 есть разстояніе, приведенное въ предыдущемъ примѣрѣ, $x_2 = \frac{2}{3} R \cos \alpha$, $S_1 = R^2\alpha$, $S_2 = R^2 \sin\alpha \cos\alpha$; поэтому:

$$x = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Примѣръ 72-й. Центръ инерціи площади, ограниченной осью $X^{овъ}$ и циклоидою:

$$x = R(\omega + \sin\omega),\ y = R(1 + \cos\omega).$$

Величина площади:

$$2\int_0^{2R} x dy = 3\pi R^2.$$

Центръ инерціи находится на оси $Y^{овъ}$ въ разстояніи $\frac{5}{6} R$.

Примѣръ 73-й. Положеніе центра инерціи площади, заключающейся между дугою AE эллипса (черт. 51), діаметромъ OA и полухордою DE, сопряженною этому діаметру.

Къ этому случаю лучше всего примѣнить косоугольныя прямолиней-

ныя координаты, оси вторыхъ суть: ось OX, направленная вдоль по діаметру OA, и ось OY, направленная вдоль по діаметру, сопряженному къ діаметру OA; въ этихъ координатахъ уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

гдѣ α и β суть длины сопряженныхъ полудіаметровъ.

Величина площади выразится такъ:

$$S=\sin\theta\int_{x_1}^{\alpha}ydx=\frac{\sin\theta}{2}\left(\alpha\beta\arccos\frac{x_1}{\alpha}-x_1y_1\right),$$

гдѣ x_1 есть длина OD, а y_1—длина DE; θ есть уголъ YOX.

Косоугольные координаты x_c и y_c центра инерціи C опредѣлятся по формуламъ:

$$Sx_c=\sin\theta\int_{x_1}^{\alpha}xydx=\sin\theta\cdot\frac{\alpha^2y_1^3}{3\beta^2}.$$

$$Sy_c=\frac{\sin\theta}{2}\int_{x_1}^{\alpha}y^2dx=\sin\theta\cdot\frac{\beta^2(\alpha-x_1)^2}{2.3\alpha^2}(2\alpha+x_1).$$

Центръ инерціи площади $AOB(x_1=0,\ y_1=\beta)$ находится въ точкѣ имѣющей слѣдующіе координаты:

$$\frac{4\alpha}{3\pi},\ \frac{4\beta}{3\pi}.$$

Примѣръ 74-й. Центръ инерціи площади, ограниченной параболою AE (черт. 52), побочною осью AD, проведенною черезъ точку A и полухордою DE, сопряженною къ этой оси.

За оси косоугольныхъ координатъ возьмемъ: побочную ось AD — за ось $X^{овъ}$ и касательную къ параболѣ въ точкѣ A — за ось $Y^{овъ}$; уравненіе параболы: $y^2=2px$. Координаты центра инерціи:

$$x_c=\frac{3}{5}x_1,\quad y_c=\frac{3}{8}y_1.$$

Примѣръ 75-й. Центръ инерціи площади эллиптическаго сегмента

$E_1AE_2E_1$ (черт. 51-й) находится на полудіаметрѣ OA_1, сопряженномъ хордѣ сегмента, и отстоитъ на разстояніи:

$$OC_1 = \frac{2\alpha^2 y_1^3}{3\beta^2\left(\alpha\beta\arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) - x_1 y_1\right)}$$

отъ центра эллипса, гдѣ y_1 есть длина половины хорды, а x_1 — разстояніе OD_1.

Примѣръ 76-й. Опредѣлить положеніе центра инерціи площади эллиптическаго сектора OE_1AE_2 (черт. 51-й).

Эта площадь состоитъ изъ площади сектора $E_1AE_2E_1$ и изъ площади треугольника OE_1E_2; величина площади послѣдняго равна $x_1y_1 \sin\theta$ и центръ инерціи его находится въ точкѣ C_2, отстоящей отъ центра на длину $OC_2 = \frac{2}{3}x_1$; поэтому величина площади сектора равна:

$$\alpha\beta\sin\theta\arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right),$$

а центръ инерціи ея находится на діаметрѣ OA и отстоитъ отъ центра эллипса на разстояніи:

$$OC' = \frac{2}{3}\frac{\alpha y_1}{\beta\arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)}.$$

Примѣръ 77-й. Положеніе центра инерціи трапеціи.

Очевидно, центръ инерціи находится на линіи DD_1, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ трапеціи ABB_1A_1 (черт. 53-й); чтобы найти положеніе его на этой линіи, примемъ во вниманіе, что трапеція можетъ быть раздѣлена на два треугольника ABA_1 и A_1BB_1, что центръ инерціи перваго находится въ точкѣ пересѣченія K прямой BD_1 съ прямою линіею QQ_1, отстоящею отъ AA_1 на одну треть высоты трапеціи, что центръ инерціи втораго находится въ точкѣ пересѣченія L прямой A_1D съ прямою PP_1, отстоящею на одну треть высоты трапеціи отъ BB_1 и что центръ инерціи трапеціи долженъ находиться на прямой линіи LK, соединяющей точки K и L; слѣдовательно, искомый центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія C линіи DD_1 линіею KL.

Для составленія формулы, выражающей разстояніе центра инерціи C отъ AA_1, замѣтимъ, что площади треугольниковъ ABA_1 и BA_1B_1 равны $\frac{1}{2}ha$ и $\frac{1}{2}hb$, что площадь трапеціи $=\frac{1}{2}h(a+b)$, гдѣ h озна-

чаетъ высоты треугольниковъ и трапеціи, а a и b — длины сторонъ AA_1 и BB_1 и что разстоянія точекъ K и L отъ AA_1 равны $\frac{1}{3}h$ и $\frac{2}{3}h$; окажется, что разстояніе точки C отъ этой же стороны равно:

$$\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$$

и что отношеніе длинъ CD_1 и CD равно:

$$\frac{\overline{CD_1}}{\overline{CD}}=\frac{a+2b}{b+2a}.$$

Примѣръ 78. Положенія центровъ инерціи частей поверхности сферы.

Положенія центровъ инерціи какихъ-либо частей сферической поверхности могутъ быть опредѣлены при помощи слѣдующихъ формулъ.

Пусть S есть величина площади нѣкоторой сферической фигуры ABC (черт. 54), находящейся на сферѣ радіуса R, и S_p — величина площади ортогональной проэкціи площади S на какую-либо плоскость P_1P, проходящую черезъ центръ сферы.

Разстояніе p центра инерціи площади S отъ плоскости P_1P выразится такъ:

$$p=\frac{R\int\int\cos(r,n)dS}{S}, \quad \ldots\ldots \quad (624)$$

гдѣ n означаетъ направленіе нормали къ плоскости P_1P, а r — направленіе радіуса вектора, проведеннаго изъ центра O сферы къ элементу поверхности dS; произведеніе $R\cos(r, n)$ выражаетъ разстояніе элемента dS отъ плоскости P_1P; интегралъ числителя распространенъ по всей площади S.

Такъ какъ направленіе r есть направленіе наружной нормали элемента поверхности dS, то интегралъ числителя выражаетъ величину площади S_p, а потому формула (624) выражаетъ, что

$$p=\frac{RS_p}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (624)$$

Если черезъ центръ сферы проведемъ какую-либо другую плоскость $P_1'P'$, то пересѣченіе ея съ проэктирующею цилиндрическою поверхностью сферической фигуры ABC будетъ косоугольною проэкціею этой фигуры на эту новую плоскость (на чертежѣ (54) ортогональная проэкція сферической фигуры ABC на плоскость P_1P есть фигура $A_1B_1C_1$,

фигура же $A'B'C'$ есть пересѣченіе плоскости $P_1'P'$ съ проэктирующимъ цилиндромъ); означимъ черезъ α уголъ между плоскостями P_1P и $P_1'P'$ и черезъ S_p' величину площади пересѣченія проэктирующаго цилиндра съ плоскостью $P_1'P'$; кромѣ того, опустимъ изъ центра инерціи $Ц$ площади S перпендикуляръ на плоскось $P_1'P'$ и продолжимъ его до пересѣченія Q съ плоскостью P_1P; длину $ЦQ$ означимъ черезъ p'.

Очевидно, что $S_p = S_p' \cos\alpha$ и что $p = p' \cos\alpha$, поэтому изъ формулы (624) получится слѣдующая:

$$p' = \frac{RS'_p}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(625)}$$

Примѣнимъ формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи площади сферическаго сегмента. Очевидно, что центръ инерціи находится на оси фигуры сегмента. Взявъ за плоскость P_1P плоскость, перпендикулярную къ этой оси, и принявъ во вниманіе, что величина поверхности сегмента равна $2\pi R^2(1-\cos\beta)$, а величина площади его проэкціи $=\pi R^2 \sin^2\beta$, гдѣ β есть уголъ (r, n) для точекъ ребра сегмента, мы найдемъ что

$$p = \frac{1}{2} R(1+\cos\beta),$$

то-есть, что центръ инерціи поверхности сегмента находится на серединѣ его высоты.

Центръ инерціи поверхности сферическаго пояса также находится на серединѣ его высоты.

Примѣнимъ ту же формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи сферическаго треугольника; а именно, опредѣлимъ разстоянія: $p(BC)$, $p(CA)$, $p(AB)$ центра инерціи до плоскостей, проведенныхъ черезъ стороны треугольника.

Проэкція площади треугольника на плоскости OBC (черт. 55) равняется площади сектора BOC, безъ площадей OA_1B и OA_1C проэкцій секторовъ OAB и OAC на ту же плоскость, т.-е.:

$$S_p = \frac{R^2}{2}\Big(a - c\cos B - b\cos C\Big).$$

Величина площади сферическаго треугольника выражается, какъ извѣстно такъ:

$$S = R^2(A+B+C-\pi) \;\; ^{*)}.$$

---

*) Предполагается, что углы a, b, c, A, B, C измѣряются отношеніями длинъ дугъ къ радіусу.

Поэтому, изъ формулы (624) получимъ:

$$p(BC) = \frac{R(a - c\cos B - b\cos C)}{2(A + B + C - \pi)};$$

точно такъ же получимъ:

$$p(CA) = \frac{R(b - a\cos C - c\cos A)}{2(A+B+C-\pi)},\ p(AB) = \frac{R(c - b\cos A - a\cos B)}{2(A+B+C-\pi)}.$$

Положеніе центра инерціи *Ц* можетъ быть еще выражено разстояніями его отъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ сферы и перпендикулярныхъ къ радіусамъ *OA*, *OB*, *OC*; эти разстоянія опредѣлимъ по формулѣ (625), разсматривая секторы *OBC*, *OCA* и *OAB* какъ косоугольныя проэкціи площади треугольника *ABC* на плоскости большихъ круговъ *BC*, *CA* и *AB*; найдемъ, что эти разстоянія суть:

$$\frac{R^3 a}{2S},\ \frac{R^3 b}{2S},\ \frac{R^3 c}{2S}.$$

Переходя теперь къ примѣрамъ опредѣленія положенія центровъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, мы докажемъ слѣдующую теорему, которая оказывается весьма полезною въ примѣненіи ко многимъ вопросамъ этого рода.

Теорема. Представимъ себѣ сплошное однородное тѣло, ограниченное двумя параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 (черт. 56) и боковою поверхностью такого рода, что величина площади сѣченія тѣла какою-либо плоскостью, параллельною плоскостямъ Π_1 и Π_2, выражается такъ:

$$\Pi = a + bz + cz^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (626)$$

гдѣ z есть разстояніе плоскости сѣченія отъ плоскости Π_1; a, b, c суть постоянные коэффиціенты, зависящіе отъ вида боковой поверхности. Отношеніе между разстояніями центра инерціи этого тѣла отъ плоскостей Π_1 и Π_2 выражается такъ:

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{2\Pi_0 + \Pi_2}{2\Pi_0 + \Pi_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (627)$$

гдѣ Π_1 и Π_2 — величины площадей основаній нижняго и верхняго, Π_0 — площадь сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты h.

Легко доказать эту теорему. Разстояніе центра инерціи отъ нижняго основанія выразится формулою:

$$z_c = \frac{1}{V}\int_0^h z\Pi dz = \frac{1}{V}\left(\frac{h^2}{2} + b\frac{h^3}{3} + c\frac{h^4}{4}\right),$$

Yн-91.

гдѣ V есть объемъ тѣла; но числитель этого выраженія можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{h^2}{6}\left[2\left(a+b\frac{h}{2}+c\frac{h^2}{4}\right)+(a+bh+ch^2)\right],$$

поэтому:

$$z_c=h^2\frac{(2\varPi_0+\varPi_2)}{6V}.$$

Такъ же найдемъ, что разстояніе центра инерціи отъ верхняго основанія выражается такъ:

$$h-z_c=h^2\frac{(2\varPi_0+\varPi_1)}{6V},$$

а потому и получимъ равенство (627).

Примѣръ 79-й. Центръ инерціи объема сферическаго пояса находится на оси его; пусть k_1 и k_2 суть разстоянія основаній сегмента отъ центра сферы; въ этомъ случаѣ:

$$\varPi=\pi(R^2-k_1^2-2k_1z-z^2).$$

По формулѣ (627) найдемъ:

$$\frac{z_c}{h-z_c}=\frac{3R^2-k_2^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)^2}{3R^2-k_1^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)^2};\ h=k_2-k_1.$$

Чтобы примѣнить эту формулу къ сферическому сегменту, надо положить въ ней $k_2=R$.

Изъ этой формулы окажется, что центръ инерціи однородной полусферы дѣлитъ ось ея въ отношеніи 3 къ 5.

Примѣръ 80-й. Центръ инерціи части параболоида вращенія, заключающейся между плоскостями, отстоящими отъ вершины на разстояніяхъ k_1 и k_2.

Въ этомъ случаѣ:

$$\varPi_1=2\pi pk_1,\ \ \varPi_2=2\pi pk_2,\ \ \varPi_0=\pi p(k_1+k_2),$$

а потому

$$\frac{z_c}{h-z_c}=\frac{k_1+2k_2}{k_2+2k_1}.$$

Примѣръ 81-й. Центръ инерціи какого-либо пояса однополаго гипер-

VII-91.

болоида вращенія. Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія плоскостей пояса отъ центра гиперболоида.

$$П_1 = \pi a^2\left(1+\frac{k_1^2}{b^2}\right),\quad П_2 = \pi a^2\left(1+\frac{k_2^2}{b^2}\right)$$

$$П_0 = \pi a^2\left(1+\frac{(k_1+k_2)^2}{4b^2}\right)$$

$$\frac{z_c}{h-z_c} = \frac{6b^2+(k_1+k_2)^2+2k_2^2}{6b^2+(k_1+k_2)^2+2k_1^2}.$$

Примѣръ 82-й. Положеніе центра инерціи какой-либо части трехоснаго эллипсоида, заключающейся между двумя параллельными плоскостями.

Главные діаметры діаметральной плоскости, параллельной плоскостямъ $П_1$ и $П_2$, примемъ за оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$, а направленіе полудіаметра, сопряженнаго къ этой діаметральной плоскости, за ось Z; слѣдовательно, оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ ортогональны между собою, а ось Z можетъ быть наклонена къ нимъ. Въ этихъ координатахъ уравненіе поверхности эллипсоида будетъ:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1,$$

гдѣ A и B суть длины главныхъ полудіаметровъ діаметральнаго сѣченія, а γ—длина полудіаметра, совпадающаго съ осью Z.

Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія по оси $Z^{овъ}$, плоскостей $П_1$ и $П_2$ отъ центра эллипсоида; на основаніи извѣстнаго выраженія площади эллипса найдемъ:

$$П_1 = \pi AB\left(1-\frac{k_1^2}{\gamma^2}\right),\quad П_2 = \pi AB\left(1-\frac{k_2^2}{\gamma^2}\right)$$

$$П_0 = \pi AB\left(1-\frac{(k_1+k_2)^2}{4\gamma^2}\right).$$

Однородный эллипсоидъ симметриченъ по отношенію ко всякой діаметральной плоскости, а слѣдовательно и по отношенію къ плоскостямъ XZ и YZ; эти плоскости суть также плоскости симметріи разсматриваемаго нами эллиптическаго пояса, а потому центръ инерціи его находится на оси Z. Примѣняя формулу (627), мы замѣнимъ въ ней отношеніе кратчайшихъ разстояній центра инерціи отъ плоскостей $П_1$ и $П_2$ отношеніемъ разстояній, считаемыхъ по оси Z; получимъ:

$$\frac{\zeta_c-k_1}{k_2-\zeta_c} = \frac{6\gamma^2-(k_1+k_2)^2-2k_2^2}{6\gamma^2-(k_1+k_2)^2-2k_1^2}.$$

-91.

Если положить $k_1=0$ и $k_2=\gamma$, то найдемъ, что $\zeta_c=\frac{3}{8}\gamma$.

Примѣръ 83-й. Центръ инерціи конуса, боковая поверхность котораго есть коническая поверхность какого-либо порядка и вида, находится на прямой линіи, соединяющей вершину конуса съ центромъ инерціи его основанія; нетрудно убѣдиться, что центръ инерціи отстоитъ отъ основанія на одну четверть длины этой линіи, если считать разстояніе вдоль по ней.

Примѣръ 84-й. Однородное тѣло имѣетъ видъ многогранника, двѣ противоположныя грани котораго параллельны, а остальныя грани, образующія боковую поверхность, суть треугольники и трапеціи; въ этомъ случаѣ площадь каждаго сѣченія, параллельнаго основаніямъ, тоже выразится формулою (626).

Въ самомъ дѣлѣ, площадь Π можетъ быть разбита на нѣсколько треугольниковъ, вершины которыхъ совпадаютъ съ вершинами периметра площади Π; площадь каждаго такого треугольника выражается такъ:

$$\frac{1}{2}\Big[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\Big],$$

гдѣ (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) суть координаты вершинъ треугольника (предполагается, что плоскость XY совпадаетъ съ основаніемъ Π_1). Такъ какъ каждая вершина находится на одномъ изъ прямолинейныхъ боковыхъ реберъ многогранника, то координаты x_i, y_i вершины (i) опредѣлятся изъ уравненій

$$x_i=\alpha_i z+\beta_i,\ y_i=\gamma_i z+\delta_i$$

того ребра, на которомъ находится эта вершина, а потому площадь каждаго треугольника выразится трichленомъ вида (626) и подобнымъ же трichленомъ выразится площадь Π.

По этой причинѣ разстояніе центра инерціи такого многогранника отъ одного изъ основаній будетъ извѣстно, если будемъ знать высоту многогранника, величины площадей основаній, верхняго и нижняго, и величину площади сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты.

Центръ инерціи пирамиды, усѣченной параллельно основанію, находится на линіи, соединяющей центры инерціи верхняго и нижняго основаній; онъ отстоитъ отъ нижняго основанія на разстояніи:

$$z_c=h\frac{\Pi_1+3\Pi_2+2\sqrt{\Pi_1\Pi_2}}{4(\Pi_1+\Pi_2+\sqrt{\Pi_1\Pi_2})},$$

считая разстояніе по вертикальному направленію, такъ же, какъ и высоту h.

Тетраэдръ можно тоже причислить къ многогранникамъ разсматриваемой нами категоріи. Каждую пару противолежащихъ реберъ тетраэдра можно разсматривать какъ два безконечно-узкіе прямоугольника, плоскости которыхъ параллельны. Примѣняя къ тетраэдру формулу (627), мы должны положить: $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$; окажется, что центръ инерціи однороднаго тетраэдра находится въ точкѣ пересѣченія четырехъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ реберъ; эта точка дѣлитъ каждую изъ этихъ прямыхъ пополамъ.

§ 92. Открытіе закона движенія центра инерціи Лагранжъ приписываетъ Ньютону; въ книгѣ: Philosophiae naturalis principia mathematica, въ главѣ: Axiomata sive leges motus, въ примѣчаніи (corollaria) 4-мъ, находимъ слѣдующее выраженіе:

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitationis vel quiescit vel movetur uniformiter in directam.

(Общій центръ тяжести двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ не измѣняетъ своего состоянія движенія или покоя вслѣдствіе взаимно-дѣйствій между этими тѣлами; если существуютъ только взаимнодѣйствія между тѣлами и нѣтъ ни внѣшнихъ силъ, ни препятствій, то общій центръ тяжести либо покоится, либо движется равномѣрно по прямой линіи).

Это выраженіе опредѣляетъ только частный случай закона движенія центра инерціи. Лагранжъ говоритъ, что общая форма закона дана д'Аламберомъ, но слѣдуетъ признать, что ясное выраженіе самой общей формы закона принадлежитъ самому же Лагранжу (въ Mécanique analytique).

ГЛАВА VIII.

Законъ площадей.

§ 93. Составленіе трехъ дифференціальныхъ уравненій.

Къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія (517) (§ 70) каждой точки системы приложимъ первый изъ тѣхъ двухъ пріемовъ преобразованія, которые указаны въ § 21-мъ; всѣ уравненія вида (110, a) сложимъ; составится слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d\text{л}_x}{dt} = \text{Л}_x + \lambda(\text{в}_1)\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial \text{в}_1}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial \text{в}_1}{\partial y_i}\right) + \ldots.$$

$$\ldots. + \lambda(\text{в}_p)\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial \text{в}_p}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial \text{в}_p}{\partial x_i}\right);\ \ldots. \quad (628,\ a)$$

здѣсь л_x и Л_x суть суммы, выражаемыя формулами (629, a) и (630, a) приведенными ниже.

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d\text{л}_y}{dt} = \text{Л}_y + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\text{в}_k)\sum_{i=1}^{i=n}\left(z_i\frac{\partial \text{в}_k}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial \text{в}_k}{\partial z_i}\right) \ \ldots \quad (628,\ b)$$

$$\frac{d\text{л}_z}{dt} = \text{Л}_z + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\text{в}_k)\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i\frac{\partial \text{в}_k}{\partial x_i} - y_i\frac{\partial \text{в}_k}{\partial x_i}\right),\ \ldots \quad (628,\ c)$$

гдѣ:

$$\text{л}_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) \ \ldots\ldots\ldots \quad (629,\ a)$$

$$\text{л}_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) \ \ldots\ldots\ldots \quad (629,\ b)$$

$$\text{л}_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) \quad \ldots\ldots (629,\ c)$$

$$\text{Л}_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) \quad \ldots\ldots\ldots (630,\ a)$$

$$\text{Л}_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) \quad \ldots\ldots\ldots (630,\ b)$$

$$\text{Л}_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) \quad \ldots\ldots\ldots (630,\ c)$$

§ 94. Главный моментъ силъ вокругъ даннаго центра Перемѣна центра моментовъ. Главный векторъ.

Въ параграфѣ 22-мъ было объяснено значеніе разностей, заключающихся подъ знакомъ суммъ въ выраженіяхъ (630); это суть моменты вокругъ положительныхъ направленій осей $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ равнодѣйствующей F_i задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, это суть проэкціи на тѣ же оси момента силы F_i вокругъ начала координатъ.

Обозначая, какъ условлено въ § 22-мъ, знакомъ $L_0(F_i)$ величину и направленіе момента силы F_i вокругъ начала координатъ, можемъ представить формулы (630) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{Л}_x &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i)\cos(L_0(F_i),\ X), \\ \text{Л}_y &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i)\cos(L_0(F_i),\ Y), \\ \text{Л}_z &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i)\cos(L_0(F_i),\ Z), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (631)$$

Мы будемъ предполагать, что моментъ каждой силы вокругъ даннаго центра изображенъ длиною, отложенною отъ центра; относительно величины и направленія этой длины см. стр. 89—91 параграфа 22-го; согласно съ этимъ линейныя изображенія моментовъ силъ F_1, F_2, ... F_n вокругъ начала координатъ суть длины, отложенныя отъ этой точки.

Изъ выраженій (631) видно, что $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$ суть проэкціи на оси координатъ геометрической суммы моментовъ задаваемыхъ силъ F_1, F_2, ... F_n вокругъ начала координатъ (точка O); эта геометрическая сумма называется *главнымъ моментомъ силъ* F_1, F_2, ... F_n *вокругъ центра* O. Условимся обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ $Л_0$; вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ предполагать, что *линейное изображеніе этого главнаго момента отложено отъ точки* O.

Слѣдовательно:

$$Л_x = Л_0 \cos(Л_0, X), \quad Л_y = Л_0 \cos(Л_0, У), \quad Л_z = Л_0 \cos(Л_0, Z).$$

Если вмѣсто точки O взять за центръ моментовъ другую точку $K(x_k, y_k, z_k)$, то моменты тѣхъ же силъ вокругъ новаго центра будутъ имѣть другія величины и другія направленія.

Чтобы составить выраженія проэкцій на оси координатъ момента $L_k(F_i)$ силы F_i (приложенной къ точкѣ m_i) вокругъ центра K, мы на время предположимъ, что этотъ центръ взятъ за новое началѣ координатъ и примѣнимъ прежнія формулы (113) § 22-го; такъ какъ координаты точки m_i относительно новыхъ плоскостей координатъ (которыя параллельны прежнимъ, но пересѣкаются въ новомъ началѣ координатъ K) равны $(x_i - x_k)$, $(y_i - y_k)$, $(z_i - z_k)$, то, по формуламъ (113) § 22-го, получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), X) &= (y_i - y_k)Z_i - (z_i - z_k)Y_i, \\ L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), У) &= (z_i - z_k)X_i - (x_i - x_k)Z_i, \\ L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), Z) &= (x_i - x_k)Y_i - (y_i - y_k)X_i, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \textbf{(632)}$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ $F_1, F_2, \ldots. F_n$ вокругъ центра K называется главнымъ моментомъ этихъ силъ вокругъ этого центра; мы будемъ обозначать этотъ главный моментъ знакомъ $Л_k$, а его проэкціи на оси координатъ—знаками $(Л_k)_x$, $(Л_k)_y$, $(Л_k)_z$; линейное изображеніе его, т.-е. длину, изображающую величину и направленіе этого главнаго момента, мы будемъ предполагать отложенною или проведенною изъ точки K.

Проэкція на ось $X^{овъ}$ главнаго момента $Л_k$ выразится слѣдующею суммою:

$$(Л_k)_x = \sum_{i=1}^{i=n}\Big((y_i - y_k)Z_i - (z_i - z_k)\,Y_i\Big),$$

или, что то же самое, такъ:

$$(Л_k)_x = Л_x + z_k B_y - y_k B_z \;\ldots\ldots \quad \textbf{(633, a)}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$(Л_k)_y = Л_y + x_k B_z - z_k B_x, \;\ldots\ldots \quad \textbf{(633, b)}$$

$$(Л_k)_z = Л_z + y_k B_x - x_k B_y; \;\ldots\ldots \quad \textbf{(633, c)}$$

здѣсь B_x, B_y, B_z, означаютъ слѣдующія суммы:

$$B_x = \sum_{i=1}^{i=n} X_i,\; B_y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i,\; B_z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \;\ldots \quad \textbf{(634)}$$

т.-е., это суть проэкціи на оси координатъ геометрической суммы B всѣхъ силъ $F_1, F_2, \ldots. F_n$; если бы всѣ эти силы, сохраняя свои величины и направленія, были приложены къ одной точкѣ, то сила B была бы ихъ равнодѣйствующею. Мы условимся называть геометрическую сумму B данныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, *главнымъ векторомъ этихъ силъ* *).

---

*) Многіе авторы называютъ геометрическую сумму B данныхъ силъ—равнодѣйствующею и тѣмъ даютъ поводъ нѣкоторымъ читателямъ, мало

VIII-94

Изъ формулъ (632) и (633) можно извлечь правило, опредѣляющее, какъ измѣняется величина и направленіе главнаго момента данныхъ силъ при перемѣнѣ центра моментовъ.

Предположимъ, что главный векторъ B данныхъ силъ проведенъ изъ начала координатъ O и вообразимъ, что онъ изображаетъ нѣкоторую силу, приложенную къ этой точкѣ; означимъ черезъ $L_k(B_0)$ моментъ этой воображаемой силы вокругъ центра K и составимъ, по формуламъ (632), выраженія проэкцій этого момента на оси координатъ; для этого надо въ этихъ формулахъ подставить: B_0, B_x, B_y, B_z вмѣсто F_i, X_i, $У_i$, Z_i и нули—вмѣсто x_i, y_i, z_i; получимъ:

$$L_k(B_0)\cos(L_k(B_0),\ X) = z_k B_y - y_k B_z\,,$$
$$L_k(B_0)\cos(L_k(B_0),\ У) = x_k B_z - z_k B_x\,,$$
$$L_k(B_0)\cos(L_k(B_0),\ Z) = y_k B_x - x_k B_y\,;$$

это—тѣ самыя разности, которыя находятся во вторыхъ частяхъ формулъ (633), слѣдовательно, эти формулы выражаютъ, что:

$$\overline{Л_k} = \overline{Л_0} + \overline{L_k(B_0)}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \mathbf{(635)}$$

т.-е., *что главный моментъ данныхъ силъ вокругъ центра K можетъ быть полученъ какъ геометрическая сумма, составленная изъ главнаго момента тѣхъ же силъ вокругъ центра O и изъ момента вокругъ центра K главнаго вектора тѣхъ же силъ, проведеннаго изъ точки O.*

На чертежѣ 57-мъ изображено построеніе главнаго момента $Л_k$ по этому правилу; $\overline{OЛ_0}$ изображаетъ главный моментъ $Л_0$, длина $\overline{KL'}$— моментъ воображаемой силы $\overline{OB_0}$, приложенной къ точкѣ O, вокругъ

знакомымъ съ механикою, впадать въ заблужденія относительно значенія этой воображаемой силы B.

Мы назвали силу B „главнымъ векторомъ“ слѣдуя примѣру О. И. Сомова (см. Раціональную Механику, часть 2-ю, стр. 276).

центра K; длина $\overline{K\text{Л}_k}$, изображающая главный моментъ $\dot{\text{Л}}_k$, есть діагональ параллелограмма, построеннаго на сторонахъ $\overline{KL'}$ и $\overline{K\text{Л}_0'}$; послѣдняя равна и параллельна длинѣ $\overline{O\text{Л}_0}$.

Приведенное здѣсь правило измѣненія главнаго момента при перемѣнѣ центра моментовъ тождественно съ правиломъ, опредѣляющимъ измѣненіе скорости поступательной части движенія твердаго тѣла при перемѣнѣ полюса вращенія (см. стр. 127 кинематической части); формулы (633) имѣютъ тотъ же составъ, что и формулы (144) страницы 127-й кинематической части, такъ что изъ послѣднихъ получимъ первыя, если замѣнимъ:

полюсъ $\text{Ю}(x_{ю}, y_{ю}, z_{ю})$ — — центромъ O,

полюсъ $\text{Я}(x_{я}, y_{я}, z_{я})$ — — центромъ $K(x_k, y_k, z_k)$,

угловую скорость: $\Omega(P, Q, R)$, — — главнымъ векторомъ: $B(B_x, B_y, B_z)$,

скорость полюса Ю: $w_{ю}(x'_{ю}, y'_{ю}, z'_{ю})$, — — главнымъ моментомъ: $\text{Л}_0(\text{Л}_x, \text{Л}_y, \text{Л}_z)$,

скорость полюса Я: $w_{я}(x_{я}', y_{я}', z_{я}')$ — — главнымъ моментомъ: $\text{Л}_k((\text{Л}_k)_x, (\text{Л}_k)_y, (\text{Л}_k)_z)$.

Подмѣтивъ такую взаимность между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею главныхъ моментовъ данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, мы можемъ, на основаніи этой взаимности, заключить о существованіи слѣдующей зависимости между величинами и направленіями главныхъ моментовъ вокругъ различныхъ центровъ.

Главные моменты данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, находящихся на какой-либо, параллельной главному вектору этихъ силъ, прямой, равны и параллельны между собою.

Всѣ главные моменты данныхъ силъ вокругъ всевозможныхъ

центровъ имѣютъ равныя проэкціи на направленіе главнаго вектора; а именно эти проэкціи равны:

$$Л_k \cos(Л_k, B) = \frac{Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z}{B} = Л_0 \cos(Л_0, B) \;..\; \mathbf{(636)}$$

Существуетъ прямая линія, параллельная главному вектору, образуемая тѣми центрами, вокругъ которыхъ главный моментъ имѣетъ наименьшую величину; эта линія называется центральною осью данныхъ силъ. Главный моментъ вокругъ какого-либо центра, находящагося на центральной оси, направленъ по самой оси и равенъ:

$$Л_ц = Л_0 \cos(Л_0, B) = \frac{Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z}{B} \;.....\; \mathbf{(636, bis)}$$

Если главный моментъ вокругъ какого-либо центра перпендикуляренъ къ главному вектору, то главные моменты вокругъ всѣхъ центровъ перпендикулярны къ тому же направленію, а главный моментъ вокругъ центровъ, находящихся на центральной оси, равенъ нулю: значитъ, если главный векторъ и главный моментъ данныхъ силъ вокругъ начала координатъ удовлетворяютъ условію:

$$Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z = 0, \;.......\; \mathbf{(637)}$$

то можно найти безчисленное множество центровъ, вокругъ которыхъ главный моментъ данныхъ силъ равенъ нулю; всѣ эти центры лежатъ на прямой, параллельной главному вектору данныхъ силъ.

§ 95. Главный моментъ количествъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

Величины $л_x$, $л_y$, $л_z$ (629) § 93 суть проэкціи на оси координатъ *главнаго момента* вокругъ начала координатъ *количествъ движенія* всѣхъ точекъ системы; мы будемъ обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ $л_0$ и будемъ изображать его длиною, проведенною изъ начала координатъ, равною геометрической суммѣ длинъ, изображающихъ моменты $l_0(m_1 v_1)$, $l_0(m_2 v_2)$, ... $l_0(m_n v_n)$ количествъ движеній точекъ системы вокругъ того же начала координатъ.

Относительно главныхъ моментовъ количествъ движенія системы точекъ вокругъ другихъ центровъ можно сказать то же самое, что сказано относительно главныхъ моментовъ силъ.

Главный векторъ количествъ движенія системы точекъ можетъ быть названъ количествомъ движенія центра инерціи всей системы, если предположить, что въ послѣднемъ сосредоточена масса всей системы; въ самомъ дѣлѣ, на основаніи равенствъ (620) § 86-го получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = M x_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = M y_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = M z_c' \; . \; . \; \mathbf{(638)}$$

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента λ_k количествъ движенія системы вокругъ центра K выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$(\lambda_k)_x = \lambda_k \cos(\lambda_k, X) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((y_i - y_k)z_i' - (z_i - z_k)y_i'\Big) =$$

$$= \lambda_x + M y_c' z_k - M z_c' y_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{(639, a)}$$

$$(\lambda_k)_y = \lambda_k \cos(\lambda_k, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((z_i - z_k)x_i' - (x_i - x_k)z_i'\Big) =$$

$$= \lambda_y + M z_c' x_k - M x_c' z_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{(639, b)}$$

$$(\lambda_k)_z = \lambda_k \cos(\lambda_k, Z) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((x_i - x_k)y_i' - (y_i - y_k)x_i'\Big) =$$

$$= \lambda_z + M x_c' y_k - M y_c' x_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{(639, c)}$$

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента количествъ движенія системы точекъ могутъ быть еще выражены въ секторьяльныхъ

скоростяхъ проэкцій точекъ на плоскости координатъ (см. стр. 99—101); напримѣръ:

$$л_x = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(yz), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (640, a)$$

$$л_y = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(zx), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (640, b)$$

$$л_z = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(xy) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (640, c)$$

§ 96. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (628), составленныхъ въ § 93-мъ.

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій заключаются проэкціи на оси координаты главнаго момента вокругъ начала координатъ всѣхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

Длина, изображающая $л_0$ и проведенная изъ начала координатъ измѣняетъ съ теченіемъ времени свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ нѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ главнаго момента количествъ движенія* системы точекъ.

Уравненія (628) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ главнаго момента (вокругъ O) количествъ движенія системы точекъ, равна и параллельна длинѣ, изображающей главный моментъ (вокругъ O) всѣхъ задаваемыхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

§ 97. Видъ дифференціальныхъ уравненій (628) въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ реакцій равенъ нулю.

Если главный моментъ вокругъ начала координатъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю во всѣхъ положеніяхъ системы, то тогда дифференціальныя уравненія (628) получаютъ такой видъ:

$$\frac{dл_x}{dt} = Л_x, \quad \frac{dл_y}{dt} = Л_y, \quad \frac{dл_z}{dt} = Л_z. \quad \ldots\ldots \quad (641)$$

Главный моментъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

Когда всѣ точки системы свободны.

Когда точки системы связаны только между собою идеальными стержнями, или гибкими нерастяжимыми нитями, или связями примѣра 55-го, §§ 59 и 68, стр. 306 и 345—346, потому что тогда моменты обѣихъ реакцій каждой такой связи равны и прямопротивоположны; но ни одна изъ точекъ системы не должна быть связана никакою связью съ какими либо неподвижными точками или съ точками, посторонними системѣ.

Въ этихъ случаяхъ равенъ нулю главный моментъ всѣхъ реакцій не только вокругъ начала координатъ, но также и вокругъ любаго центра.

Въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы будемъ предполагать, что связи, которымъ подчинены точки системы, принадлежатъ къ числу тѣхъ, для которыхъ главный моментъ реакцій есть нуль.

§ 98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. Неизмѣняемая плоскость.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемыя силы при всѣхъ положеніяхъ системы удовлетворяютъ условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

тогда первое изъ дифференціальныхъ уравненій (641) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = 0,$$

а такъ какъ дифференціальныя уравненія (628) или (641) получены изъ дифференціальныхъ уравненій (517) движенія системы точекъ, то интегралъ

$$\lambda_x = C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (642, a)$$

VIII-98.

есть одинъ изъ первыхъ интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (517); этотъ интегралъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = C_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(642, a)}$$

можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$2(m_1\sigma_1(yz) + m_2\sigma_2(yz) + \ldots + m_n\sigma_n(yz)) = C_1 . \; . \; . \quad \textbf{(642, a, bis)}$$

Слѣдовательно, *если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ проэкція на ось $X^{\text{овъ}}$ главнаго момента задаваемыхъ силъ равна нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ интегралъ, выражающій, что проэкція на ту же ось главнаго момента количествъ движенія сохраняетъ постоянную величину.*

Законъ движенія, представляемый этимъ интеграломъ, называется *закономъ площадей въ плоскости YZ* и можетъ быть выраженъ (по формулѣ (642, a, bis)) слѣдующимъ образомъ: *секторьяльную скорость проэкціи каждой точки на плоскость YZ помножимъ на массу ея и составимъ подобныя произведенія для всѣхъ точекъ системы; сумма всѣхъ этихъ произведеній будетъ постоянною величиною во все время движенія системы.*

Если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, т. е., дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ будутъ тогда имѣть три интеграла: (642, a) и два слѣдующіе:

$$\text{л}_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i x_i' - x_i z_i') = C_2 \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(642, b)}$$

$$\text{л}_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i y_i' - y_i x_i') = C_3 \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{(642, c)}$$

Эти три интеграла выражаютъ, что *главный моментъ (вокругъ O) количествъ движенія системы точекъ сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе.*

Въ этихъ случаяхъ, въ которыхъ законъ площадей имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, онъ имѣетъ мѣсто также и во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть $\mathfrak{F}$ есть одна изъ такихъ плоскостей и OP—направленіе, перпендикулярное къ ней; по формулѣ (142), стр. 105, § 24-го, секторьяльная скорость проэкціи точки m на плоскость $\mathfrak{F}$ выражается такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0, P)}{2m}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(142)}$$

поэтому секторьяльная скорость проэкціи точки m_i на плоскость $\mathfrak{F}$ выражается такъ:

$$\sigma_i(\mathfrak{F}) = \frac{l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i), P)}{2m_i}, \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(643)}$$

гдѣ $l_0(m_i v_i)$ означаетъ величину и направленіе момента вокругъ начала координатъ количества движенія точки m_i.

Изъ формулы (643) слѣдуетъ:

$$2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \sum_{i=1}^{i=n} l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i),\ P),$$

но такъ какъ главный моментъ количествъ движенія есть геометрическая сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ точекъ, то вторая часть послѣдняго равенства равна проэкціи λ_0 на направленіе P:

$$2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \lambda_0 \cos(\lambda_0,\ P), \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(644)}$$

а это равенство выражаетъ законъ площадей въ плоскости $\mathfrak{F}$, потому что $\lambda_0 \cos(\lambda_0, P)$ есть величина постоянная, такъ какъ OP есть направленіе постоянное и λ_0 сохраняетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину.

Если означимъ черезъ $\mathfrak{r}_i$ проэкцію радіуса вектора точки m_i на

плоскость $\mathfrak{F}$, а через $\mathfrak{f}_i$—уголъ, составляемый направленіемъ $\mathfrak{r}_i$ съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости $\mathfrak{F}$, то, съ помощью извѣстныхъ намъ выраженій (§ 23) секторьяльной скорости, можно представить равенство (644) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathfrak{r}_i^2 \frac{d\mathfrak{f}_i}{dt} = \text{Л}_0 \cos(\text{Л}_0, P) \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(644}, \text{bis)}$$

И такъ, *если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, и притомъ удвоенная сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ и изъ ихъ секторьяльныхъ скоростей въ этой плоскости, равна проэкціи главнаго момента количествъ движенія на нормаль къ плоскости.*

Одна изъ этихъ плоскостей отличается отъ всѣхъ прочихъ тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ величину большую, чѣмъ для всякой другой плоскости; эта плоскость, перпендикулярная къ направленію Л_0, названа Лапласомъ *неизмѣняемою плоскостью;* законъ площадей въ этой плоскости выражается такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} = \text{Л}_0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(645)}$$

гдѣ ρ_i означаетъ проэкцію радіуса вектора точки m_i на неизмѣняемую плоскость, а θ_i—уголъ, составляемый направленіемъ ρ_i съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ этой плоскости.

Для всякой плоскости, проходящей черезъ направленіе Л_0, постоянная, находящаяся во второй части равенства (644, bis), равна нулю.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что при всякомъ положеніи системы главный моментъ ихъ вокругъ центра K равенъ нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ три интеграла:

$$(\text{Л}_k)_x = C_1, \; (\text{Л}_k)_y = C_2, \; (\text{Л}_k)_z = C_3,$$

(гдѣ $(\mathfrak{A}_k)_x$, $(\mathfrak{A}_k)_y$, $(\mathfrak{A}_k)_z$ суть выраженія (639, a, b, c) § 95) и законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ точку K; неизмѣняемая плоскость, конечно, перпендикулярна къ направленію главнаго момента $\mathfrak{A}_k$ количествъ движенія вокругъ центра K.

§ 99. Законъ площадей въ относительномъ движеніи системы матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, совершающую поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ; центръ инерціи C возьмемъ за начало подвижныхъ координатныхъ осей $C\Xi$, $C\Upsilon$, CZ, параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ; относительныя координаты точки m_i по отношенію къ этимъ осямъ будутъ:

$$\xi_i = x_i - x_c,\ \eta_i = y_i - y_c,\ \zeta_i = z_i - z_c.$$

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія (517) системы точекъ можно замѣнить абсолютныя координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ суммами: $(\xi_1 + x_c)$, $(\eta_1 + y_c)$, $(\zeta_1 + z_c)$, $(\xi_2 + x_c)$, . . . ; это въ особенности умѣстно въ тѣхъ случаяхъ, когда функціи $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_p$ и выраженія задаваемыхъ силъ заключаютъ только разности соотвѣтственныхъ координатъ различныхъ паръ точекъ, а не самыя координаты въ отдѣльности; въ этихъ случаяхъ дифференціальныя уравненія (517) легко преобразовать въ дифференціальныя уравненія, заключающія только относительныя координаты и ихъ производныя по времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ связей заключаются только разности координатъ: $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$, $(z_i - z_j)$ и др., а не отдѣльныя координаты, то тогда въ уравненіяхъ (616) § 85-го члены, заключающіе множителей $\lambda(\vartheta_1)$, $\lambda(\vartheta_2)$, ... $\lambda(\vartheta_p)$, взаимно сокращаются; напримѣръ, если ϑ_1 заключаетъ x_i только въ разностяхъ: $(x_i - x_1)$, $(x_i - x_2)$, которыя мы временно означимъ

VIII-47.

черезъ x_{1i} и x_{2i}, то въ уравненіи (616, а) будетъ заключаться членъ:

$$\lambda(\text{в}_1)\left[\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_{2i}}\right],$$

выражающій проэкцію на ось $X^{\text{овъ}}$ реакціи связи $\text{в}_1=0$ въ точкѣ m_i; этотъ членъ сократится съ членами:

$$-\lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_{1i}},\quad -\lambda(\text{в}_1)\frac{\partial\text{в}_1}{\partial x_{2i}},$$

входящими въ составъ выраженій проэкцій на ось $X^{\text{овъ}}$ реакцій той же связи въ точкахъ m_1 и m_2; изъ этого слѣдуетъ, что при такихъ связяхъ дифференціальныя уравненія (616) § 85-го получаютъ видъ уравненій (616 А) § 87, то есть:

$$Mx_c''=B_x,\ My_c''=B_y,\ Mz_c''=B_z;\ \ldots\ldots \quad \textbf{(616, A)}$$

при посредствѣ этихъ уравненій дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть преобразованы въ слѣдующія:

$$m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=X_i-\frac{m_i}{M}B_x+\sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\text{в}_k)\frac{\partial\text{в}_k}{\partial x_i}.\ \ldots \quad \textbf{(646, ai)}$$

$$m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}=Y_i-\frac{m_i}{M}B_y+\sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\text{в}_k)\frac{\partial\text{в}_k}{\partial y_i}.\ \ldots \quad \textbf{(646, bi)}$$

$$m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}=Z_i-\frac{m_i}{M}B_z+\sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\text{в}_k)\frac{\partial\text{в}_k}{\partial z_i},\ \ldots \quad \textbf{(646, ci)}$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, ... n; вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій заключаютъ разности (x_i-x_j), (y_i-y_j), (z_i-z_j) и проч., которыя могутъ быть замѣнены разностями $(\xi_i-\xi_j)$, $(\eta_i-\eta_j)$, $(\zeta_i-\zeta_j)$ и проч.

При этомъ надо принять во вниманіе слѣдующія равенства:

$$\sum_{i=1}^{i=n}m_i\xi_i=0,\ \sum_{i=1}^{i=n}m_i\eta_i=0,\ \sum_{i=1}^{i=n}m_i\zeta_i=0,\ \ldots\ldots \quad \textbf{(647)}$$

имѣющія мѣсто потому, что начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы.

Напримѣръ, въ примѣрѣ 61 (стр. 326—327), гдѣ $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$, и всѣ точки свободны, дифференціальныя уравненія (646) будутъ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} m_i\xi_i'' &= -\mu m_i M\xi_i \\ m_i\eta_i'' &= -\mu m_i M\eta_i \\ m_i\zeta_i'' &= -\mu m_i M\zeta_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (648, \text{i})$$

Эти дифференціальныя уравненія суть тѣ же самыя, съ которыми мы ознакомились на стр. 82; отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ матерьяльныхъ точекъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ описываетъ эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ инерціи системы.

Предположимъ, что связи, которыми связаны точки системы, таковы, что главный моментъ реакцій вокругъ центра инерціи системы равенъ нулю при всякомъ положеніи системы.

Какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) составлены три дифференціальныя уравненія (628) параграфа 93-го, такимъ же образомъ изъ дифференціальныхъ уравненій (646) можно составить три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

Первое:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i\zeta_i'' - \zeta_i\eta_i'') = \sum_{i=1}^{i=n}(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) -$$

$$-\frac{B_z}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i + \frac{B_y}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i, \quad \ldots\ldots \quad (649, \text{a})$$

въ силу же равенствъ (647) двѣ послѣднія суммы второй части этого уравненія равны нулю, поэтому получится:

$$\frac{d(л_c)_x}{dt} = (Л_c)_x, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (649, \text{a})$$

гдѣ $(л_c)_x$ и $(Л_c)_x$ суть проэкціи на ось $X^{овъ}$ главныхъ моментовъ

Ji-99

вокругъ центра инерціи количествъ движенія системы и задаваемыхъ силъ (см. формулы (650) и (651)).

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d(\lambda_c)_y}{dt} = (Л_c)_y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(649, b)}$$

$$\frac{d(\lambda_c)_z}{dt} = (Л_c)_z \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(649, c)}$$

гдѣ:

$$(\lambda_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i\zeta_i' - \zeta_i\eta_i'), \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(650, a)}$$

$$(Л_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i); \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(651, a)}$$

(легко догадаться, какой видъ имѣютъ выраженія величинъ $(\lambda_c)_y$, $(\lambda_c)_z$, $(Л_c)_y$, $(Л_c)_z$).

Надо замѣтить, что величины $(\lambda_c)_x$, $(\lambda_c)_y$, $(\lambda_c)_z$ могутъ быть выражены еще иначе; такъ какъ:

$$\xi_i' = x_i' - x_c', \quad \eta_i' = y_i' - y_c', \quad \zeta_i' = z_i' - z_c',$$

то $(\lambda_c)_x$ можно представить такъ:

$$(\lambda_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i z_i' - \zeta_i y_i') - z_c' \sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i + y_c' \sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i,$$

на основаніи же формулъ (647), двѣ послѣднія суммы равны нулю, а потому:

$$(\lambda_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\eta_i \frac{dz_i}{dt} - \zeta_i \frac{dy_i}{dt}\right) \; . \; . \quad \textbf{(650, a, bis)}$$

и проч.; т.-е. по формуламъ (650), величины $(\lambda_c)_x$, $(\lambda_c)_y$, $(\lambda_c)_z$ суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ относительнаго движенія матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ вообра-

жаемой неизмѣняемой средѣ, по формуламъ же (650, bis) онѣ же суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ абсолютнаго движенія тѣхъ же точекъ.

Если задаваемыя силы при всякомъ положеніи системы удовлетворяютъ условіямъ:

$$(Л_c)_x = 0, \ (Л_c)_y = 0, \ (Л_c)_z = 0, \ . \ . \ . \ . \ \textbf{(652)}$$

то дифференціальныя уравненія движенія имѣютъ слѣдующіе интегралы:

$$(л_c)_x = C_1, \ (л_c)_y = C_2, \ (л_c)_z = C_3 \ . \ . \ . \ . \ \textbf{(653)}$$

Слѣдовательно, *если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю при всѣхъ положеніяхъ системы, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ* ΥΖ, ΖΞ, ΞΖ, *движущихся вмѣстѣ съ центромъ инерціи, черезъ который онѣ проходятъ.* Главный моментъ вокругъ центра инерціи количествъ движенія точекъ системы сохраняетъ тогда постоянную величину и неизмѣнное направленіе; перпендикулярная къ нему плоскость, заключающая въ себѣ центръ инерціи, остается, поэтому, параллельною самой себѣ, переносясь вмѣстѣ съ неизмѣняемою средою въ пространствѣ; эта плоскость есть *неизмѣняемая плоскость* относительнаго движенія системы точекъ по отношенію къ воображаемой средѣ, движущейся вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Называя эту плоскость неизмѣняемою, мы подъ этимъ подразумѣваемъ нижеслѣдующее.

Представимъ себѣ, что проведена какая-либо плоскость черезъ центръ инерціи C системы и что эта плоскость неизмѣнно связана съ воображаемою неизмѣняемою средою; составимъ *секторьяльныя скорости вокругъ C относительнаго движенія* проэкцій точекъ системы на эту плоскость; секторьяльную скорость каждой точки помножимъ на массу ея и возьмемъ сумму всѣхъ такихъ произведеній; эта сумма сохраняетъ постоянную величину $л_c \cos(P, л_c)$ во все время движенія (гдѣ P — направленіе нормали къ плоскости). Неизмѣняемая плоскость, о которой мы говоримъ, отличается отъ прочихъ

плоскостей, проведенныхъ черезъ C, тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ бо́льшую величину (а именно: λ_c) чѣмъ для всѣхъ прочихъ плоскостей.

§ 100. Примѣры случаевъ, въ которыхъ законы площадей имѣютъ мѣсто.

Если всѣ точки системы свободны, если нѣтъ другихъ силъ, кромѣ взаимнодѣйствій между точками системы, если притомъ силы взаимнодѣйствія между каждыми двумя точками системы, не только равны и прямопротивоположны, но и *направлены вдоль по линіи соединяющей эти точки*, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости, проходящей черезъ какую угодно точку пространства и во всякой плоскости проходящей черезъ центъ инерціи системы, движущейся вмѣстѣ съ нимъ и остающейся параллельною самой себѣ.

Примѣръ 61-й (стр. 326). Въ этомъ примѣрѣ система состоитъ только изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ. Центръ инерціи находится на линіи кратчайшаго разстоянія между точками и дѣлитъ это разстояніе въ постоянномъ отношеніи, равномъ обратному отношенію массъ точекъ; изъ этого слѣдуетъ, что траэкторіи относительнаго движенія точекъ суть кривыя подобныя между собою, подобно-расположенныя въ воображаемой неизмѣняемой средѣ и имѣющія центромъ подобія — центръ инерціи C этихъ точекъ.

Можно показать, что обѣ точки совершаютъ относительное движеніе въ одной плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи C. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ:

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}=\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=-\frac{m_1}{m_2}, \quad \ldots . \quad (654)$$

(гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть длины радіусовъ векторовъ CM_1 и CM_2 движущихся точекъ) слѣдуютъ равенства:

$$\frac{\xi_2'}{\xi_1'}=\frac{\eta_2'}{\eta_1'}=\frac{\zeta_2'}{\zeta_1'}=-\frac{m_1}{m_2}; \quad \ldots \ldots \quad (655)$$

на основаніи этихъ равенствъ интегралы:

$$m_1(\eta_1\zeta_1'-\zeta_1\eta_1')+m_2(\eta_2\zeta_2'-\zeta_2\eta_2')=C_1,$$
$$m_1(\zeta_1\xi_1'-\xi_1\zeta_1')+m_2(\zeta_2\xi_2'-\xi_2\zeta_2')=C_2,$$
$$m_1(\xi_1\eta_1'-\eta_1\xi_1')+m_2(\xi_2\eta_2'-\eta_2\xi_2')=C_3$$

могутъ быть преобразованы въ слѣдующія равенства:

$$m_1(\eta_1\zeta_1' - \zeta_1\eta_1') = C_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\zeta_1\xi_1' - \xi_1\zeta_1') = C_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\xi_1\eta_1' - \eta_1\xi_1') = C_3 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

изъ которыхъ видно, что точка m_1 совершаетъ свое относительное движеніе въ плоскости:

$$C_1\xi_1 + C_2\eta_1 + C_3\zeta_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(656)}$$

Въ той же самой плоскости совершаетъ свое относительное движеніе и точка m_2; эта плоскость есть неизмѣняемая плоскость относительнаго движенія системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C.

Изъ того, что было упомянуто относительно настоящаго примѣра въ § 87 (стр. 429), и изъ только-что приведенныхъ разсужденій можемъ составить себѣ нѣкоторое, хотя еще и неполное, представленіе о движеніи точекъ.

Центръ инерціи C обѣихъ точекъ движется равномѣрно и прямолинейно; представимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступателню вмѣстѣ съ центромъ инерціи; движеніе каждой изъ матерьяльныхъ точекъ можно разсматривать какъ составное изъ переноснаго движенія вмѣстѣ съ этою воображаемою средою и изъ относительнаго движенія по отношенію къ этой средѣ; относительныя движенія обѣихъ точекъ совершаются въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи, и притомъ траэкторіи обѣихъ точекъ подобны между собою и подобно расположены, имѣя центромъ подобія точку C; что же касается до вида траэкторій, то онъ зависитъ отъ вида функціи $F(r_{12})$.

Въ примѣрѣ 62-мъ центръ инерціи системы также движется прямолинейно и равномѣрно и притомъ, какъ замѣчено въ предыдущемъ параграфѣ, каждая изъ матерьяльныхъ точекъ описываетъ свой эллипсъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; центры всѣхъ эллипсовъ совпадаютъ съ центромъ инерціи системы. Въ этомъ случаѣ относительное движеніе каждой матерьяльной точки удовлетворяетъ закону площадей, а потому этотъ законъ имѣетъ мѣсто также и

VIII - 100.

для всей системы, во всякой плоскости, проведенной черезъ центръ инерціи.

Положеніе неизмѣняемой плоскости зависитъ отъ положеній и размѣровъ всѣхъ эллипсовъ.

Если всѣ точки системы свободны и къ нимъ, кромѣ вышесказанныхъ силъ взаимодѣйствія, приложены силы, направленныя къ началу координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Примѣръ 85-й. Система состоитъ изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ, между которыми дѣйствуютъ тѣ же самыя силы взаимодѣйствія, какъ и въ примѣрѣ 61-мъ; кромѣ того, точка m_1 притягивается къ началу координатъ силою $\mu_1 f(r_1)$, и точка m_2—силою $\mu_2 f(r_2)$.

Въ этомъ случаѣ траэкторіи точекъ могутъ быть не плоскими кривыми линіями; но, каковы бы ни были эти кривыя, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проведенной черезъ начало координатъ; неизмѣняемая плоскость обладаетъ въ этомъ случаѣ тѣмъ свойствомъ, что въ ней заключается прямая линія, по которой пересѣкаются двѣ плоскости: одна — проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_1, другая—черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2; эти плоскости, конечно, измѣняютъ свои положенія вмѣстѣ съ движеніемъ матерьяльныхъ точекъ, но линія пересѣченія ихъ остается въ неизмѣняемой плоскости, хотя и можетъ мѣнять въ ней положеніе. Доказать это свойство неизмѣняемой плоскости весьма нетрудно. Дѣйствительно, плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость m_1, имѣетъ нормалью направленіе момента количества движенія этой точки; плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2, имѣетъ нормалью направленіе момента ея количества движенія; наконецъ, неизмѣняемая плоскость имѣетъ нормалью главный моментъ количествъ движенія; всѣ эти три момента заключаются въ одной плоскости, а потому перпендикулярныя къ нимъ плоскости пересѣкаются по одной линіи, что и требовалось доказать.

Если, кромѣ вышесказанныхъ взаимодѣйствій и силъ, направленныхъ къ началу координатъ, къ точкамъ системы приложены силы, направленія которыхъ пересѣкаютъ нѣкоторую неподвижную ось, проходящую черезъ начало координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, которая перпендикулярна къ этой оси.

Если точки системы не свободны, но связи между ними принадлежатъ къ числу тѣхъ которыя указаны въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ, 55-мъ (стр. 305—306), 56-мъ, 60-мъ (стр. 306 и 324) и притомъ, если ни одна изъ такихъ связей не связываетъ ни одной изъ матерьяльныхъ точекъ системы ни съ какою-либо неподвижною точкою, ни съ какою-либо точкою постороннею системѣ; если, кромѣ того, всѣ силы, приложенныя къ матерьяльнымъ точкамъ системы, суть силы взаимнодѣйствія между парами точекъ, попарно равныя, прямопротивоположныя и направленныя вдоль по линіямъ, соединяющимъ взаимнодѣйствующія матерьяльныя точки, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости, даже и не проходящей черезъ начало координатъ, а также и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи системы.

Такъ, напримѣръ, при движеніи неизмѣняемой системы точекъ (т.-е., такой системы, точки которой связаны между собою неизмѣняемыми связями), если эта система свободна и не подвержена никакимъ силамъ, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проведенной черезъ центръ инерціи системы.

Если точки системы связаны между собою только вышеупомянутыми связями и къ нимъ, кромѣ вышеозначенныхъ взаимнодѣйствій, приложены силы, направленныя къ нѣкоторой неподвижной точкѣ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ эту точку.

Примѣръ 66-й, (стр. 371). Въ этомъ примѣрѣ четыре точки связаны четырьмя неизмѣняемыми связями и притягиваются къ началу координатъ; поэтому законъ площадей имѣетъ мѣсто для площадей, описываемыхъ радіусами векторами точекъ, проведенными изъ начала координатъ; кромѣ того, въ этомъ случаѣ законъ площадей имѣетъ мѣсто также и въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C, потому что здѣсь главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться; главный же моментъ количествъ движенія этой системы вокругъ центра инерціи, выражающійся такъ:

$$(m_1\xi^2 + m_2(l^2 - \xi^2))\vartheta',$$

долженъ, поэтому, сохранять постоянную величину, что и подтверждается однимъ изъ дифференціальныхъ уравненій системы, а именно тѣмъ, которое приведено въ послѣдней строкѣ страницы 371-й.

§ 101. Главный моментъ количествъ движенія сплошнаго тѣла.

Когда намъ придется разсматривать какой-либо вопросъ о движеніи сплошнаго тѣла, то поступимъ такъ, какъ сказано въ § 89-мъ предыдущей главы, т.-е. представимъ себѣ, что это тѣло раздѣлено на безконечно-малые элементы и что каждый элементъ замѣнёнъ матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ элемента и которая находится внутри или на поверхности элемента; поэтому проэкціи на оси координатъ главнаго момента вокругъ начала координатъ количествъ движенія сплошнаго тѣла выразятся слѣдующими интегралами, распространенными по объему тѣла:

$$Л_x = \int\int\int \sigma(yz' - zy')dO \; . \; . \; . \; . \; . \quad (657,\ a)$$

$$Л_y = \int\int\int \sigma(zx' - xz')dO \; , \; . \; . \; . \; . \quad (657,\ b)$$

$$Л_z = \int\int\int \sigma(xy' - yx')dO \; . \; . \; . \; . \; . \quad (657,\ c)$$

§ 102. Главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ или твердаго тѣла; проэкціи его на неподвижныя оси координатъ.

Въ вопросахъ о движеніи неизмѣняемыхъ системъ матерьяльныхъ точекъ или сплошныхъ твердыхъ тѣлъ придется нерѣдко имѣть дѣло съ выраженіями проэкцій главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на неподвижныя оси координатъ и на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ системою. Въ этомъ и въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы составимъ эти выраженія и разсмотримъ свойства нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ составъ этихъ выраженій.

Положимъ, что неизмѣняемая система состоитъ изъ n матерьяльныхъ точекъ. Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, съ которою точки системы неизмѣняемо связаны. Одну изъ точекъ этой среды обозначимъ буквою *Ю*.

Составимъ выраженіе проэкцій на оси $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$, и $Z^{\text{овъ}}$ главнаго момента вокругъ точки *Ю* количествъ движенія неизмѣняемой системы матерьяльныхъ точекъ. Возьмемъ выраженіе:

$$(\text{л}_{\text{ю}})_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[(y_i - y_{\text{ю}})z_i' - (z_i - z_{\text{ю}})y_i'\Big] \quad . \; . \; . \; \textbf{(639, a, bis)}$$

и подобныя же выраженія для $(\text{л}_{\text{ю}})_y$ и $(\text{л}_{\text{ю}})_z$, выразимъ заключающіяся въ нихъ скорости x_i', y_i', z_i' по формуламъ (142) страницы 125-й кинематической части, тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned}(\text{л}_{\text{ю}})_x = & \, M((y_c - y_{\text{ю}})z'_{\text{ю}} - (z_c - z_{\text{ю}})y'_{\text{ю}}) + \\ & + (I_x)_{\text{ю}}P - S_{xy}Q - S_{zx}R \quad . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(658, a)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{л}_{\text{ю}})_y = & \, M((z_c - z_{\text{ю}})x'_{\text{ю}} - (x_c - x_{\text{ю}})z'_{\text{ю}}) + \\ & + (I_y)_{\text{ю}}Q - S_{yz}R - S_{xy}P \quad . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(658, b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{л}_{\text{ю}})_z = & \, M((x_c - x_{\text{ю}})y'_{\text{ю}} - (y_c - y_{\text{ю}})x'_{\text{ю}}) + \\ & + (I_z)_{\text{ю}}R - S_{zx}P - S_{yz}Q \, , \quad . \; . \; . \; . \; \textbf{(658, c)}\end{aligned}$$

гдѣ:

$$(I_x)_{\text{ю}} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((y_i - y_{\text{ю}})^2 + (z_i - z_{\text{ю}})^2\Big),$$

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i - y_{\text{ю}})\,(z_i - z_{\text{ю}}),$$

$$(I_y)_{\text{ю}} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((z_i - z_{\text{ю}})^2 + (x_i - x_{\text{ю}})^2\Big),$$

$$S_{zx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i - z_{\text{ю}})\,(x_i - x_{\text{ю}}),$$

VIII-102.103.

$$(I_z)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((x_i - x_ю)^2 + (y_i - y_ю)^2\Big),$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i - x_ю)\,(y_i - y_ю).$$

§ 103. Проэкціи главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ этою системою.

Проэкціи этого главнаго момента на оси $ЮΞ$, $ЮΥ$, $ЮZ$ мы будемъ обозначать слѣдующими знаками: $(л_ю)_\xi$, $(л_ю)_\eta$, $(л_ю)_\zeta$.

Очевидно, что эти проэкціи могутъ быть выражены слѣдующими трехчленами:

$$(л_ю)_\xi = л_ю \cos(л_ю, \Xi) = (л_ю)_x\lambda_x + (л_ю)_y\lambda_y + (л_ю)_z\lambda_z \ldots \textbf{(659, a)}$$

$$(л_ю)_\eta = л_ю \cos(л_ю, \Upsilon) = (л_ю)_x\mu_x + (л_ю)_y\mu_y + (л_ю)_z\mu_z \ldots \textbf{(659, b)}$$

$$(л_ю)_\zeta = л_ю \cos(л_ю, Z) = (л_ю)_x\nu_x + (л_ю)_y\nu_y + (л_ю)_z\nu_z, \ldots \textbf{(659, c)}$$

гдѣ λ_x, μ_x, ν_x, ... ν_z суть косинусы угловъ между координатными осями неподвижными и осями $ЮΞ$, $ЮΥ$, $ЮZ$ (см. стр. 57 кинематической части).

Выразимъ въ трехчленѣ (659, a) величины $(л_ю)_x$, $(л_ю)_y$, $(л_ю)_z$ по формуламъ (639, bis) предыдущаго параграфа, а величины λ_x, λ_y, λ_z по формуламъ (60, a, b, c) кинематической части (стр. 60), получимъ:

$$(л_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[\Big((y_i - y_ю)z_i' - (z_i - z_ю)y_i'\Big)(\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y) +$$
$$+ \Big((z_i - z_ю)x_i' - (x_i - x_ю)z_i'\Big)(\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z) +$$
$$+ \Big((x_i - x_ю)y_i' - (y_i - y_ю)x_i'\Big)(\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x)\Big];$$

выраженіе, заключающееся здѣсь въ прямыхъ скобкахъ, можетъ быть

преобразовано по формулѣ (154), приведенной на стр. 138-й кинематической части; оно окажется равнымъ:

$$\Big[\big((x_i - x_ю)\mu_x + (y_i - y_ю)\mu_y + (z_i - z_ю)\mu_z\big)(x_i'\nu_x + y_i'\nu_y + z_i'\nu_z) - \\ - \big((x_i - x_ю)\nu_x + (y_i - y_ю)\nu_y + (z_i - z_ю)\nu_z\big)(x_i'\mu_x + y_i'\mu_y + z_i'\mu_z)\Big],$$

то-есть:

$$[\eta_i v_i \cos(v_i, \mathbf{Z}) - \zeta_i v_i \cos(v_i, \Upsilon)];$$

слѣдовательно, $(л_ю)_\xi$, $(л_ю)_\eta$, $(л_ю)_\zeta$ могутъ быть выражены подъ видомъ слѣдующихъ суммъ:

$$(л_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\eta_i \cos(v_i, \mathbf{Z}) - \zeta_i \cos(v_i, \Upsilon)\Big) \ldots \textbf{(660, a)}$$

$$(л_ю)_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\zeta_i \cos(v_i, \Xi) - \xi_i \cos(v_i, \mathbf{Z})\Big) \ldots \textbf{(660, b)}$$

$$(л_ю)_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\xi \cos(v_i, \Upsilon) - \eta_i \cos(v_i, \Xi)\Big) \ldots \textbf{(660, c)}$$

Эти формулы аналогичны формуламъ (639 bis) предыдущаго параграфа.

Чтобы получить формулы, аналогичныя формуламъ (658) предыдущаго параграфа, выразимъ проэкціи скоростей точекъ неизмѣняемой системы на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ по формуламъ (143) стр. 125 кинематической части, напримѣръ:

$$v_i \cos(v_i, \Xi) = w_ю \cos(w_ю, \Xi) + \zeta_i q - \eta_i r,$$

и проч.; получимъ:

$$(л_ю)_\xi = M w_ю\big(\eta_c \cos(w_ю, \mathbf{Z}) - \zeta_c \cos(w_ю, \Upsilon)\big) + \\ + A_ю p - F_ю q - E_ю r; \ldots\ldots\ldots \textbf{(661, a)}$$

VIII-103.104

$$(л_{ю})_{\eta} = Mw_{ю}(\zeta_c \cos(w_{ю}, \Xi) - \xi_c \cos(w_{ю}, \mathbf{Z})) + $$
$$+ B_{ю}q - D_{ю}r - F_{ю}p, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(661, b)}$$

$$(л_{ю})_{\zeta} = Mw_{ю}(\xi_c \cos(w_{ю}, \Upsilon) - \eta_c \cos(w_{ю}, \Xi)) + $$
$$+ C_{ю}r - E_{ю}p - D_{ю}q, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(661, c)}$$

гдѣ ξ_c, η_c, ζ_c суть относительныя координаты центра инерціи неизмѣняемой системы, а $A_{ю}$, $B_{ю}$, $C_{ю}$, $D_{ю}$, $E_{ю}$, $F_{ю}$ — постоянныя величины, выражаемыя слѣдующими суммами:

$$A_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2), \ldots \mathbf{(662, a)}, \qquad D_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i \zeta_i, \ldots \mathbf{(662, d)}$$

$$B_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\zeta_i^2 + \xi_i^2), \ldots \mathbf{(662, b)}, \qquad E_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i \xi_i, \ldots \mathbf{(662, e)}$$

$$C_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \ldots \mathbf{(662, c)}, \qquad F_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i \eta_i, \ldots \mathbf{(662, f)}$$

104. Моменты инерціи.

Величины $A_{ю}$, $B_{ю}$, $C_{ю}$ (662, a, b, c) называются *моментами инерціи* неизмѣняемой системы точекъ вокругъ осей $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathbf{Z}$ *).

Моментомъ инерціи какой-либо системы точекъ вокругъ какой-либо оси KU (K есть одна изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ) *называется слѣдующая сумма*:

$$m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + \ldots + m_i\rho_i^2 + \ldots + m_n\rho_n^2,$$

гдѣ ρ_1, ρ_2, ... ρ_n суть разстоянія точекъ системы отъ оси KU.

Такую сумму мы будемъ обозначать знакомъ $(I_U)_k$, гдѣ значокъ, поставленный внутри скобокъ, служитъ для обозначенія направленія

*) Величины $D_{ю}$, $E_{ю}$, $F_{ю}$ извѣстны у англійскихъ авторовъ подъ именемъ *произведеній инерціи* (product of inertia).

оси, а значокъ, поставленный внѣ скобокъ, — для обозначенія одной изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ; напримѣръ, моменты инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку *Ю* и параллельныхъ осямъ $X^{\text{овъ}}$, $У^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ мы обозначимъ символами $(I_x)_ю$, $(I_y)_ю$, $(I_z)_ю$, что уже и сдѣлано въ концѣ § 102.

Моментъ инерціи какого-либо сплошнаго тѣла вокругъ оси *KU* выразится интеграломъ:

$$(I_U)_k = \int\int\int \sigma\rho^2 dO, \ldots\ldots\ldots (663)$$

распространеннымъ по всему объему тѣла; здѣсь ρ означаетъ разстояніе элемента dO отъ оси *KU*.

Моментъ инерціи есть произведеніе изъ массы на квадратъ длины; единица моментовъ инерціи:

$$(\text{единица моментовъ инерціи}) = м \,.\, д^2 \ldots\ldots (664)$$

можетъ быть разсматриваема, какъ моментъ инерціи матерьяльной точки, масса которой равна единицѣ и которая отстоитъ отъ оси (вокругъ которой составляютъ моментъ инерціи) на разстояніи, равномъ единицѣ длины.

При одномъ и томъ же относительномъ расположеніи точекъ системы между собою, моменты инерціи системы вокругъ различныхъ осей имѣютъ весьма различныя величины; однако, существуетъ нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, и нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ параллельныхъ между собою осей.

§ 105. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи. Главныя оси инерціи.

Для оріентированія данной системы точекъ или сплошнаго тѣла, представимъ себѣ неизмѣняемую среду, въ которой эта система или тѣло расположены и проведемъ черезъ точку *Ю*, черезъ которую про-

Vig - 104 -

ходятъ разсматриваемыя оси, координатныя оси $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $ЮZ$, незмѣнно связанныя со средою.

Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями координатъ какою-либо осью $ЮU$ (черт. 58); пусть m_i есть одна изъ точекъ системы, r_i—радіусъ векторъ ея, проведенный изъ точки $Ю$; ξ_i, η_i, ζ_i — ея координаты относительно осей Ξ, Υ Z; ρ_i—разстояніе ея отъ оси $ЮU$.

Очевидно:

$$\rho_i^2 = r_i^2 \sin^2(r_i,\ U) = r_i^2 - r_i^2 \cos^2(r_i,\ U);$$

но:

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2;\ \ r_i \cos(r_i\ U) = \xi_i\lambda + \eta_i\mu + \zeta_i\nu,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = (1-\lambda^2)\xi_i^2 + (1-\mu^2)\eta_i^2 + (1-\nu^2)\zeta_i^2 -$$
$$- 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\zeta_i\eta_i;$$

далѣе:

$$1-\lambda^2 = \mu^2+\nu^2,\ \ 1-\mu^2 = \nu^2+\lambda^2,\ \ 1-\nu^2 = \lambda^2+\mu^2,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = \lambda^2(\eta_i^2+\zeta_i^2) + \mu^2(\zeta_i^2+\xi_i^2) + \nu^2(\xi_i^2+\eta_i^2) -$$
$$- 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\xi_i\eta_i.$$

Отсюда получимъ слѣдующее выраженіе для момента инерціи системы вокругъ оси $ЮU$:

$$(I_U)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\rho_i^2 = A_ю\lambda^2 + B_ю\mu^2 + C_ю\nu^2 -$$
$$- 2D_ю\mu\nu - 2E_ю\nu\lambda - 2F_ю\lambda\mu,\ \ldots\ldots \quad \mathbf{(665)}$$

гдѣ $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ суть величины, выражаемыя суммами (662) § 103.

Эта формула выражаетъ зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ осей, проведенныхъ черезъ точку $Ю$; чтобы

представить эту зависимость въ болѣе наглядной формѣ, отложимъ отъ *Ю* по *ЮU* длину $\mathfrak{r}$, относящуюся къ единицѣ длины такъ, какъ корень изъ единицы моментовъ инерціи относится къ корню изъ $(I_U)_ю$, т.-е.:

$$\mathfrak{r} = \frac{м^{\frac{1}{2}}\partial^2}{\sqrt{(I_U)_ю}};$$

координаты конца этой длины будутъ:

$$\xi = \mathfrak{r}\lambda,\ \ \eta = \mathfrak{r}\mu,\ \ \zeta = \mathfrak{r}\nu,$$

а потому равенство (665) можно преобразовать въ слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{м\partial^4}\Big[A_ю\xi^2 + B_ю\eta^2 + C_ю\zeta^2 - 2D_ю\eta\zeta - 2E_ю\zeta\xi - 2F_ю\xi\eta\Big] .. \quad \textbf{(666)}$$

Если представить себѣ, что то же самое сдѣлано для всевозможныхъ направленій, проведенныхъ изъ точки *Ю*, то концы длины $\mathfrak{r}$ образуютъ поверхность, выражаемую уравненіемъ (666).

Эта поверхность есть одна изъ поверхностей втораго порядка, имѣющая центръ въ точкѣ *Ю*; нетрудно убѣдиться, что это можетъ быть либо эллипсоидъ, либо круговой цилиндръ.

Въ самомъ дѣлѣ, если поверхность (666) имѣетъ безконечно-длинные радіусы векторы, то эти векторы должны быть направлены по тѣмъ осямъ, вокругъ которыхъ моменты инерціи системы точекъ равны нулю; но такихъ осей можетъ быть только одна, и то въ томъ только случаѣ, если вдоль по ней расположены всѣ точки системы; поэтому, либо всѣ радіусы векторы поверхности (666) имѣютъ конечныя длины (тогда это есть эллипсоидъ), либо только два радіуса вектора, прямопротивоположные другъ другу, безконечно велики (тогда это есть цилиндрическая поверхность съ круговымъ основаніемъ).

Въ частности, эллипсоидъ можетъ быть эллипсоидомъ вращенія планетарнымъ или удлиненнымъ, или сферою.

Круговой цилиндръ можно разсматривать тоже какъ эллипсоидъ, одна изъ главныхъ осей котораго удлинена до безконечности а двѣ прочія главныя оси равны между собою; такъ что можно сказать, что

поверхность (666) есть эллипсоидъ или которая-либо изъ его разновидностей. Эту поверхность называютъ *эллипсоидомъ инерціи* (данной системы точекъ) *для точки Ю*.

Если оси координатъ $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $ЮZ$ совмѣстимъ съ главными осями эллипсоида инерціи, то уравненіе его должно будетъ получить слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{мд^4}\left[\mathfrak{A}_{ю}\xi^2 + \mathfrak{B}_{ю}\eta^2 + \mathfrak{C}_{ю}\zeta^2\right]; \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(667)}$$

слѣдовательно, величина момента инерціи данной системы матерьяльныхъ точекъ вокругъ оси $ЮU$, составляющей съ главными осями эллипсоида инерціи углы, косинусы которыхъ суть λ, μ, ν, можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$(I_U)_{ю} = \mathfrak{A}_{ю}\lambda^2 + \mathfrak{B}_{ю}\mu^2 + \mathfrak{C}_{ю}\nu^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(668)}$$

Главныя оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи* (данной системы точекъ или сплошнаго тѣла) *въ той точкѣ Ю, въ которой эллипсоидъ имѣетъ свой центръ.*

Величины $\mathfrak{A}_{ю}$, $\mathfrak{B}_{ю}$, $\mathfrak{C}_{ю}$ суть моменты инерціи системы вокругъ главныхъ осей инерціи въ точкѣ $Ю$; суммы же вида (662, d, e, f), такъ называемыя products of inertia, при этихъ осяхъ координатъ равны нулю, какъ видно изъ сравненія выраженія (668) съ выраженіемъ (665).

Такъ какъ за точку $Ю$ можетъ быть взята какая угодно точка той неизмѣняемой среды, относительно которой мы оріентируемъ данную систему точекъ (или сплошное тѣло), то можемъ сказать слѣдующее:

Черезъ всякую точку можно провести три такія взаимно перпендикулярныя оси, что если возьмемъ эти оси за оси координатъ то products of inertia данной системы (или сплошнаго тѣла) будутъ равны нулю; эти три оси суть главныя оси инерціи данной системы (или сплошнаго тѣла) въ разсматриваемой точкѣ.

Слово «инерція», входящее въ составъ вышеприведенныхъ терминовъ, должно указывать на то, что понятія, выражаемыя этими терминами,

играютъ существенную роль въ теоріи вращенія твердаго тѣла по инерціи; считаемъ нужнымъ теперь же дать нѣкоторыя указанія относительно этого предмета.

Представимъ себѣ, что данная система матерьяльныхъ точекъ есть система неизмѣнлемая (или данное сплошное тѣло есть тѣло твердое) и что она можетъ свободно вращаться только вокругъ неподвижной оси $ЮU$; такъ какъ тогда угловая скорость Ω неизмѣняемой системы можетъ быть направлена только вдоль по оси $ЮU$ или по противоположному ея продолженію, то величина главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы будетъ равна:

$$\Omega\sum_{i=1}^{i=n} m_i\rho_i^2 = (I_U)_ю\,\Omega,$$

а если угловая скорость будетъ равна единицѣ, то главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы будетъ равенъ:

$$\frac{1}{в}(I_U)_ю \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(669)}$$

Извѣстно, что твердое тѣло, неподверженное никакимъ силамъ, но могущее свободно вращаться вокругъ неподвижной оси, будетъ вращаться вокругъ нея по инерціи съ постоянною угловою скоростью, съ тою, которая была сообщена ему ударомъ или какими-либо силами, дѣйствовавшими на него, но прекратившими свое дѣйствіе.

Поэтому можно дать слѣдующее опредѣленіе величинъ $(I_U)_ю$: *отношеніе* (669) *выражаетъ величину главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы, вращающейся по инерціи вокругъ оси* $ЮU$ *съ угловою скоростью, равною единицѣ*; терминъ: „моментъ инерціи неизмѣняемой системы точекъ вокругъ оси $ЮU$“ есть сокращенное выраженіе этого опредѣленія.

„Эллипсоидъ инерціи“, который слѣдовало бы называть *эллипсоидомъ моментовъ инерціи*, имѣетъ существенное значеніе въ теоріи вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки по инерціи; въ главѣ о движеніи твердаго тѣла будетъ показано, что при этомъ вращеніи эллипсоидъ инерціи, имѣя неподвижный центръ, катится безъ скольженія по нѣкоторой неподвижной плоскости.

При такомъ движеніи угловая скорость твердаго тѣла, вообще говоря, не сохраняетъ неизмѣннаго положенія, ни въ самомъ тѣлѣ, ни въ пространствѣ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ начальная угло-

вая скорость была направлена по одной изъ трехъ главныхъ осей эллипсоида инерціи; тогда вращеніе тѣла по инерціи будетъ продолжаться вокругъ этой оси съ постоянною скоростью и эта ось будетъ сохранять неизмѣнное направленіе въ пространствѣ; вотъ почему главныя оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи.*

Вращеніе тѣла по инерціи будетъ разсмотрѣно въ главѣ о движеніи твердаго тѣла.

Эллипсоидъ инерціи для центра инерціи (данной системы точекъ) называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи*, главныя оси его — *главными центральными осями инерціи* данной системы, а моменты инерціи $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$ вокругъ этихъ осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 — *главными центральными моментами инерціи* данной системы.

Величина момента инерціи данной системы точекъ вокругъ оси CU, проходящей черезъ центръ инерціи этой системы, выразится формулою:

$$(I_U)_c = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2, \quad \ldots\ldots \quad (670)$$

если за оси координатъ взяты главныя центральныя оси инерціи $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0.

§ 106. Зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей.

Пусть черезъ точку $Ю$ проведена какая-либо ось, а черезъ центръ инерціи C — другая, ей параллельная; возьмемъ C за начало координатъ, послѣднюю ось — за координатную ось CZ, плоскость, проходящую черезъ обѣ оси, — за координатную плоскость $ZC\Xi$ (черт. 59); означимъ черезъ $(I_\zeta)_c$ моментъ инерціи данной системы вокругъ оси CZ, черезъ $(I_\zeta)_ю$ моментъ инерціи ея вокругъ оси $ЮZ_1$ и черезъ Δ — разстояніе CK между осями.

Моменты инерціи системы вокругъ осей CZ и $ЮZ_1$ выразятся слѣдующими суммами:

$$(I_\zeta)_c = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (I_\zeta)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left((\xi_i - \Delta)^2 + \eta_i^2\right),$$

послѣднюю же сумму можно представить такъ:

$$(I_\zeta)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2) - 2\Delta\sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i + M\Delta^2;$$

но такъ какъ точка C есть центръ инерціи, то сумма, заключающаяся во второмъ членѣ второй части, равна нулю, а потому:

$$(I_\zeta)_ю = (I_\zeta)_c + M\Delta^2 \,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (671)$$

и вообще:

$$(I_U)_k = (I_U)_e + M\Delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (672)$$

Если бы всѣ точки данной системы были сосредоточены въ ея центрѣ инерціи, то моментъ инерціи ея вокругъ оси KU былъ бы равенъ произведенію $M\Delta^2$. Выведенная здѣсь формула (672) выражаетъ, что *моментъ инерціи данной системы вокругъ какой либо оси, непроходящей черезъ центръ инерціи, равняется суммѣ, составленной изъ момента инерціи этой же системы вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи и изъ того момента инерціи, который система имѣла бы, если бы была вся сосредоточена въ своемъ центрѣ инерціи.*

Между величинами моментовъ инерціи данной системы вокругъ двухъ параллельныхъ осей KU и K_1U_1, отстоящихъ отъ центра инерціи C на разстояніяхъ Δ и Δ_1, существуетъ слѣдующая зависимость:

$$(\text{Мом. инерц. вокругъ оси } KU) - M\Delta^2 =$$
$$= (\text{Мом. инерц. вокругъ оси } K_1U_1) - M\Delta_1^2.$$

Между моментами инерціи вокругъ всевозможныхъ параллельныхъ осей, моментъ инерціи вокругъ той оси, которая проходитъ центръ инерціи, имѣетъ величину наименьшую.

§ 107. По центральнымъ главнымъ осямъ и моментамъ инерціи могутъ быть опредѣлены эллипсоиды инерціи во всѣхъ прочихъ точкахъ пространства.

Зная направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи $C\Xi_0$,

$C\Upsilon_0$, CZ_0 данной системы и величины главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи, можемъ опредѣлить направленія главныхъ осей и величины главныхъ моментовъ въ какой угодно точкѣ K.

Означимъ черезъ ξ_k, η_k, ζ_k координаты этой точки K относительно осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 и черезъ λ, μ, ν—косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями направленіями параллельныхъ между собою осей KU и CU, проведенныхъ черезъ точки K и C; квадратъ разстоянія Δ точки K отъ оси CU можно выразить такъ:

$$\Delta^2 = r_k^2 - r_k^2\cos^2(r_k, U) = \lambda^2(\eta^2_k + \zeta_k^2) + \mu^2(\zeta_k^2 + \xi_k^2) +$$
$$+ \nu^2(\xi_k^2 + \eta_k^2) - 2\mu\nu\eta_k\zeta_k - 2\nu\lambda\zeta_k\xi_k - 2\lambda\mu\xi_k\eta_k,$$

поэтому изъ равенства (672) и выраженія (670) получимъ слѣдующее выраженіе величины момента инерціи данной системы вокругъ оси KU:

$$(I_U)_k = A_k\lambda^2 + B_k\mu^2 + C_k\nu^2 - 2D_k\mu\nu - 2E_k\nu\lambda - 2F_k\lambda\mu, \;.\;.\; \mathbf{(673)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \mathfrak{A}_c + M(\eta_k^2 + \zeta_k^2), \\ B_k &= \mathfrak{B}_c + M(\zeta_k^2 + \xi_k^2), \\ C_k &= \mathfrak{C}_c + M(\xi_k^2 + \eta_k^2), \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; \mathbf{(674)} \qquad \left.\begin{aligned} D_k &= M\eta_k\zeta_k, \\ E_k &= M\zeta_k\xi_k, \\ F_k &= M\xi_k\eta_k. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; \mathbf{(675)}$$

Направленія главныхъ осей инерціи той же системы въ точкѣ K суть направленія главныхъ осей эллипсоида инерціи:

$$1 = \frac{1}{\text{м}.\partial^4}(A_kx^2 + B_ky^2 + C_kz^2 - 2D_kyz - 2E_kzx - 2F_kxy), \;.\; \mathbf{(676)}$$

гдѣ x, y, z суть координаты относительно осей KX, KY, KZ, проведенныхъ черезъ точку K параллельно осямъ $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0.

Примѣнимъ къ эллипсоиду (676) извѣстный въ аналитической геометріи способъ опредѣленія направленій главныхъ осей поверхности втораго порядка.

Пусть λ_x, λ_y, λ_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ одною изъ такихъ осей съ осями CX, CY, CZ; эти косинусы опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} A_k\lambda_x - F_k\lambda_y - E_k\lambda_z &= I\lambda_x \\ B_k\lambda_y - D_k\lambda_z - F_k\lambda_x &= I\lambda_y \\ C_k\lambda_z - E_k\lambda_x - D_k\lambda_y &= I\lambda_z \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (677)$$

гдѣ I есть одинъ изъ трехъ корней уравненія третьей степени:

$$\begin{vmatrix} (A_k-I), & -F_k, & -E_k \\ -F_k, & (B_k-I), & -D_k \\ -E_k, & -D_k, & (C_k-I) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (678)$$

Помноживъ равенства (677): первое на λ_x, второе — на λ_y, третье на λ_z, и затѣмъ сложивъ эти равенства, мы увидимъ, что I означаетъ величину момента инерціи системы вокругъ искомой главной оси инерціи, слѣдовательно, три корня уравненія (678) суть моменты инерціи $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$ вокругъ главныхъ осей разсматриваемаго эллипсоида.

Пусть $\mathfrak{A}_k$ есть моментъ инерціи вокругъ той главной оси $K\Xi$, косинусы угловъ которой съ осями KX, KY, KZ, суть λ_x, λ_y, λ_z; двѣ другія главныя оси означимъ черезъ $K\Upsilon$, $K\mathrm{Z}$, косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями съ осями KX, KY, KZ — черезъ μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z; пусть $\mathfrak{B}_k$ есть моментъ инерціи вокругъ оси $K\Upsilon$, $\mathfrak{C}_k$ — вокругъ оси $K\mathrm{Z}$.

Если въ уравненія (677) подставить $\mathfrak{A}_k$ вмѣсто I, то они послужатъ для опредѣленія величинъ λ_x, λ_y, λ_z; если же замѣнить I черезъ $\mathfrak{B}_k$, то тѣ же самыя уравненія дадутъ, не λ_x, λ_y, λ_z, а косинусы μ_x, μ_y, μ_z; точно также эти уравненія послужатъ для опредѣленія косинусовъ ν_x, ν_y, ν_z, если I будетъ замѣнено величиною $\mathfrak{C}_k$.

Если точка K лежитъ на которой-либо изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то главныя оси инерціи $K\Xi$, $K\Upsilon$, $K\mathrm{Z}$ параллельны главнымъ центральнымъ осямъ; напримѣръ, если K находится на оси $C\Xi_0$, то η_k и ζ_k равны нулю, а слѣдовательно и D_k, E_k, F_k; такъ что выраженіе (673) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$(I_U)_k = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + (\mathfrak{B}_c + M\xi_k^2)\mu^2 + (\mathfrak{C}_c + M\xi_k^2)\nu^2 \quad \ldots \quad (679)$$

Можно составить себѣ общее представленіе о направленіяхъ главныхъ осей инерціи во всѣхъ точкахъ пространства; для этого надо подвергнуть уравненія (677) слѣдующему разсмотрѣнію.

VIII-107

Подставивъ въ нихъ $\mathfrak{A}_k$ вмѣсто I и выраженія (674), (675) вмѣсто A_k, B_k,....F_k, представимъ ихъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\lambda_x = \frac{\xi_k}{(\alpha+q_1)} h; \quad \lambda_y = \frac{\eta_k}{(\beta+q_1)} h; \quad \lambda_z = \frac{\zeta_k}{(\gamma+q_1)} h, \; . \; . \quad \textbf{(680)}$$

гдѣ:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}_c}{M}, \; \beta = \frac{\mathfrak{B}_c}{M}, \; \gamma = \frac{\mathfrak{C}_c}{M},$$

$$h = \lambda_x \xi_k + \lambda_y \eta_k + \lambda_z \zeta_k, \quad q_1 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M} \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(861)}$$

Если исключить λ_x, λ_y, λ_z изъ этихъ уравненій (680), то получимъ результатъ:

$$\frac{\xi_k^2}{\alpha+q_1} + \frac{\eta_k^2}{\beta+q_1} + \frac{\zeta_k^2}{\gamma+q_1} - 1 = 0,$$

выражающій, что точка K находится на поверхности втораго порядка:

$$\frac{\xi^2}{\alpha+q_1} + \frac{\eta^2}{\beta+q_1} + \frac{\zeta^2}{\gamma+q_1} = 1, \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(682, 1)}$$

имѣющей центромъ точку C и главными осями—оси $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0.

Изъ равенствъ (680) и равенства $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$ окажется, что

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_k^2}{(\alpha+q_1)^2} + \frac{\eta_k^2}{(\beta+q_1)^2} + \frac{\zeta_k^2}{(\gamma+q_1)^2}}};$$

а потому вторыя части равенствъ (680) суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 нормалью къ поверхности (682, 1), возстановленною изъ точки K; слѣдовательно, главная ось $K\Xi$ совпадаетъ съ этою нормалью.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что черезъ точку K проходятъ еще двѣ поверхности:

$$\frac{\xi^2}{\alpha+q_2} + \frac{\eta^2}{\beta+q_2} + \frac{\zeta^2}{\gamma+q_2} = 1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(682, 2)}$$

$$\frac{\xi^2}{\alpha+q_3} + \frac{\eta^2}{\beta+q_3} + \frac{\zeta^2}{\gamma+q_3} = 1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(682, 3)}$$

гдѣ:

$$q_2 = r_{2k} - \frac{\mathfrak{B}_k}{M}, \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(683)}, \qquad q_3 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{C}_k}{M}; \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(684)}$$

по нормали къ поверхности (682, 2) направлена главная ось $K\Upsilon$, а по нормали къ поверхности (682, 3) — главная ось KZ.

VIII — 107

Положимъ, что главные моменты инерціи $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$ въ точкѣ K не равны другъ другу и что $\mathfrak{A}_k < \mathfrak{B}_k < \mathfrak{C}_k$; въ такомъ случаѣ изъ выраженій (681) (683) (684) слѣдуетъ: $q_1 > q_2 > q_3$. Если принять во вниманіе, что $\mathfrak{A}_k$ есть наименьшій изъ моментовъ инерціи системы вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку K, то легко показать, что поверхность (682, 1) есть эллипсоидъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы $(\alpha + q_1)$, $(\beta + q_1)$, $(\gamma + q_1)$ могутъ быть представлены (при помощи формулъ (674)) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \xi_k^2, \quad \frac{B_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \eta_k^2, \quad \frac{C_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \zeta_k^2,$$

а отсюда ясно, что всѣ онѣ положительныя.

Другія двѣ поверхности (682, 2) (682, 3) суть гиперболоиды, одинъ однополый, другой о двухъ полахъ. Чтобы показать это, замѣтимъ, что q_1, q_2, q_3 суть корни уравненія третьей степени:

$$(\alpha + q)(\beta + q)(\gamma + q) - \xi_k^2(\beta + q)(\gamma + q) - \eta_k^2(\gamma + q)(\alpha + q) -$$
$$- \zeta_k^2(\alpha + q)(\beta + q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(685)}$$

первая часть котораго

при $q = +\infty$ обращается въ $+\infty$

» $q = -\alpha$ » » $-\xi_k^2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)$,

» $q = -\beta$ » » $+\eta_k^2(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)$,

» $q = -\gamma$ » » $-\zeta_k^2(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$;

отсюда видно, что если $\alpha < \beta < \gamma$, то одинъ изъ трехъ корней этого уравненія заключается между $+\infty$ и $-\alpha$, другой между $-\alpha$ и $-\beta$, третій между $-\beta$ и $-\gamma$; первый корень есть q_1, потому что, какъ мы уже доказали, $(\alpha + q_1)$ болѣе нуля, слѣдующій корень есть q_2, а меньшій есть q_3.

Такъ какъ:

$$+\infty > q_1 > -\alpha > q_2 > -\beta > q_3 > -\gamma,$$

то:

$$\gamma + q_3 > 0, \ \beta + q_3 < 0, \ \alpha + q_3 < 0,$$

$$\gamma + q_2 > 0, \ \beta + q_2 > 0, \ \alpha + q_2 < 0,$$

слѣдовательно, поверхность (682, 3) есть двухполый гиперболоидъ, дѣйствительная ось котораго совпадаетъ съ осью CZ_0, а поверхность (682, 2) есть однополый гиперболоидъ, непересѣкающая ось котораго совпадаетъ съ осью $C\Xi_0$.

Изъ всего сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что черезъ каждую точку пространства можно провести три взаимно-ортогональныя поверхности втораго порядка: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ о двухъ полахъ; центры этихъ трехъ поверхностей находятся въ C и главныя оси ихъ совпадаютъ съ главными центральными осями инерціи; нормали, возстановленныя къ этимъ тремъ поверхностямъ изъ точки ихъ пересѣченія, суть направленія главныхъ осей инерціи въ этой точкѣ.

Всѣ эллипсоиды, всѣ гиперболоиды однополые и о двухъ полахъ суть три системы взаимно-ортогональныхъ поверхностей; совокупность всѣхъ этихъ поверхностей образуютъ такъ-называемую *систему эллиптическихъ координатъ*.

§ 108. Эллиптическія координаты.

Координатныя поверхности этой системы координатъ суть:

1) Эллипсоиды, выражаемые уравненіями (682, 1), гдѣ q_1 можетъ имѣть всякія значенія отъ $+\infty$ до $(-\alpha)$; эллипсоидъ $q_1=\infty$ имѣетъ безконечно большія полуоси; эллипсоидъ $q_1=-\alpha$ вплотную облегаетъ эллиптическую пластинку, находящуюся внутри контура:

$$\xi=0,\ \frac{\eta^2}{\beta-\alpha}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\alpha}=1,\ \ldots\ldots \quad (686)$$

такъ какъ полуось $\sqrt{\alpha+q_1}$ этого эллипсоида равна нулю.

2) Однополые гиперболоиды, выражаемые уравненіями (682, 2), гдѣ q_2 можетъ имѣть всякія значенія отъ $(-\alpha)$ до $(-\beta)$; непересѣкающія или мнимыя полуоси ихъ направлены по оси Ξ_0, дѣйствительныя полуоси, направленныя по оси Υ_0, не болѣе $\sqrt{\beta-\alpha}$, а дѣйствительныя полуоси, направленныя по оси Z_0, не болѣе $\sqrt{\gamma-\alpha}$ и не менѣе $\sqrt{\gamma-\beta}$; предѣльными поверхностями этой системы гиперболоидовъ служатъ тѣ поверхности, которыя имѣютъ параметры $q_2=-\alpha$, $q_2=-\beta$; поверхность $q_2=-\alpha$ должно разсматривать какъ гиперболоидъ, облегающій вплотную обѣ стороны той части плоскости $\Upsilon_0 Z_0$, которая остается за выдѣленіемъ эллиптической пластинки, упомянутой выше; другую предѣльную поверхность: $q_2=-\beta$ должно разсматривать какъ гиперболоидъ, облегающій

VIII-108.

вплотную обѣ стороны той части плоскости $Z_0\Xi_0$, которая ограничена гиперболою:

$$\eta = 0,\ \frac{\zeta^2}{\gamma-\beta} - \frac{\xi^2}{\beta-\alpha} = 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (687)$$

и заключаетъ въ себѣ ось Ξ_0.

3) Гиперболоиды о двухъ полахъ, выражаемые уравненіями (682, 3); гдѣ q_3 можетъ имѣть всякія значенія отъ $q_3 = -\beta$ до $q_3 = -\gamma$; дѣйствительныя полуоси этихъ геперболоидовъ направлены по оси Z_0 и имѣютъ величины не бóльшія $\sqrt{\gamma-\beta}$; предѣльная поверхность $q_3 = -\beta$ есть гиперболоидъ, вплотную облегающій тѣ двѣ части плоскости $\Xi_0 Z_0$, которыя ограничены гиперболою (687) и простираются въ безконечность; другая предѣльная поверхность: $q_3 = -\gamma$ есть вся плоскость $\Xi_0 \Upsilon_0$.

Черезъ каждую точку пространства проходятъ три координатныя поверхности: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ двуполый, которые въ этой точкѣ взаимно-ортогональны; координатные параметры q_1, q_2, q_3 этихъ поверхностей суть корни уравненія (685) и они называются эллиптическими координатами этой точки.

Рѣшивъ уравненія (682, 1), (682, 2), (682, 3) относительно ξ, η, ζ, получимъ слѣдующія выраженія прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ въ эллиптическихъ координатахъ:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{(\alpha+q_1)(\alpha+q_2)(\alpha+q_3)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}} \; *) . \ . \ . \ . \ (688,\ \mathrm{a})$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{(\beta+q_1)(\beta+q_2)(\beta+q_3)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}} \ . \ . \ . \ . \ . \ (688,\ \mathrm{b})$$

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{(\gamma+q_1)(\gamma+q_2)(\gamma+q_3)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}} \ . \ . \ . \ . \ . \ (688,\ \mathrm{c})$$

Эллиптическія координатныя поверхности называются софокусными, потому что кривыя втораго порядка, по которымъ эти поверхности пе-

---

*) Выводъ этихъ формулъ значительно облегчается помощію преорабзованій, подобныхъ слѣдующему:

ресѣкаются плоскостями $\Xi_0\Upsilon_0$, $\Upsilon_0 Z_0$, $Z_0\Xi_0$, имѣютъ общіе фокусы *).

§ 109. Квадратичные моменты: полярные и относительно плоскостей. Эллипсоиды: основной и гираціонный. Плечи инерціи.

Квадратичнымъ полярнымъ моментомъ системы точекъ вокругъ полюса K называется сумма:

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (689)$$

гдѣ r_i есть разстояніе матерьяльной точки m_i отъ точки K.

Сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ на квадраты ихъ разстояній отъ какой-либо плоскости, называется *квадратичнымъ моментомъ относительно этой плоскости*; такъ, квадратичный мо-

---

Означимъ: $\alpha + q_1$, $\alpha + q_2$, $\alpha + q_3$, $\beta + q_1$, $\beta + q_2, \ldots \gamma + q_3$, черезъ α_1, α_2, α_3, β_1, $\beta_2, \ldots \gamma_3$.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\beta_1}, & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\beta_2}, & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\beta_3}, & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\alpha_3} \end{vmatrix} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} D_1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{\beta_1}, & \frac{1}{\gamma_1} \\ 1, & \frac{1}{\beta_2}, & \frac{1}{\gamma_2} \\ 1, & \frac{1}{\beta_3}, & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix}.$$

*) Дальнѣйшія подробности относительно эллиптическихъ координатъ и софокусныхъ поверхностей можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

G. Salmon. A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions. 1874.

Hesse. Analytische Geometrie des Raumes.

Сомовъ. Раціональная механика.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik.

Будаевъ. Теоретическая механика. 1871.

ментъ относительно плоскости, проходящей черезъ точку K и перпендикулярной къ оси KU, выразится такъ:

$$(I_U')_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(r_i^2 - \rho_i^2) = H_k - (I_U)_k \; . \; . \; . \; . \; . \quad (690)$$

Квадратичные моменты относительно плоскостей координатъ YKZ, ZKX, XKY суть слѣдующія суммы:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2,\;\; B'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2,\;\; C'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i^2 . \; . \; . \quad (691)$$

Легко видѣть, что

$$A_k + B_k + C_k = 2(A'_k + B'_k + C'_k) = 2H_k . \; . \; . \quad (692)$$

$$2A'_k = B_k + C_k - A_k;\;\; 2B'_k = C_k + A_k - B_k\,; \; . \; . \quad (693)$$

$$2C' = A_k + B_k - C_k . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (693)$$

Изъ выраженій (690) и (665) слѣдуетъ:

$$(I'_U)_k = A'_k\lambda^2 + B'_k\mu^2 + C'_k\nu^2 + 2D_k\mu\nu + 2E_k\nu\lambda + 2F_k\lambda\mu \; . \; . \quad (694)$$

Если по направленію нормали къ каждой плоскости, проведенной черезъ точку K, отложить отъ этой точки длину, обратно-пропорціональную корню квадратному изъ квадратичнаго момента относительно этой плоскости, то концы этихъ длинъ образуютъ поверхность эллипсоида, называемаго *основнымъ эллипсоидомъ* *); уравненіе этого эллипсоида:

$$1 = A'_k x^2 + B'_k y^2 + C'_k z^2 + 2D_k yz + 2E_k zx + 2F_k xy \; . \; . \quad (695)$$

Главныя оси этого эллипсоида, конечно, совпадаютъ съ главными осями инерціи.

Квадратичный моментъ относительно всякой плоскости, непроходящей черезъ центръ инерціи, равенъ квадратичному моменту относительно

---

*) W. Thomson называетъ этотъ эллипсоидъ такъ: ellipsoid of construction, см. его статью: On the principal axes of a solid body; Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. I. 1846.

VIII - 109.

параллельной плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между плоскостями; напримѣръ:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i + x_c)^2 = A'_c + 2x_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i + Mx_c^2,$$

$$A'_k = A'_c + Mx_c^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (696)$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадратичный полярный моментъ вокругъ полюса K равенъ квадратичному полярному моменту вокругъ центра инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между полюсами; такъ что, если r_k есть разстояніе точки K отъ полюса, то:

$$H_k = H_c + Mr_k^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (697)$$

Квадратичный моментъ относительно главной плоскости YKZ точки K (эта плоскость есть касательная плоскость къ эллипсоиду (682, 1) въ точкѣ K) равенъ:

$$\mathfrak{A}'_k = H_k - \mathfrak{A}_k = H_c + M\left(r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M}\right) = H_c + Mq_1;$$

такъ что:

$$q_1 = \frac{\mathfrak{A}'_k - H_c}{M}, \quad q_2 = \frac{\mathfrak{B}'_k - H_c}{M}, \quad q_3 = \frac{\mathfrak{C}'_k - H_c}{M},$$

слѣдовательно, квадратичные моменты относительно всѣхъ касательныхъ плоскостей одной и той же координатной поверхности эллиптическихъ координатъ имѣютъ одну и ту же величину, равную:

$$\frac{\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c + \mathfrak{C}_c}{2} + Mq, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (698)$$

гдѣ $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$ суть главные центральные моменты инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, а q — координатный эллиптическій параметръ координатной поверхности.

Кромѣ вышеупомянутаго эллипсоида, мы дадимъ здѣсь понятіе еще объ одномъ эллипсоидѣ, выражаемомъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}_k} + \frac{\eta^2}{\mathfrak{B}_k} + \frac{\zeta^2}{\mathfrak{C}_k} = \frac{1}{M}; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (699)$$

этотъ эллипсоидъ, называемый *гирацiоннымъ эллипсоидомъ* *) для точки K, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что если мы проведемъ какую-либо касательную къ нему плоскость, то квадратъ разстоянiя этой плоскости отъ точки K, будучи помноженъ на массу системы, дастъ произведенiе, равное моменту инерцiи системы вокругъ оси, проходящей черезъ точку K и перпендикулярной къ этой касательной плоскости; предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ.

Если раздѣлить моментъ инерцiи данной системы матерьяльныхъ точекъ вокругъ какой либо оси на массу системы, и затѣмъ изъ частнаго извлечь квадрадный корень, то получится нѣкоторая длина, называемая *плечомъ инерцiи данной* системы вокругъ этой оси.

§ 110. Примѣры вычисленiя моментовъ инерцiи нѣкоторыхъ тѣлъ.

При опредѣленiи направленiй главныхъ осей инерцiи весьма полезно имѣть въ виду слѣдующiя замѣчанiя.

1) Если система точекъ или сплошное тѣло имѣетъ полную симметрiю относительно нѣкоторой плоскости, такъ что кратчайшiя разстоянiя между взаимно-симметричными элементами перпендикулярны къ этой плоскости и дѣлятся ею пополамъ, то для каждой изъ точекъ этой плоскости двѣ главныя оси инерцiи заключаются въ самой плоскости, а третья перпендикулярна къ ней. Въ самомъ дѣлѣ, если принять эту плоскость за плоскость XY, то D_k и E_k будутъ равны нулю, потому что каждому элементу dm, имѣющему какiя либо координаты x, y, z, соотвѣтствуетъ симметрично расположенный элементъ, имѣющiй ту же самую массу dm и координаты x, y, $(-z)$; поэтому всѣ элементы суммъ:

$$D_k = \sum myz,\ \ E_k = \sum mzx$$

или интеграловъ:

$$D_k = \int\int\int yzdm,\ \ E_k = \int\int\int zxdm$$

попарно сокращаются, а слѣдовательно, уравненiе эллипсоида инерцiи будетъ:

$$\partial^4 . м = A_k x^2 - 2F_k xy + B_k y^2 + C_k z^2.$$

---

*) Ellipsoid of gyration.

Ш-110.

2) Если однородное сплошное тѣло имѣетъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи (которыя проходятъ черезъ центръ инерціи), то пересѣченія этихъ осей суть главныя центральныя оси инерціи тѣла.

3) Если всѣ точки системы находятся въ одной плоскости или сплошное тѣло имѣетъ видъ безконечно-тонкой плоской пластинки, то для всякой точки этой плоскости или пластинки одна изъ главныхъ осей инерціи перпендикулярна къ плоскости. Если эту плоскость принять за плоскость XY, то для всѣхъ точекъ системы или элементовъ пластинки координата $z=0$, а потому:

$$A_k=B'_k=\sum my^2,\ B_k=A'_k=\sum mx^2,\ \ldots\ldots \quad (700)$$

$$\mathfrak{C}_k\,{}^{*)}=\sum m(x^2+y^2)=A'_k+B'_k,\ \ldots\ldots \quad (701)$$

$$D_k=0,\ E_k=0,\ F_k=\sum mxy.$$

4) Если система матерьяльныхъ точекъ имѣетъ ось симметріи или сплошное однородное тѣло есть тѣло вращенія, то во всякой точкѣ оси симметріи эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія.

Обращаемся къ примѣрамъ. Прежде всего приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе всего вычислять слѣдующія величины по слѣдующимъ формуламъ:

$$\mathfrak{A}'_c=\sigma\int\int\int\xi^2 d\xi d\eta d\zeta=2\sigma\int_0^{\xi_1}\xi^2 Q_\xi d\xi,\ \ldots \quad (702,\ 1)$$

$$\mathfrak{B}'_c=\sigma\int\int\int\eta^2 d\xi d\eta d\zeta=2\sigma\int_0^{\eta_1}\eta^2 Q_\eta d\eta,\ \ldots \quad (702,\ 2)$$

---

*) $H_k=\mathfrak{C}_k$.

$$\mathfrak{C}'_c = \sigma \int\int\int \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int\limits_0^{\zeta_1} \zeta^2 Q_\zeta d\zeta, \quad \ldots \quad (702, 3)$$

гдѣ Q_ξ есть величина площади сѣченія тѣла координатною плоскостью ξ, а ξ_1 предѣльная координата тѣла по оси Ξ_0; Q_η, Q_ζ, η_1, ζ_1 имѣютъ соотвѣтственныя значенія по отношенію къ координатамъ η и ζ.

Примѣръ 86-й. Вычислить главные центральные моменты инерціи однороднаго эллипсоида:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ: $\xi_1 = a$, $\eta_1 = b$, $\zeta_1 = c$.

$$Q_\xi = \pi bc\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right), \quad Q_\eta = \pi ca\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right), \quad Q_\zeta = \pi ab\left(1 - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

$$\mathfrak{A}'_c = M\frac{a^2}{5}, \quad \mathfrak{B}'_c = M\frac{b^2}{5}, \quad \mathfrak{C}'_c = M\frac{c^2}{5} \quad \ldots \quad (703)$$

Поэтому:

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad \mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \quad \mathfrak{C}_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \quad . \quad (704)$$

Если $a > b > c$, то $\mathfrak{A}_c < \mathfrak{B}_c < \mathfrak{C}_c$, т. е., вокругъ наибольшей полуоси моментъ инерціи наименьшій и вокругъ наименьшей полуоси — наибольшій; поэтому наибольшая главная полуось центральнаго эллипсоида инерціи направлена по оси Ξ_0, средняя — по оси Υ_0, меньшая — по оси Z_0.

Если данный эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, то таковъ же и центральный эллипсоидъ инерціи; притомъ *удлиненный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *удлиненный* центральный эллипсоидъ инерціи и, обратно, *планетарный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *планетарный* же эллипсоидъ инерціи. Если $a = b$, то:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \quad \mathfrak{C}_c = \frac{2}{5} Ma^2; \quad \ldots \quad (705)$$

VIII - 110

моменты инерціи вокругъ всѣхъ экваторіальныхъ центральныхъ осей равны между собою и равны $\mathfrak{A}_c$.

Центральный моментъ инерціи сплошнаго однороднаго шара вокругъ какой либо центральной оси равенъ $\frac{2}{5}MR^2$, гдѣ R есть радіусъ шара.

Примѣръ 87-й. Главные центральные моменты инерціи однороднаго прямоугольнаго параллелопипеда, длины сторонъ котораго: $2a$, $2b$, $2c$.

Здѣсь:

$$\xi_1=a,\ \eta_1=b,\ \zeta_1=c,\ Q_\xi=4bc,\ Q_\eta=4ca,\ Q_\zeta=4ab,$$

$$\mathfrak{A}_c=\frac{M}{3}(b^2+c^2),\ \mathfrak{B}_c=\frac{M}{3}(c^2+a^2),\ \mathfrak{C}_c=\frac{M}{3}(a^2+b^2)\ ;\ .\ \textbf{(706)}$$

(главныя центральныя оси инерціи перпендикулярны къ гранямъ параллелопипеда).

Кубъ имѣетъ центральнымъ эллипсоидомъ шаръ; моментъ инерціи вокругъ всякой центральной оси равенъ $\frac{2}{3}Ma^2$, гдѣ $2a$ — сторона куба.

Примѣръ 88-й. Главные центральные моменты инерціи прямаго однороднаго эллиптическаго цилиндра (высота $2h$, полуоси основанія b и c).

$$\mathfrak{A}_c=\frac{M}{4}(b^2+c^2),\ \mathfrak{B}_c=M\left(\frac{h^2}{3}+\frac{c^2}{4}\right),\ \mathfrak{C}_c=M\left(\frac{h^2}{3}+\frac{b^2}{4}\right).\ \textbf{(707)}$$

Далѣе, приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ однородныхъ тѣлъ вращенія.

Для вычисленія моментъ инерціи такого тѣла вокругъ оси вращенія CZ_0, выразимъ элементы объема въ круговыхъ цилиндрическихъ координатахъ и произведемъ интегрированіе по θ въ предѣлахъ отъ нуля до 2π; получимъ:

$$\mathfrak{C}_c=2\pi\sigma\int\int\rho^3 d\rho d\zeta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \textbf{(708)}$$

vm - 110.

Вслѣдствіе симметріи тѣла вокругъ оси вращенія, нижеслѣдующія величины равны между собою и потому равны половинѣ $\mathfrak{C}_c$.

$$\mathfrak{A}'_c = \mathfrak{B}'_c = \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (709)$$

наконецъ моментъ инерціи тѣла вокругъ всякой центральной экваторьяльной оси равенъ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \sigma\int \zeta^2 Q_\zeta d\zeta + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \quad \ldots\ldots \quad (710)$$

Примѣръ 89-й. Главные центральные моменты инерціи цилиндрической круговой трубки; длина трубки $2h$, радіусъ внутренней поверхности R, толщина стѣнки k.

Въ выраженіи (708) надо интегрировать по ρ въ предѣлахъ отъ R до $(R+k)$ и по ζ въ предѣлахъ отъ $(-h)$ до $(+h)$.

$$\mathfrak{C}_c = \frac{M}{2}(2R^2+2Rk+k^2); \quad \mathfrak{A}_c=\mathfrak{B}_c=M\frac{h^2}{3}+\frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \quad \ldots \quad (711)$$

Примѣръ 90. Главные центральные моменты инерціи кольца съ круговымъ меридіональнымъ сѣченіемъ; радіусъ сѣченія кольца $= r$, разстояніе центра сѣченія до оси вращенія $= R$.

$$\mathfrak{C}_c = M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right); \quad \mathfrak{A}_c=\mathfrak{B}_c=\frac{M}{4}r^2+\frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \quad \ldots \quad (712)$$

Главные центральные моменты инерціи однородныхъ площадей (поверхностная плотность $\varkappa$).

Примѣръ 91-й. Площадь эллипса:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

$$\mathfrak{A}_c = 4\varkappa\int_0^b a\eta^2\sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}\,d\eta = \pi ab\varkappa\frac{b^2}{4} = M\frac{b^2}{4}$$

$$\mathfrak{B}_c = M\frac{a^2}{4}; \quad \mathfrak{C}_c = M\frac{a^2+b^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (713)$$

Примѣръ 92-й. Площадь прямоугольника; длины сторонъ: $2a$ и $2b$.

$$\mathfrak{A}_c = M\frac{b^2}{3}, \quad \mathfrak{B}_c = M\frac{a^2}{3}, \quad \mathfrak{C}_c = M\frac{a^2+b^2}{3} \quad \ldots \quad (714)$$

Примѣръ 93-й. Моментъ инерціи площади треугольника $A_1A_2A_3$ вокругъ одной изъ его сторонъ: A_1A_2.

Сначала возьмемъ треугольникъ прямоугольный и опредѣлимъ его моментъ инерціи вокругъ одного изъ катетовъ. Примемъ A_1A_2 (чертежъ 60) за ось $X^{\text{овъ}}$, а ось $Y^{\text{овъ}}$ проведемъ черезъ точку A_1; означимъ координаты вершины A_3 черезъ x_3 и y_3 ($A_1A_2 = x_3$, $A_2A_3 = y_3$); кромѣ того, означимъ черезъ (y) ординаты точекъ гипотенузы A_1A_3; очевидно:

$$\frac{(y)}{x} = \frac{y_3}{x_3}.$$

Искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$\varkappa\int_0^{x_3}\int_0^{(y)} y^2 dxdy = \frac{\varkappa}{3}\int_0^{x_3}(y)^3 dx = \frac{\varkappa}{3}\frac{y_3^3}{x_3^3}\frac{x_3^4}{4} = M\frac{y_3^2}{6},$$

гдѣ $M = \varkappa\frac{x_3y_3}{2}$ есть масса треугольника.

Теперь возьмемъ треугольникъ косоугольный (черт. 61 и 62); его площадь и моментъ инерціи равняется суммѣ (черт. 61) или разности (черт. 62) площадей и моментовъ инерціи прямоугольныхъ треугольниковъ A_1DA_3 и A_2DA_3, такъ что искомый моментъ инерціи равенъ:

$$M'\frac{y^2}{6} \pm M''\frac{y^2}{6} = M\frac{y^2}{6}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (715)$$

гдѣ:

$$M' = \varkappa\frac{x_3y_3}{2}, \quad M'' = \varkappa\frac{(a_3-x_3)y_3}{2} \text{ или } \varkappa\frac{(x_3-a_3)y_3}{2},$$

$$a_3 = A_1A_2, \quad M = \varkappa\frac{a_3y_3}{2} = M' \pm M''.$$

Примѣръ 94-й. Моментъ инерціи площади однороднаго треугольника вокругъ какой-либо оси, проведенной черезъ вершину треугольника и лежащей въ его плоскости.

Примемъ вершину A_1 за начало координатъ и данную ось за ось $X^{\text{овъ}}$; продолжимъ сторону A_3A_2 (черт. 63) до пересѣченія ея K съ осью $X^{\text{овъ}}$.

Очевидно, что моментъ инерціи треугольника $A_1A_3A_2$ вокругъ оси A_1X равенъ разности моментовъ инерціи треугольниковъ A_1A_3K и

A_1A_2K, а выраженія этихъ моментовъ инерціи извѣстны изъ предыдущаго примѣра; такъ что:

$$I_x = \frac{\varkappa}{12} l y_3^3 - \frac{\varkappa}{12} l y_2^3 = \frac{\varkappa}{12} l(y_3 - y_2)(y_3^2 + y_3 y_2 + y_2^2),$$

гдѣ l есть длина A_1K; но такъ какъ площадь даннаго треугольника выражается половиною произведенія $l(y_3 - y_2)$, то искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$I_x = \frac{M}{6}(y_3^2 + y_3 y_2 + y_2^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (716)$$

Это выраженіе можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$I_x = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{2}\right)^2\right],$$

а это выражаетъ, что моментъ инерціи даннаго треугольника равняется моменту инерціи системы, состоящей изъ трехъ матерьяльныхъ точекъ, массы которыхъ равны $\frac{M}{3}$ и которыя помѣщены въ серединахъ сторонъ треугольника.

Центръ инерціи этихъ трехъ точекъ тоже совпадаетъ съ центромъ инерціи площади однороднаго треугольника *), поэтому моментъ инерціи даннаго треугольника вокругъ какой бы то ни было оси, имѣющей какое бы то ни было направленіе и проходящей черезъ какую бы то ни было точку, равняется моменту инерціи трехъ вышеупомянутыхъ матерьяльныхъ точекъ.

Примѣръ 95-й. Квадратичный полярный моментъ площади треугольника вокругъ вершины.

Изъ формулъ (692) слѣдуетъ, что искомый квадратичный моментъ равенъ суммѣ моментовъ инерціи I_x и I_y площади треугольника вокругъ взаимно-перпендикулярныхъ осей A_1X и A_1Y (черт. 63); вмѣстѣ

---

*) Если x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 суть координаты вершинъ треугольника, то координаты центра инерціи его площади выражаются такъ:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}\frac{2}{3} + x_3\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \; y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

такъ же выражаются и координаты центра инерціи трехъ вышесказанныхъ точекъ.

VIII - 110.

съ тѣмъ онъ равенъ моменту инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ точку A_1 и перпендикулярной къ площади треугольника; такъ что:

$$\mathfrak{C} = H = \frac{M}{6}(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 + y_2y_3 + y_3^2) =$$

$$= \frac{M}{6}(a_3^2 + a_2a_3\cos\alpha_1 + a_2^2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (717)$$

гдѣ a_2 и a_3 суть длины сторонъ A_1A_2 и A_1A_3, а α_1 величина угла при вершинѣ A_1.

Примѣръ 96-й. Центральные моменты инерціи площадей однородныхъ правильныхъ многоугольниковъ (число сторонъ n, длина каждой стороны равна b).

Очевидно, что моменты инерціи такого многоугольника вокругъ центральныхъ осей, перпендикулярныхъ къ различнымъ сторонамъ многоугольника, равны между собою; слѣдовательно эллипсъ, образуемый пересѣченіемъ центральнаго эллипсоида съ плоскостью многоугольника, долженъ имѣть столько равныхъ между собою и ровноотстоящихъ другъ отъ друга радіусовъ векторовъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ, а для этого необходимо, чтобы эллипсъ былъ кругомъ. Изъ этого слѣдуетъ, что моменты инерціи правильнаго многоугольника вокругъ центральныхъ осей, лежащихъ въ плоскости многоугольника, равны между собою и равны половинѣ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра, или, что то же самое, половинѣ момента инерціи вокругъ центральной оси, перпендикулярной къ площади многоугольника.

Данный правильный многоугольникъ разобьемъ на треугольники, имѣющіе вершинами центръ многоугольника, а основаніями — стороны его; очевидно, что моментъ инерціи $\mathfrak{C}_c$ всего многоугольника равняется n разъ взятому моменту инерціи одного изъ этихъ треугольниковъ вокругъ оси $C\mathsf{Z}_0$, возстановленной изъ центра C перпендикуляно къ плоскости многоугольника; основываясь на формулѣ (717), найдемъ:

$$\mathfrak{C}_c = H_c = \frac{Mb^2}{n}\,\frac{\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}, \quad \ldots\ldots \quad (718)$$

или, означая радіусъ круга, описаннаго черезъ вершины многоугольника, буквою a:

$$\mathfrak{C}_c = H_c = \frac{Ma^2}{6}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right). \quad \ldots\ldots \quad (718)$$

Наконецъ, вычислимъ центральные моменты однородныхъ правильныхъ многогранниковъ.

Центральный эллипсоидъ такого многогранника есть шаръ, а потому моментъ инерціи такого тѣла вокругъ всякой центральной оси равенъ двумъ третямъ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра инерціи, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (692) при $A_c = B_c = C_c$.

Квадратичный полярный моментъ правильнаго многогранника, имѣющаго μ граней, въ μ разъ болѣе квадратичнаго полярнаго момента одной изъ тѣхъ правильныхъ пирамидъ, на которыя можетъ быть раздѣленъ объемъ многогранника; поэтому рѣшимъ сначала слѣдующую задачу:

Примѣръ 97-й. Вычислить квадратичный полярный моментъ данной правильной пирамиды вокругъ ея вершины; высота пирамиды $= h$, число сторонъ основанія $= n$ и радіусъ описаннаго круга $= a$.

Примемъ вершину пирамиды за начало координатъ, направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на основаніе, за ось $X^{овъ}$; разобъемъ пирамиду на безконечно-тонкія пластинки плоскостями, перпендикулярными къ оси $X^{овъ}$; каждая такая пластинка имѣетъ толщину dx.

По формулѣ (718) мы вычислимъ квадратичный полярный моментъ каждой такой пластинки вокругъ ея центра, а по формулѣ (697)—квадратичный полярный моментъ ея вокругъ вершины; для пластинки, отстоящей на разстояніи x отъ вершины, этотъ моментъ будетъ равенъ:

$$\sigma dx\,\frac{na^2}{2h^2}x^2\sin\frac{2\pi}{n}\left[x^2+\frac{a^2}{6h^2}x^2\left(2+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

интегрируя по x въ предѣлахъ отъ нуля до h, получимъ слѣдующее выраженіе квадратичнаго полярнаго момента правильной пирамиды вокругъ ея вершины:

$$\frac{3}{5}M\left(h^2+\frac{a^2}{6}\left(2+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right)\quad\ldots\ldots\quad(719)$$

Примѣръ 98-й. Центральные моменты инерціи правильныхъ многогранниковъ.

Центральный моментъ инерціи правильнаго многогранника съ μ гранями, каждая изъ которыхъ есть правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, равенъ:

$$\frac{2}{3}H_c=\frac{2M}{5}\left(R^2+\frac{a^2}{6}\left(2+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right),\quad\ldots\quad(720)$$

гдѣ R есть радіусъ сферы, вписанной въ многогранникъ, а длина a выражается слѣдующимъ образомъ въ R, n и μ:

$$a = R \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos\varphi = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \operatorname{cotg}\left(\frac{2\pi}{n\mu} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right) \; *_{*}).$$

По этой формулѣ получимъ слѣдующія величины центральныхъ моментовъ инерціи правильныхъ многогранниковъ:

Правильнаго тетраэдра: $\frac{6}{5} MR^2$, ($n = 3$, $\mu = 4$).

Куба: $\frac{2}{3} MR^2$, ($n = 4$, $\mu = 6$).

Октаэдра: $\frac{3}{5} MR^2$, ($n = 3$, $\mu = 8$).

Двѣнадцатигранника: $\frac{37\sqrt{5}-59}{30} MR^2$, ($n = 5$, $\mu = 12$).

Двадцатигранника: $\frac{3}{10}(5\sqrt{5}-9) MR^2$, ($n = 3$, $\mu = 20$).

§ 111. Законъ площадей для системы точекъ былъ открытъ почти одновременно Эйлеромъ *), Даніиломъ Бернулли **) и д'Арси ***).

---

*) Euler. Opuscula varii argumenti. Томъ I-й, 1746 года, статья: Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum.

**) Daniel Bernoulli. Nouveau problème de mécanique. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1745.

***) d'Arcy. Problème de dynamique 1747. Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris 1752.

$*_{*}$) a есть радіусъ круга, описаннаго черезъ всѣ вершины многоугольника, образующаго грань многогранника; φ — уголъ, подъ которымъ этотъ радіусъ виденъ изъ центра многогранника. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ вѣрности приведеннаго выраженія для $\cos\varphi$.

ГЛАВА IX.

Законъ живой силы.

§ 112. Составленіе дифференціальнаго уравненія.

Съ тремя дифференціальными уравненіями движенія (517) § 70 каждой изъ точекъ системы поступимъ такъ, какъ показано въ концѣ параграфа 21-го (стр. 86) относительно составленія дифференціальнаго уравненія (111); затѣмъ, всѣ полученныя такимъ образомъ равенства сложимъ, тогда будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_ix_i'+Y_iy_i'+Z_iz_i'\right)+\lambda(\vartheta_1)\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}-\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\right)+$$

$$+\lambda(\vartheta_2)\left(\frac{d\vartheta_2}{dt}-\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}\right)+\ldots\ldots+\lambda(\vartheta_p)\left(\frac{d\vartheta_p}{dt}-\frac{\partial\vartheta_p}{\partial t}\right),\ldots \quad (721)$$

прямые и кривые:

гдѣ

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[(x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2\right]\ldots \quad (535)$$

есть сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы и называется *живою силою системы* (какъ уже сказано на стр. 365-й) или *кинетическою энергіею ея*.

§ 113. Силы, имѣющія потенціалъ.

Обратимъ особенное вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ проэкціи на оси координатъ всѣхъ задаваемыхъ силъ суть функціи только координатъ точекъ и притомъ такія, что сумма:

$$X_1dx_1+Y_1dy_1+Z_1dz_1+X_2dx_2+Y_2dy_2+Z_2dz_2+\ldots\ldots+Z_ndz_n$$

или, что то же самое.

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_idx_i+Y_idy_i+Z_idz_i)$$

IX-113.

есть полный дифференціалъ отъ какой либо функціи:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n),$$

заключающей только координаты точекъ.

Для того, чтобы равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU \quad \ldots\ldots \quad (722)$$

имѣло мѣсто при всякихъ значеніяхъ координатъ и дифференціаловъ координатъ, необходимо, чтобы задаваемыя силы выражались слѣдующими частными производными:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots X_n = \frac{\partial U}{\partial x_n}, \\ Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1},\ Y_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \ldots Y_n = \frac{\partial U}{\partial y_n}, \\ Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1},\ Z_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \ldots Z_n = \frac{\partial U}{\partial z_n}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (723)$$

Примѣчаніе. Если задаваемыя силы выражаются частными производными (723) отъ функціи W, заключающей не только координаты точекъ системы, но еще и время, то вышесказанная сумма не будетъ равна полному дифференціалу отъ W и вмѣсто равенства (722) будемъ имѣть слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dW - \frac{\partial W}{\partial t}dt \quad \ldots \quad (724)$$

Функція U или W называется *потенціаломъ* или *силовою функціею* силъ F_1, $F_2, \ldots F_n$, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ m_1, $m_2, \ldots m_n$, а такая совокупность силъ называется *совокупностью силъ, имѣющихъ потенціалъ*.

Простѣйшимъ примѣромъ такой совокупности силъ могутъ служить силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками,

указанныя въ примѣрѣ 61-мъ (стр. 326); въ заданіи этого примѣра предполагается, что силы взаимнодѣйствія между точками m_1 и m_2 равны, прямопротивоположны и направлены по продолженіямъ кратчайшаго разстоянія между точками, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1, направлена по продолженію прямой, проведенной изъ m_2 черезъ m_1; величины силъ предполагаются равными $F(r_{12})$, гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками, а F— какая нибудь функція этого разстоянія:

$$r_{12} = +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{21}, проведеннымъ изъ точки m_2 черезъ точку m_1, выражаются такъ:

$$\cos(r_{21}, X) = \frac{x_1-x_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1},\quad \cos(r_{21}, Y) = \frac{y_1-y_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_1},$$

$$\cos(r_{21}, Z) = \frac{z_1-z_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1}$$

а косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{12}, проведеннымъ изъ точки m_1 черезъ точку m_2, выважаются такъ:

$$\cos(r_{12}, X) = \frac{x_2-x_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2},\quad \cos(r_{12}, Y) = \frac{y_2-y_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2},$$

$$\cos(r_{12}, Z) = \frac{z_2-z_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}.$$

Такъ какъ по направленію r_{21} дѣйствуетъ сила, приложенная къ точкѣ m_1, а по направленію r_{12} — сила, приложенная къ точкѣ m_2, то сумма, находящаяся въ первой части равенства (722), приметъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$F(r_{12})\left[\left(\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial r_{12}}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial r_{12}}{\partial z_1}dz_1\right)+\left(\frac{\partial r_{12}}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial r_{12}}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}dz_2\right)\right]=$$

$$=F(r_{12})dr_{12};$$

IX-113.

слѣдовательно, эти силы имѣютъ потенціалъ:

$$U=\int F(r_{12})dr_{12}\ \ldots\ldots\ldots\ (725)$$

Слѣдуетъ обратить вниминіе на знакъ силы $F(r_{12})$; если точки m_1 и m_2 взаимно отталкиваются, то подъ $F(r_{12})$ подразумѣвается положительно взятая величина силы, приложенной къ каждой точкѣ, если же точки взаимно-притягиваются, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1, направлена къ точкѣ m_2, то предыдущія выраженія примѣнятся и къ этимъ случаямъ при условіи, чтобы подъ $F(r_{12})$ подразумѣвалась отрицательно-взятая величина силы. Напримѣръ, если точки взаимно притягиваются силами равными $(\varepsilon m_1 m_2 : r^2_{12})$, то потенціалъ равенъ:

$$U=-\varepsilon m_1 m_2 \int \frac{dr_{12}}{r^2_{12}}=\varepsilon\frac{m_1 m_2}{r_{12}};$$

если точки взаимно-отталкиваются силами равными (εr^n_{12}), то потенціалъ будетъ:

$$U=\varepsilon\int r_{12}^n dr_{12}=\varepsilon\frac{r_{12}^{n+1}}{n+1}.$$

Положимъ, что имѣемъ систему матерьяльныхъ точекъ m_1, $m_2, \ldots m_n$, къ которымъ приложены слѣдующія силы:

a) Силы взаимнодѣйствія между точками системы, подобныя вышеупомянутымъ; то есть, на каждую точку m_i со стороны всякой другой точки m_j системы дѣйствуетъ сила $F_{ij}(r_{ij})$, направленная по продолженію линіи, проведенной изъ точки m_j черезъ m_i, а вмѣстѣ съ тѣмъ равная и прямопротивоположная сила приложена къ точкѣ m_j.

b) Силы притяженія или отталкиванія, дѣйствующія на точки системы со стороны какихъ либо *неподвижныхъ* центровъ O_1, $O_2, \ldots O_n$; пусть x_k, y_k, z_k суть координаты одного изъ этихъ центровъ, r_{ik}—разстояніе точки m_i отъ этого центра O_k; величина силы, дѣйствующей изъ каждаго центра на каждую изъ матерьяльныхъ

точекъ, предполагается функціею разстоянія между ними; пусть $\varphi_{ik}(r_{ik})$ есть функція, выражающая положительно взятую величину отталкивающей силы, дѣйствующей изъ центра O_k на точку m_i.

И такъ, къ каждой точкѣ системы приложены: силы, дѣйствующія со стороны прочихъ точекъ и силы, дѣйствующія со стороны неподвижныхъ точекъ; зная всѣ функціи $F_{12}, F_{13}, \ldots F_{23}, \ldots \varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots$ можемъ составить выраженія для $X_1, Y_1, Z_1, X_2, \ldots$; напримѣръ, X_i выразится слѣдующею суммою:

$$X_i = F_{1i}\frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + F_{2i}\frac{\partial r_{2i}}{\partial x_i} + \ldots + F_{ni}\frac{\partial r_{ni}}{\partial x_i} + \\ + \varphi_{1i}\frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + \ldots + \varphi_{pi}\frac{\partial r_{pi}}{\partial x_i};$$

поэтому сумма, заключающаяся въ первой части равенства (722), выразится такъ:

$$\sum_{i,j} F_{ij}(r_{ij})dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{i=1}^{i=n}\varphi_{ik}(r_{ik})dr_{ik};$$

первая изъ этихъ суммъ заключаетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$ членовъ, соотвѣтственно числу сочетаній, которыя можно сдѣлать изъ n точекъ по двѣ; i есть каждое изъ чиселъ: $1, 2, \ldots n$; j — тоже одно изъ этихъ чиселъ, но не равное i.

Потенціалъ всей совокупности силъ выразится слѣдующею суммою интеграловъ:

$$U = \sum_{i,j}\int F_{ij}(r_{ij})dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{i=1}^{i=n}\int \varphi_{ik}(r_{ik})dr_{ik} \quad \ldots \quad (726)$$

Если центры O_1. $O_2, \ldots O_p$ суть движущіяся точки, совершающія данныя движенія, то координаты ихъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_p$ будутъ данными функціями времени; въ этомъ случаѣ потенціалъ силъ также выразится формулою (726), но это уже будетъ функція не только отъ координатъ матерьяльныхъ точекъ, но и еще отъ времени, которое заключается въ выраженіяхъ координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_p$; сумма, заключающаяся въ первой части

равенства (722), выразится, не полнымъ дифференціаломъ потенціала, но разностью того же самаго вида, какой имѣетъ вторая часть равенства (724).

Силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками m_1 и m_2, указанныя въ заданіи примѣра 63-го (стр. 327), имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = \pm \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Вообще, если силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками имѣютъ потенціаломъ какую-либо функцію отъ разностей координатъ этихъ точекъ (т.-е., отъ $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$, $(z_1 - z_2)$), то эти взаимнодѣйствія равны и противоположны.

Если силы взаимнодѣйствія между каждыми двумя точками m_i и m_j системы $m_1, m_2, \ldots m_n$ имѣютъ потенціалъ U_{ij} и если сила, дѣйствующая изъ каждаго неподвижнаго центра O_k на каждую точку m_i системы тоже имѣетъ потенціалъ V_{ik}, то потенціалъ всей совокупности силъ выразится суммою всѣхъ частныхъ потенціаловъ, т.-е.:

$$U = \sum_{i,j} U_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} V_{ik} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (727)$$

§ 114. Законъ живой силы.

Заключающіеся въ дифференціальномъ уравненіи (721) члены:

$$\lambda(s_1) \frac{ds_1}{dt} + \lambda(s_2) \frac{ds_2}{dt} + \ldots + \lambda(s_p) \frac{ds_p}{dt}$$

равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, если связь s_k—удерживающая, то при всякихъ положеніяхъ системы точекъ скорости точекъ должны обращать полную производную $\frac{ds_k}{dt}$ въ нуль; если же эта связь неудерживающая, то при тѣхъ скоростяхъ, которыя дѣлаютъ полную производную $\frac{ds_k}{dt}$ большею нуля, множитель $\lambda(s_k)$ долженъ быть равенъ нулю, потому что при этихъ условіяхъ связь не оказываетъ реакціи (см. стр. 341); слѣдовательно, либо-тотъ, либо-другой изъ множителей произведенія $\lambda(s_k) \frac{ds_k}{dt}$ равенъ нулю; то же самое слѣдуетъ ска-

зать относительно подобныхъ произведеній, соотвѣтствующихъ всѣмъ прочимъ связямъ.

Поэтому дифференціальное уравненіе (721) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}(X_ix_i'+Y_iy_i'+Z_iz_i')-\lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{dt}-\ldots-\lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial t}. \quad (721,\mathrm{A})$$

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, а выраженія связей незаключаютъ явнымъ образомъ времени, то это дифференціальное уравненіе будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d(T-U)}{dt}=0,$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія будутъ имѣть слѣдующій интегралъ:

$$T-U=h, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (728)$$

гдѣ h есть постоянная произвольная.

И такъ, *если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, имѣютъ потенціалъ, а связи независятъ отъ времени, то движеніе системы подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою и потенціаломъ сохраняетъ постоянную величину.*

Этотъ законъ движенія извѣстенъ подъ именемъ *закона живой силы* для движенія системы точекъ.

§ 115. Работа задаваемыхъ силъ. Потенціальная энергія.

Дифференціальное уравненіе (721) можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}F_iv_i\cos(F_i,\,v_i)+\sum_{i=1}^{i=n}R_iv_i\cos(R_i,\,v_i)\,, \quad \ldots \quad (721,\mathrm{B})$$

гдѣ R_i означаетъ величину и направленіе равнодѣйствующей всѣхъ реакцій, приложенныхъ къ точкѣ m_i.

Помноживъ это уравненіе на dt и принявъ во вниманіе, что $v_1dt=ds_1$, $v_2dt=ds_2$, ... $v_ndt=ds_n$, гдѣ ds_1, ds_2, ... ds_n суть безконечно-малые элементы путей, пробѣгаемые матерьяльными точками m_1, m_2, ... m_n въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt, получимъ:

$$dT=\sum_{i=1}^{i=n}\Big(F_i\cos(F_i, v_i)+R_i\cos(R_i, v_i)\Big)ds_i, \dots \quad (721, C)$$

т.-е. *безконечно-малое приращеніе живой силы, получаемое системою въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени* dt, *равняется суммѣ элементарныхъ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей въ теченіи этого промежутка времени.*

Обратимъ вниманіе на какія-либо два положенія, занимаемыя системою во время движенія; вычислимъ работу всѣхъ силъ и реакцій на протяженіи путей, проходимыхъ точками системы при переходѣ ея изъ перваго положенія во второе и означимъ черезъ T_1 живую силу системы въ первомъ, а черезъ T_2 — во второмъ положеніи; изъ равенства (721, C) получимъ:

$$T_2-T_1=\sum_{i=1}^{i=n}\int_1^2(F_i\cos(F_i, v_i)+R_i\cos(R_i v_i))ds_i, . \quad (729)$$

т.-е., *приращеніе, получаемое живою силою при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, равняется суммѣ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей на протяженіи путей, пробѣгаемыхъ точками системы при этомъ переходѣ;* такое равенство имѣетъ мѣсто при всякихъ силахъ и связяхъ.

Если связи независятъ отъ времени, то сумма работъ реакцій свя-

зей будетъ нуль; дѣйствительно, сумма элементарныхъ работъ реакцій какой-либо связи $в_k$ выразится такъ:

$$\lambda(в_k)\sum_{i=1}^{i=n}(P_i в_k)\cos(P_i в_k,\ ds_i)ds_i\,;$$

но намъ извѣстно, что если связь есть удерживающая и независитъ отъ времени, то сумма, помноженная на $\lambda(в_k)$, равна нулю (стр. 402, формула (588, k)), если же связь неудерживающая, то либо эта сумма равна нулю, либо $\lambda(в_k)$ равно нулю.

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то сумма элементарныхъ работъ всѣхъ этихъ силъ равна дифференціалу потенціала, слѣдовательно, тогда:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\int_1^2 F_i\cos(F_i,\ v_i)ds_i = U_2 - U_1\,, \quad . \; . \; . \quad \textbf{(730)}$$

гдѣ U_1 и U_2 суть значенія потенціала въ первомъ и во второмъ положеніяхъ системы.

Отсюда слѣдуетъ, что если U есть однократная функція отъ координатъ точекъ системы (т.-е. такая, которая имѣетъ по одному, а не по нѣскольку значеній для каждаго положенія системы), то, при переходѣ системы изъ одного опредѣленнаго положенія въ другое, величина работы, совершаемой задаваемыми силами, независитъ отъ того, по какимъ путямъ движутся точки при этомъ переходѣ.

Если система, выйдя изъ какого либо положенія и совершивъ какое-либо движеніе, возвратится въ это же самое положеніе, то работа задаваемыхъ силъ на всемъ протяженіи этого перехода будетъ равна нулю, если эти силы имѣютъ потенціаломъ однократную функцію координатъ точекъ системы.

Если же U есть многократная функція, такъ что для каждаго положенія системы U имѣетъ нѣсколько значеній, то при переходѣ системы изъ перваго положенія во второе по различнымъ путямъ, функція U, исходя изъ одного и того же значенія U_1, можетъ достигнуть до раз-

личныхъ значеній, свойственныхъ ей во второмъ положеніи системы, смотря по тому, по какому пути совершается переходъ системы.

Напримѣръ, потенціальная функція задаваемыхъ силъ въ примѣрѣ 63 есть функція многократная; во всякомъ положеніи системы она имѣетъ безчисленное множество значеній, разнящихся на $\mu m_1 m_2 \pi$, взятое цѣлое число разъ, т.-е.:

$$U = \mu m_1 m_2 \left(\operatorname{arctg}\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \pm n\pi\right).$$

Положимъ, что координаты перваго положенія системы суть $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ и координаты втораго положенія: $x_1 = 0$, $y_1 = a$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; пусть $U_1 = 0$.

Если система переходитъ изъ перваго во второе положеніе, такимъ движеніемъ, при которомъ уголъ, составляемый линіею M_2M_1 (черт. 40), возрастетъ непрерывно отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$; если же переходъ совершается такимъ движеніемъ, при которомъ линія M_2M_1 повернется на уголъ $\frac{5\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $5\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$. При второмъ переходѣ задаваемыя силы совершатъ работу въ пять разъ большую, чѣмъ въ первомъ.

Къ неопредѣленному интегралу, выражающему потенціалъ задаваемыхъ силъ, можно присоединить произвольную постоянную и положить, что:

$$U = C + \int dU.$$

Постоянною C мы распорядимся такъ, чтобы U обращалось въ нуль, при нѣкоторомъ произвольно избранномъ положеніи системы; это положеніе будемъ называть нулевымъ.

Положимъ, что U есть функція однократная.

Въ большей части случаевъ нулевое положеніе избираютъ такимъ образомъ, чтобы въ немъ $(-U)$ имѣла наименьшее значеніе, а такъ какъ это значеніе полагается равнымъ нулю, то тогда во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ системы величина $(-U)$ будетъ имѣть знакъ положительный; означимъ $(-U)$ черезъ $Э$.

Каждому положенію системы свойственно нѣкоторое положительное значеніе , выражающее величину работы, которую совершатъ

задаваемыя силы при всякомъ переходѣ системы изъ разсматриваемаго положенія въ нулевое; эта величина $Э$ называется *потенціальною энергіею системы въ разсматриваемомъ положеніи;* въ нулевомъ положеніи потенціальная энергія системы равна нулю.

Сумма $(T+Э)$ кинетической энергіи и потенціальной энергіи системы называется полною энергіею системы.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ точекъ, имѣютъ потенціаломъ функцію однократную, независящую отъ времени и если связи между точками системы тоже независятъ явно отъ времени, то система точекъ называется *консервативною системою.*

Полная энергія движущейся консервативной системы сохраняетъ постоянную величину:

$$T+Э=h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (728, \text{bis})$$

Пусть T_1, T_2, $Э_1$, $Э_2$ суть величины кинетической и потенціальной энергіи въ двухъ положеніяхъ системы; изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ:

$$T_2-T_1=Э_1-Э_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (731)$$

т.-е., при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, она пріобрѣтаетъ столько же кинетической энергіи, сколько теряетъ потенціальной энергіи и обратно.

§ 116. Живая сила системы равна живой силѣ движенія центра инерціи, сложенной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Пользуясь обозначеніями, принятыми въ § 99-мъ предыдущей главы, можемъ преобразовать выраженіе T слѣдующимъ образомъ:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=i} m_i\left[(x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2\right]=\frac{1}{2}M\left((x_c')^2+(y_c')^2+(z_c')^2\right)+$$

$$+x_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i'+y_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i'+z_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i'+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(\xi_i')^2+(\eta_i')^2+(\zeta_i')^2\right];$$

такъ какъ начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы, то суммы, помноженныя на x_c', y_c', z_c', равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, взявъ производныя по времени отъ равенствъ (647) стр. 462, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i' = 0;$$

поэтому:

Теорема Кенига.

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2, \quad \ldots \ldots \quad (732)$$

здѣсь u_i означаетъ скорость относительнаго движенія точки m_i по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

§ 117. Живая сила движенія твердаго тѣла.

Если система точекъ неизмѣняемая и мы выразимъ скорости точекъ ея по формуламъ (143) кинематической части (стр. 125), то получимъ слѣдующее выраженіе живой силы движенія ея:

$$T = \frac{1}{2} M w_ю^2 + w_ю \Big(r \cos(w_ю, \Upsilon) - q \cos(w_ю, \mathrm{Z}) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i +$$

$$+ w_ю \Big(p \cos(w_ю, \mathrm{Z}) - r \cos(w_ю, \Xi) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i +$$

$$+ w_ю \Big(q \cos(w_ю, \Xi) - p \cos(w_ю, \Upsilon) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(A_ю p^2 + B_ю q^2 + C_ю r^2 - 2 D_ю q r - 2 E_ю r p - 2 F_ю p q \right). \quad . \quad (733)$$

Здѣсь ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки m_i относительно осей $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathrm{Z}$, неизмѣнно связанныхъ съ системою; величины $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ выражаются формулами (662) § 103 стр. 474.

Сумма членовъ, заключающихъ вторыя степени проэкцій угловой скорости, есть ни что иное, какъ:

$$\frac{1}{2}\,\Omega^2(I_\Omega)_ю\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad \textbf{(734)}$$

т.-е., половина квадрата угловой скорости, помноженнаго на моментъ инерціи неизмѣняемой системы вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ точку *Ю*.

Если точка *Ю* неподвижна, то живая сила (вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ этой неподвижной точки) выразится произведеніемъ (734).

Если за точку *Ю* взять центръ инерціи твердаго тѣла, то живая сила выразится такъ:

$$T = \frac{1}{2}\,Mv_c^2 + \frac{1}{2}\,\Omega^2(I_\Omega)_c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad \textbf{(735)}$$

Слѣдовательно, *если твердое тѣло движется поступательно, то живая сила его движенія измѣряется половиною произведенія массы тѣла на квадратъ скорости которой-либо точки его. Если тѣло вращается вокругъ неподвижной точки, то живая сила измѣряется половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси на квадратъ угловой скорости. Если твердое тѣло совершаетъ какое бы то ни было сложное движеніе, то живую силу можно разсматривать какъ сумму живой силы поступательнаго движенія, общаго съ движеніемъ центра инерціи, съ живою силою вращательнаго движенія вокругъ этого центра; послѣдняя выражается половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ центръ инерціи, на квадратъ угловой скорости.*

§ 118. Поводомъ къ открытію закона живой силы послужилъ вопросъ о качаніи физическаго маятника и объ опредѣленіи такъ-называемаго центра качанія. Занимаясь изслѣдованіемъ этого вопроса, Гюйгенсъ (1629—1695) *) нашелъ его рѣшеніе, основываясь на особомъ принципѣ,

*) Въ сочиненіи: Horologium oscillatorium 1673.

IX-117

который есть ни что иное, какъ законъ живой силы въ примѣненіи къ неизмѣняемой системѣ точекъ, имѣющей неподвижную ось и подверженной силѣ тяжести. Доказательство этого принципа и его обобщеніе принадлежатъ Ивану Бернулли (1667—1748) *) и Даніилу Бернулли (1700—1782), которые примѣнили законъ живой силы къ рѣшенію многихъ вопросовъ механики твердаго тѣла и гидромеханики.

Терминъ „живая сила" былъ введенъ Лейбницемъ (1646—1716), который называлъ этимъ именемъ *произведеніе изъ массы на квадратъ скорости*; онъ доказывалъ, что существующее со временъ Галилея и принятое Декартомъ (1596—1650) измѣреніе величины силы произведеніемъ изъ массы на ускореніе неправильно, когда оно примѣняется къ силамъ, приложеннымъ къ движущимся тѣламъ, и что истинною мѣрою такихъ силъ должно служить вышесказанное произведеніе **). Мнѣніе Лейбница пріобрѣло многихъ сторонниковъ; между ними и приверженцами прежняго воззрѣнія завязался споръ замѣчательный согласіемъ результатовъ, получаемыхъ геометрами противоположныхъ воззрѣній при рѣшеніи одинаковыхъ вопросовъ. Этотъ споръ былъ поконченъ д'Аламберомъ, который доказалъ спорящимъ, что они спорятъ только изъ за терминовъ, а что существеннаго различія между ихъ воззрѣніями нѣтъ.

Въ сочиненіяхъ Лагранжа, Пуассона, Якоби и у многихъ современныхъ авторовъ живою силою называются произведеніе изъ массы на квадратъ скорости, между тѣмъ какъ Коріолисъ, Гельмгольцъ ***), Кирхгофъ и большая часть физико-математиковъ называютъ живою силою *половину* произведенія изъ массы на квадратъ скорости; въ этой книгѣ мы поступили по примѣру послѣднихъ.

---

*) Mém. de l'Académie de Paris 1703 et 1704. Démonstration de principe de M. Hugens, touchant le centre de balancement et de l'indentité de ce centre avec celui de percussion.

**) Demonstratio erroris memorabilis cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum. Acta erudit. 1686. Mathematische Werke v. Leibniz, Ausgabe von Pertz und Gerhardt, Bd. VI, Halle, 1860.

***) Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. Abhandlungen. Bd. I, s. 18.

X.

ГЛАВА X.

Примѣры и задачи.

При помощи указанныхъ пріемовъ можно рѣшить многія задачи и вопросы о движеніи системъ матерьяльныхъ точекъ и тѣлъ. Прежде всего обратимся къ тѣмъ примѣрамъ, которые были приведены въ главѣ V-й и для которыхъ тамъ были составлены дифференціальныя уравненія движенія; нѣкоторые изъ этихъ примѣровъ могутъ быть рѣшены вполнѣ, въ другихъ же могутъ быть найдены только нѣкоторые интегралы, выражающіе законы сохраненія движенія центра инерціи, площадей и живой силы.

Примѣръ 61-й (стр. 326) въ которомъ положимъ:

$$F(r_{12}) = -\varepsilon\frac{m_1 m_2}{r^2_{12}}\,.$$

Эта задача можетъ быть рѣшена вполнѣ. Обѣ точки свободны, а потому полное рѣшеніе ея требуетъ опредѣленія двѣнадцати интеграловъ, съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ.

Десять интеграловъ суть:

Шесть интеграловъ, выражающихъ, что центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно (см. стр. 429):

$$\left.\begin{aligned} x_c' &= C_1,\ y_c' = C_2,\ z_c' = C_3, \\ x_c &= C_1 t + \Gamma_1,\ y_c = C_2 t + \Gamma_2,\ z_c = C_3 t + \Gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (736)$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},\ \ y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},\ \ z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Три интеграла, выражающіе законъ площадей въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; на стр. 467 въ § 100 было уже показано, что этимъ интеграламъ можно дать слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1(m_1 + m_2)(\eta_1\zeta'_1 - \zeta_1\eta'_1) &= m_2 C_4 \\ m_1(m_1 + m_2)(\zeta_1\xi'_1 - \xi_1\zeta'_1) &= m_2 C_5 \\ m_1(m_1 + m_2)(\xi_1\eta'_1 - \eta_1\xi'_1) &= m_2 C_6 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (737)$$

X.

Интегралъ, выражающій законъ живой силы

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varepsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = h.$$

На основаніи формулы (732) параграфа 116-го, равенствъ (654) и (655) параграфа 100-го и равенствъ:

$$\frac{r_{12}}{(m_1+m_2)} = \frac{\rho_1}{m_2} = \frac{\rho_2}{m_1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathbf{654\ bis})$$

получаемыхъ изъ равенствъ (654), можно послѣдній интегралъ представить такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{\varepsilon m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{h}{m_1+m_2} - \frac{v_C^2}{2}\right) \frac{m_2}{m_1} \quad . \; . \; . \; . \quad (\mathbf{738})$$

Изъ интеграловъ (737) слѣдуетъ, что относительное движеніе точки m_1 совершается въ плоскости:

$$C_4 \xi_1 + C_5 \eta_1 + C_6 \zeta_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathbf{656})$$

и что секторьяльная скорость радіуса вектора ρ_1 равна:

$$\sigma = \frac{m_2}{2m_1(m_1+m_2)} \sqrt{C_4^2 + C_5^2 + C_6^2}.$$

Послѣднія два интегрированія должно произвести надъ дифференціальными уравненіями (738) и

$$\rho_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = 2\sigma, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathbf{739})$$

гдѣ θ_1 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ постояннымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости относительной траэкторіи; интегрированія должно произвести такъ, какъ указано въ § 27-мъ стр. 119—125.

Если относительное движеніе точки m_1 будетъ найдено, то оносительное движеніе другой точки (m_2) опредѣлится при помощи равенствъ (654) стр. 466. Обѣ точки будутъ описывать въ движущейся неизмѣняемой плоскости коническія сѣченія, подобныя и подобно расположенныя относительно центра инерціи, который будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и общимъ фокусомъ обѣихъ кривыхъ; радіусы векторы обѣихъ точекъ будутъ всегда противоположны (черт. 64) и отношеніе между величинами радіусовъ векторовъ будетъ постоянное (654 bis).

Примѣръ 62-й (стр. 326—327). Полное рѣшеніе требуетъ опредѣленія $6n$ интеграловъ съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ. Такъ какъ центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно и дифференціальныя уравненія относительнаго движенія каждой точки имѣютъ видъ (648) стр. 463, то всѣ $6n$ интеграловъ могутъ быть найдены, и слѣдовательно, рѣшеніе задачи можетъ быть доведено до конца. Составивъ 6 интеграловъ движенія центра инерціи, надо будетъ получить еще $(6n-6)$ интеграловъ, интегрируя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія $(n-1)$ точекъ. Объ томъ, что каждая точка въ относительномъ движеніи описываетъ эллипсъ, было уже упомянуто на стр. 463 и 467.

Въ этомъ примѣрѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = C - \frac{\mu}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r^2_{ij},$$

а потому законъ живой силы выразится здѣсь такъ:

$$\frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2 + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 = h.$$

Примѣръ 63-й, стр. 327. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ, движущихся въ плоскости XY, поэтому число независимыхъ координатъ равно четыремъ, а число искомыхъ интеграловъ—восьми. Четыре интеграла выражаютъ прямолинейное и равномѣрное движеніе центра инерціи; пятый интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2 - \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg}\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = h.$$

(Предполагается, что силы направлены такъ, какъ изображено на чертежѣ 40-мъ).

Этотъ интегралъ можно представить еще такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \mu\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}\operatorname{arctg}\frac{\eta_1}{\xi_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2}\right)\frac{m_2}{m_1}.$$

Вмѣсто интеграла, выражающаго законъ площадей въ относительномъ движеніи точки m_1, получимъ слѣдующій интегралъ:

$$\xi_1 \eta_1' - \eta_1 \xi_1' = \mu\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} t + C_3.$$

Примѣръ 64-й (стр. 369—370). Здѣсь $n=2$, а, слѣдовательно, для полученія полнаго рѣшенія надо найти четыре интеграла; одинъ изъ интеграловъ, выражающій законъ площадей для точки m_1, будетъ: $\rho_1{}^2\theta'_1=C_1$; другой интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\rho_1')^2+\frac{1}{2}m_1\rho_1{}^2(\theta_1')^2-m_2g(l-\rho_1)=h.$$

Можно произвести и слѣдующія два интегрированія.

Примѣръ 66-й (стр. 371). Здѣсь $n=4$, слѣдовательно, для полнаго рѣшенія задачи надо произвести восемь интегрированій.

Первыя два изъ четырехъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы, который движется какъ свободная матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію; четыре интеграла этихъ уравненій суть:

$$\rho_c{}^2\theta_c'=C_1,\quad \frac{1}{2}\Big[(\rho_c')^2+\rho_c{}^2(\theta_c')^2\Big]+\frac{\mu}{2}\rho_c{}^2=h_1\ .\ .\ \textbf{(740)}$$

$$\frac{1}{\rho_c{}^2}=\frac{\cos^2(\theta_c+\Gamma_1)}{b^2}+\frac{\sin^2(\theta_c+\Gamma_1)}{a^2};\ \operatorname{tg}(\theta_c+\Gamma_1)=\frac{a}{b}\operatorname{tg}(t\sqrt{\mu}+\Gamma_2)$$

$$a^2=\frac{C_1{}^2}{h_1-\sqrt{h_1{}^2-\mu C_1{}^2}},\quad b^2=\frac{C_1{}^2}{h_1+\sqrt{h_1{}^2-\mu C_1{}^2}}.$$

Изъ остальныхъ интеграловъ, одинъ есть:

$$(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2)\vartheta'=C_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \textbf{(741)}$$

другой выражаетъ законъ живой силы въ движеніи всей системы; вычтя изъ него равенство (740), помноженное на $2(m_1+m_2)$, получимъ:

$$(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2)(\vartheta')^2+\frac{m_1l^2-(m_1-m_2)\xi^2}{l^2-\xi^2}(\xi')^2=$$
$$=h_2-2h_1(m_1+m_2)-\mu(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2).\ .\ \textbf{(742)}$$

Если $m_2=m_1$, то четыре интеграла относительнаго движенія будутъ:

$$m_1l^2\vartheta'=C_2;\ \vartheta=\frac{C_2}{m_1l^2}t+\Gamma_2$$

$$m_1l^2(\vartheta')^2+m_1l^2\frac{(\xi')^2}{l^2-\xi^2}=Bm_1l^2;$$

$$\xi=l\sin(pt+\Gamma_3);\ p^2=B-\frac{C_2{}^2}{m_1{}^2l^4};\ B=\frac{h_2-4h_1m_1}{m_1l^2}-\mu.$$

Слѣдовательно, если массы всѣхъ четырехъ точекъ равны между собою, то движеніе будетъ совершаться слѣдующимъ образомъ: центръ инерціи системы (центръ ромба) будетъ описывать эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ, вмѣстѣ съ тѣмъ взаимно-перпендикулярныя діагонали ромба будутъ равномѣрно вращаться вокругъ центра инерціи и въ то же время длины діагоналей будутъ измѣняться періодически, такъ какъ каждая точка будетъ совершать гармоническое колебаніе вдоль по своей діагонали, отклоняясь на длину l по обѣ стороны центра инерціи.

Кромѣ этихъ примѣровъ, приводимъ рядъ задачъ; въ числѣ ихъ нѣкоторыя хотя и относятся къ движенію твердаго тѣла, но могутъ быть рѣшены съ помощію средствъ, данныхъ въ предыдущихъ главахъ.

19. По наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J катится тяжелый однородный полый шаръ радіуса R; сферическая полость его (радіуса R_1) заполнена тяжелою жидкостью той же самой плотности, какъ и вещество шара; эта жидкость не участвуетъ во вращеніи шара, но движется поступательно; предполагается, что шаръ катится не скользя по плоскости и что въ начальный моментъ онъ былъ въ покоѣ.

Опредѣлить движеніе шара и сравнить съ этимъ движеніе сплошнаго шара того же радіуса R и той же плотности.

Этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ.

Составимъ интегралъ, выражающій законъ живой силы. Означимъ черезъ x длину пути, пройденнаго центромъ шара въ теченіи времени t отъ начала движенія и черезъ θ уголъ, на который повернулся шаръ (вокругъ горизонтальной, перпендикулярной къ плоскости паденія, оси) въ теченіи того же времени; такъ какъ шаръ катится по плоскости не скользя, то $\theta R = x$. Потенціалъ силы тяжести, приложенной къ шару и къ жидкости, есть $Mgx \sin J$; моментъ инерціи шара вокругъ оси вращенія равенъ:

$$I = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\sigma(R^5 - R_1{}^5).$$

Уравненіе живой силы будетъ:

$$\frac{1}{2}M(x')^2 + \frac{1}{2}I(\theta')^2 - Mgx\sin J = 0;\ M = \frac{4}{3}\pi\sigma R^3.$$

Замѣнивъ $\theta' R$ черезъ x', отдѣливъ перемѣнныя, проинтегрировавъ и возвысивъ обѣ части полученнаго равенства въ квадратъ, получимъ:

$$x = \frac{5}{2}\frac{g \sin J}{7-2n^5}t^2; \quad n = \frac{R_1}{R}.$$

Точно также найдемъ, что длина пути, проходимаго въ теченіи времени t сплошнымъ шаромъ выразится такъ:

$$x_1 = \frac{5}{2}\frac{g \sin J}{7}t^2,$$

слѣдовательно:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{7}{7-2n^5}.$$

20. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки m_1 и m_2 прикрѣплены къ концамъ гибкой нерастяжимой нити, перекинутой черезъ блокъ A (чертежъ 65), вращающійся безъ тренія вокругъ горизонтальной оси; среда, въ которой точки находятся, оказываетъ движенію ихъ сопротивленіе, пропорціональное квадрату скорости. Предполагается, что нить не скользитъ по блоку и что свободныя части ея висятъ вертикально и остаются вертикальными во время движенія.

Опредѣлить движеніе системы, предполагая, что блокъ есть однородный цилиндръ радіуса R и массы M; пусть $m_1 > m_2$.

Такъ какъ нить не скользитъ по блоку, то уголъ θ, на который повернется цилиндръ въ теченіе времени t отъ начала движенія, опредѣлится изъ равенства: $\theta R = x_1 - a_1$, гдѣ x_1 и a_1 суть координаты точки m_1 въ моментъ t и въ начальный моментъ (ось $X^{овъ}$ направлена вертикально внизъ).

Эту задачу можно рѣшить, выходя изъ уравненія (721, C) стр. 508; надо прежде всего составить это уравненіе для настоящаго случая.

Моментъ инерціи блока вокругъ оси вращенія равенъ половинѣ MR^2, живая сила вращенія его равна четверти $MR^2(\theta')^2$ или $M(x_1')^2$; работа вѣса точки m_1 на протяженіи безконечно-малаго перемѣщенія dx_1 равна $m_1 G dx_1$, а работа вѣса точки m_2 равна $(-m_2 G dx_1)$, гдѣ G означаетъ величину ускоренія силы тяжести; элементарная работа сопротивленій среды должна быть величиною отрицательною, она выражается такъ: $\mp(\mu_1 + \mu_2)(x'_1)^2 dx_1$, гдѣ верхній знакъ должно взять при положительномъ dx_1, то-есть при движеніи точки m_1 сверху внизъ, а нижній знакъ — при отрицательномъ dx_1, т.-е, при движеніи этой точки снизу вверхъ; μ_1 и μ_2 суть коэфиціенты сопротивленія среды движенію точекъ m_1 и m_2.

Уравненіе (721, C) въ настоящемъ случаѣ будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left(m_1+m_2+\frac{M}{2}\right)x_1'dx'_1 = \left[(m_1-m_2)G \mp (\mu_1+\mu_2)(x_1')^2\right]dx.$$

Представимъ это уравненіе такъ:

$$\frac{x'_1 dx'_1}{g_1 \mp k_1^2(x'_1)^2} = dx, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(K)}$$

гдѣ:

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} = k_1^2, \quad \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}G = g_1.$$

Сравнивъ дифференціальное уравненіе (K) съ подобными же дифференціальными уравненіями, встрѣчающимися въ примѣрѣ 11-мъ (стр. 71—73), мы можемъ заключить, что при движеніи всей системы точка m_1 движется такимъ образомъ, какъ будто бы она была свободна и двигалась прямолинейно при дѣйствіи силы $m_1 g_1$ и сопротивленія среды, равнаго $k_1^2 m_1 (x'_1)^2$.

21. Представимъ себѣ неподвижное твердое тѣло, имѣющее сферическую полость радіуса R_0 (черт. 66). Внутри этой полости, по ея поверхности катается безъ скольженія такой же шаръ радіуса R, какъ въ задачѣ 19-й; шаръ этотъ имѣетъ сферическую полость радіуса R_1, заполненную жидкостью той же плотности, какъ и вещество шара; центръ его остается въ одной и той же вертикальной плоскости.

Опредѣлить движеніе шара при дѣйствіи силы тяжести, предполагая, что въ начальный моментъ линія OC, соединяющая центръ O сферы радіуса R_0 съ центромъ C подвижнаго шара, составляетъ уголъ β съ вертикальною линіею OD и что въ этотъ моментъ шаръ находится въ покоѣ.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый длиною OC съ вертикальною линіею OD въ какой-либо моментъ t; пусть D_1 (черт. 66) есть та точка движущагося шара, которая совпадаетъ съ точкою D тогда, когда уголъ φ равенъ нулю, означимъ черезъ θ уголъ, составляемый длиною CD_1 съ вертикальною линіею. Такъ какъ шаръ катается безъ скольженія, то дуга AD равна дугѣ AD_1, т.-е.: $R_0\varphi = R(\theta+\varphi)$.

Законъ живой силы выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{1}{2}M(R_0-R)^2(\varphi')^2 + \frac{1}{2}\,\frac{8}{15}\pi\sigma(R^5-R_1^5)\left(\frac{R_0-R}{R}\right)^2(\varphi')^2 =$$

$$= Mg(R_0-R)(\cos\varphi-\cos\beta),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10g}{(7-2n^5)(R_0-R)}(\cos\varphi-\cos\beta);$$

сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ живой силы движенія простаго маятника (стр. 236), мы заключимъ, что длина OC качается по тому же закону, какъ простой маятникъ длины:

$$\frac{7-2n^5}{5}(R_0-R).$$

22. На гладкой горизонтальной плоскости лежитъ тяжелая призма, имѣющая основаніемъ прямоугольный треугольникъ $BЮK$ (черт. 67); эта призма можетъ скользить безъ тренія вдоль по плоскости, по направленію оси $X^{овъ}$; въ начальный моментъ призма была въ покоѣ, причемъ центръ инерціи ея находился на оси $Y^{овъ}$. Въ этотъ же моментъ на наклонную плоскость $ЮK$ былъ положенъ тяжелый однородный шаръ, радіуса R и массы m. Вслѣдствіе дѣйствія силы тяжести, шаръ начнетъ катиться по наклонной плоскости и если треніе между нимъ и этою плоскостью достаточно велико, то катаніе шара не будетъ сопровождаться скольженіемъ по плоскости.

Требуется опредѣлить, на какую длину ξ скатится шаръ вдоль по плоскости $ЮK$ въ теченіи времени t.

Всѣ задаваемыя силы, приложенныя къ этой системѣ, суть силы тяжести, направленныя по отрицательной оси $Y^{овъ}$, поэтому центръ инерціи всей системы не долженъ сходить съ той вертикальной линіи, на которой онъ сходился въ начальный моментъ.

Отсюда слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ паденіемъ шара по наклонной плоскости, сама призма должна скользить по направленію положительной оси $X^{овъ}$; въ то время, въ которое центръ шара пройдетъ вдоль по наклонной плоскости разстояніе ξ, центръ инерціи призмы долженъ пройти разстояніе x, удовлетворяющее равенству:

$$Mx = m(\xi \cos J - x),$$

гдѣ J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью $ЮK$ съ горизонтомъ, M — масса призмы, m — масса шара.

Живая сила призмы равна половинѣ $M(x')^2$; живая сила шара состоитъ: изъ живой силы его центра инерціи и изъ живой силы вращательнаго движенія вокругъ центра инерціи:

$$\frac{1}{2}\left[m(\xi' \cos J - x')^2 + m(\xi')^2 \sin^2 J + \frac{2}{5} mR^2(\theta')^2\right];$$

такъ какъ шаръ катится по наклонной плоскости безъ скольженія, то $R\theta' = \xi'$.

Составимъ уравненіе, выражающее законъ живой силы:

$$\frac{m}{2(M+m)}\left(\frac{7}{5}M+\frac{2}{5}m+m\sin^2 J\right)(\xi')^2=mg\xi\sin J;$$

изъ него получимъ:

$$\xi=\frac{(M+m)g\sin J}{\frac{7}{5}M+\left(\frac{2}{5}+\sin^2 J\right)m}\frac{t^2}{2}.$$

23. На поверхность круговаго горизонтальнаго цилиндра, радіусъ котораго равенъ R, положено сочлененіе, состоящее изъ двухъ тяжелыхъ однородныхъ стержней, связанныхъ шарниромъ. Въ начальный моментъ оба стержня DB и DB_1 приподняты за концы B и B_1 до горизонтальнаго положенія (см. черт. 68) причемъ шарниръ D прикасается къ высшей точкѣ окружности одного изъ сѣченій цилиндра, а стержни находятся въ плоскости этого сѣченія. Изъ этого положенія концы стержней пущены свободно; подъ вліяніемъ силы тяжести свободные концы стержней начинаютъ опускаться внизъ, а шарниръ D — подыматься вверхъ. Требуется опредѣлить, какъ великъ наибольшій уголъ съ горизонтомъ, до котораго наклонятся стержни при этомъ движеніи.

Стержни предполагаются безконечно-тонкими; каждый изъ нихъ имѣетъ длину $3\sqrt{2}R$ и массу M.

Примемъ центръ круга за начало координатъ и направимъ ось Y вертикально внизъ; означимъ черезъ θ уголъ наклоненія стержней къ горизонту, а координаты центра инерціи C стержня $D'B'$ черезъ x_c и y_c.

Легко видѣть, что:

$$OD'=\frac{R}{\cos\theta},\quad x_c=\frac{3}{\sqrt{2}}R\cos\theta,\quad y_c=\frac{3}{\sqrt{2}}R\sin\theta-\frac{R}{\cos\theta}.$$

Потенціалъ вѣса обоихъ стержней равенъ $2Mgy_c$; въ начальномъ положеніи стержней $y_c=-R$ и потенціалъ имѣетъ тогда значеніе: $-2MgR$; живая сила стержней равна нулю и въ начальномъ положеніи и въ тотъ моментъ, когда стержни достигнутъ наибольшаго наклона θ_1. Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, слѣдуетъ:

$$2MgR\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta_1-\frac{1}{\cos\theta_1}+1\right)=0;$$

отсюда найдемъ: $\cos\theta_1=\frac{1}{3}$.

24. Къ точкамъ A и B (черт. 69) прикрѣплены концы гибкой нерастяжимой нити длины $2an$, гдѣ $2a$ есть разстояніе между точками A и B, а n — нѣкоторое отвлеченное число или дробь; къ серединѣ нити прикрѣплена тяжелая масса M. Однородный тяжелый стержень, имѣющій длину $2a$ и массу M снабженъ на концахъ ушками, черезъ которыя нить продѣта. Въ начальный моментъ концы D и E стержня совпадаютъ съ точками A и B и грузъ находится въ покоѣ на вытянутыхъ половинахъ нити MB и MA.

Затѣмъ стержень пущенъ свободно. Опредѣлить, какова должна быть наименьшая длина нити, при которой, въ концѣ паденія стержня, грузъ M прикоснется къ его серединѣ.

Въ начальный моментъ координаты (по оси $Y^{\text{овъ}}$) груза M и центра инерціи стержня суть $a\sqrt{n^2-1}$ и нуль; въ тотъ моментъ, въ который требуемое прикосновеніе дѣйствительно произойдетъ, обѣ эти точки будутъ имѣть координату: $a(n-1)$. Для того, чтобы прикосновеніе произошло, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:

$$Mg(2a(n-1)-a\sqrt{n^2-1})\geqslant 0,$$

получаемое изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы; изъ этого условія находимъ: $n\geqslant\frac{5}{3}$.

25. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости можетъ скользить свободно, безъ всякаго тренія, круговой плоскій дискъ радіуса R и массы M. На той же плоскости прикрѣпленъ неподвижно другой дискъ, радіусъ котораго равенъ Rn; (на черт. 70-мъ изображены оба диска; неподвижный, имѣющій центромъ точку O и подвижный, имѣющій центромъ точку B). На диски надѣтъ накрестъ (см. черт. 70-й) упругій, связанный концами шнуръ, модуль упругости котораго равенъ E; этотъ шнуръ въ натуральномъ состояніи имѣетъ длину, равную суммѣ окружностей обоихъ дисковъ. Въ начальный моментъ подвижный дискъ оттянутъ отъ неподвижнаго на столько, что шнуръ имѣетъ натяженіе T; затѣмъ дискъ B пущенъ свободно. Опредѣлить скорость, съ которою дискъ B ударится о дискъ неподвижный.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый свободными частями шнура съ линіею OB; по извѣстной формулѣ, выражающей зависимость между натяженіемъ и относительнымъ удлинненіемъ шнура: $Tl_0=\lambda E$, гдѣ λ есть удлинненіе шнура, т.-е., разность между длиною растянутаго шнура и длиною его l_0 въ натуральномъ состояніи.

Легко разсчитать, что

$$\lambda = 2R(1+n)\left(\theta + \operatorname{cotg}\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ x = \frac{R(1+n)}{\sin\theta},$$

гдѣ x означаетъ разстояніе OB. Затѣмъ окажется, что элементарная работа силъ, приложенныхъ къ диску, выражается такъ:

$$-2T\cos\theta dx = \frac{2E}{\pi}R(1+n)\left(\theta + \operatorname{cotg}\theta - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cotg}^2\theta d\theta$$

и что это есть полный дифференціалъ слѣдующей функціи:

$$\frac{2E}{\pi}R(1+n)\left[\frac{\pi}{2}\theta + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\theta - \theta\operatorname{cotg}\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\theta\right].$$

Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, найдемъ, что искомая скорость равна:

$$V = \frac{T}{E}\sqrt{\frac{2(n+1)R\pi E}{M}}.$$

26. Въ вертикальную гладкую стѣну вбиты два круглыхъ гвоздя A и B на одномъ уровнѣ и въ разстояніи $2b$ одинъ отъ другаго; на эти гвозди наложена крестовина, состоящая изъ двухъ стержней KL и K_1L_1 (черт. 71) равной длины и вѣса, сочлененныхъ шарниромъ C, проходящимъ черезъ середины стержней. Въ начальный моментъ стержни взаимно-перпендикулярны и шарниръ C приходится надъ серединою O разстоянія AB, а стержни находятся въ покоѣ.

Подъ вліяніемъ силы тяжести точка C станетъ опускаться, а уголъ L_1CL — увеличиваться. Требуется опредѣлить, какую скорость будетъ имѣть точка C тогда, когда она совпадетъ съ точкою O; предполагается, что центры инерціи стержней находятся въ C и что плечо инерціи каждаго стержня вокругъ C равно k.

Означимъ уголъ CBO черезъ θ и координату (по оси $Y^{\text{овъ}}$) точки C черезъ y_c. Легко видѣть, что

$$y_c = -b\operatorname{tg}\theta,\quad \theta' = -\frac{y'_c}{b}\cos^2\theta$$

и что интегралъ, выражающій законъ живой силы, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$M(y'_c)^2 + Mk^2(\theta')^2 = 2Mg(b + y_c);$$

отсюда найдемъ, что искомая скорость равна:

$$\sqrt{\frac{2gb^3}{b^2+k^2}}.$$

27. Весьма тонкая твердая трубка, имѣющая видъ винтовой линіи, навернутой на цилиндрѣ радіуса R, можетъ свободно вращаться вокругъ оси этого цилиндра. Ось цилиндра вертикальна, уголъ подъема винтовой линіи $=\alpha$, масса трубки равна M. Въ начальный моментъ трубка въ покоѣ, а въ верхній конецъ ея свободно пущена тяжелая матерьяльная точка, масса которой равна m. Опредѣлить величину угловой скорости, пріобрѣтенную трубкою при паденіи точки m на глубину h.

Точка m скользитъ вдоль по трубкѣ и въ то же время трубка должна вращаться вокругъ вертикальной оси; зависимость между относительною скоростью точки m по отношенію къ трубкѣ и угловою скоростью послѣдней опредѣлится изъ интеграла, выражающаго, что законъ площадей имѣетъ мѣсто вокругъ оси вращенія. Если s' есть относительная скорость точки m, а θ' — угловая скорость трубки, то моментъ абсолютнаго количества движенія точки m вокругъ оси $Z^{овъ}$ (черт. 72) будетъ: $mR(s'\cos\alpha - R\theta')$, а моментъ количествъ движенія трубки: $-MR^2\theta'$; такъ какъ въ начальный моментъ вся система была въ покоѣ, то:

$$mR(s'\cos\alpha - R\theta') - MR^2\theta' = 0;$$

отсюда получимъ величину отношенія между s' и θ'.

Затѣмъ изъ интеграла, выражающаго законъ живой силы, найдемъ:

$$\theta' = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}}.$$

28. Твердая тонкая однородная трубка можетъ свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси къ ней перпендикулярной и проходящей черезъ ея середину. Трубка имѣетъ длину $2a$ и массу M. Кромѣ трубки имѣется еще тонкій однородный и тяжелый стержень длины $2a_1$ и массы m; этотъ стержень свободно входитъ въ трубку.

Въ начальный моментъ трубка AB находится въ покоѣ въ горизонтальномъ положеніи, а стержень DE приставленъ концемъ D къ концу B трубки (черт. 73), причемъ ось его составляетъ продолженіе оси трубки. Въ этомъ положеніи стержню сообщена скорость V въ направленіи DC. Какъ только стержень начнетъ входить въ трубку, то своимъ

вѣсомъ начнетъ клонить конецъ B къ низу, такъ что, вмѣстѣ съ скольженіемъ стержня вдоль по трубкѣ, будетъ происходить вращеніе системы вокругъ оси C. Предполагая, что начальная скорость V на столько велика, что середина C_1 стержня дойдетъ только до середины C трубки, опредѣлить величину угловой скорости системы въ моментъ совпаденія серединъ.

Чтобы опредѣлить эту угловую скорость, надо составить интегралъ, выражающій законъ живой силы, и примѣнить его къ моменту совпаденія серединъ стержня и трубки; изъ него найдемъ, что искомая угловая скорость равна корню квадратному изъ величины:

$$\frac{3mV^2}{Ma^2 + ma_1^2}.$$

29. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости находится твердый параллелопипедъ $ABDE$ (черт. 74), заключающій въ себѣ сферическую пустоту (радіуса R); въ этой полости находится тяжелая матерьяльная точка (масса m). Въ начальный моментъ точка m находится въ нижней точкѣ сферической полости и абсолютная скорость ея равна нулю, а параллелопипедъ (масса M) имѣетъ скорость V вдоль по горизонтальной оси $X^{овъ}$; опредѣлить, какъ должна быть велика скорость V для того, чтобы точка m двигалась по окружности большаго вертикальнаго круга сферы въ одномъ направленіи.

Черезъ центръ $Ю$ сферы проведемъ: ось $ЮΞ$ параллельно оси $X^{овъ}$ и ось $ЮΥ$ вертикально внизъ.

По закону движенія центра инерціи:

$$Mx'_ю + m(x'_ю + \xi') = MV,$$

по закону живой силы:

$$\frac{1}{2}\left[M(x'_ю)^2 + m(x'_ю + \xi')^2 + m(\eta')^2\right] - \frac{1}{2}MV^2 = mg(\eta - R).$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ $x'_ю$, получимъ:

$$\frac{Mm}{M+m}(\xi'^2 - V^2) + m(\eta')^2 = 2mg(\eta - R).$$

Когда точка m будетъ въ самой верхней точкѣ сферы, тогда $\eta = -R$, $\eta' = 0$; притомъ тогда давленіе точки на сферу должно быть направлено снизу вверхъ, слѣдовательно, центробѣжная сила должна быть болѣе

X·

вѣса точки, т.-е.: $(\xi')^2 > gR$, а потому изъ послѣдняго равенства заключимъ, что скорость V должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$V^2 > 5gR + 4gR\frac{m}{M}\,.$$

80. Такой же параллелопипедъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, но въ немъ, вмѣсто сферической пустоты, просверленъ тонкій каналъ, имѣющій видъ циклоиды, обращенной выпуклостью книзу; уравненіе ея:

$$\xi = R(\omega + \sin\omega),\quad \eta = R(1 + \cos\omega);$$

тяжелая матерьяльная точка m скользитъ безъ тренія по этому каналу.

Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы, предполагая, что въ начальный моментъ параллелопипедъ (масса M) и точка m были въ покоѣ и что тогда эта точка не находилась въ самой нижней точкѣ циклоиды.

Изъ уравненій, выражающихъ законы движенія центра инерціи и живой силы:

$$Mx_{ю} + m(x_{ю} + \xi) = 0$$

$$M(x'_{ю})^2 + m((x'_{ю} + \xi')^2 + (\eta')^2) = 2mg(\eta - \eta_0)$$

и изъ уравненій кривой получимъ:

$$R^2\left(\frac{1}{1+\mu}(1+\cos\omega)^2 + \sin^2\omega\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 2gR(\cos\omega - \cos\omega_0),$$

гдѣ μ означаетъ величину отношенія m къ M. Сдѣлавъ подстановку:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sin\frac{\omega_0}{2}\cos\varphi\,,$$

отдѣливъ перемѣнныя и произведя интегрированіе, получимъ:

$$\frac{T}{\pi}\int d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = t + \Gamma,$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{4R\left(1 + \mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}\right)}{g(1+\mu)}}\,,\qquad k^2 = \frac{\mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}}{1 + \mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}}\,.$$

31. Двѣ матерьяльныя точки, массы которыхъ (m) равны между собою, находятся внутри кольцеобразной тонкой однородной трубки (радіусъ кольца R); онѣ связаны упругою нитью, тоже помѣщающеюся въ трубкѣ; длина этой нити, въ натуральномъ состояніи, равна двумъ третямъ длины трубки. Трубка (масса M) лежитъ на гладкой горизонтальной плоскости, по которой можетъ скользить безъ всякаго тренія. Въ начальный моментъ нить растянута настолько, что обѣ точки прикасаются одна къ другой въ точкѣ A трубки; какъ онѣ, такъ и трубка, находятся въ этотъ моментъ въ покоѣ, а затѣмъ система предоставлена самой себѣ. Найти, чему равняется отношеніе кинетической энергіи обѣихъ точекъ къ кинетической энергіи всей системы въ тотъ моментъ, когда нить приметъ натуральную длину.

Примемъ начальное положеніе центра кольца за начало неподвижныхъ координатъ, линію OA — за ось X; начало подвижныхъ осей возьмемъ въ центрѣ $Ю$ кольца, который будетъ оставаться на оси $X^{овъ}$; самое кольцо будетъ двигаться поступательно, а хорда, соединяющая обѣ точки, будетъ всегда перпендикулярна къ оси X. Оси Ξ и Υ расположимъ такъ, какъ изображено на чертежѣ 75-мъ.

Такъ какъ центръ инерціи всей системы неподвиженъ и матерьяльныя точки остаются на окружности: $\xi^2+\eta^2=R^2$, то:

$$(M+2m)x'_{ю}+2m\xi'=0,\quad \eta'=-\frac{\xi}{\eta}\,\xi'.$$

Въ разсматриваемый моментъ ξ относится къ η, какъ 1 къ $\sqrt{3}$; кинетическая энергія обѣихъ точекъ окажется равною:

$$m\Big((x'_{ю}+\xi')^2+(\eta')^2\Big)=\frac{4m}{3(M+2m)^2}(M^2+mM+m^2)(\xi')^2,$$

а кинетическая энергія всей системы — равною:

$$\frac{2m}{3(M+2m)^2}(2M+m)(M+2m)(\xi')^2.$$

32. Двѣ матерьяльныя точки m_1 и m_2 связаны нерастяжимою нитью, имѣющею длину l и проходящею черезъ точку 0; точка m_1 притягивается къ O силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія. Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы.

Эту задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Къ точкѣ m_1 приложена сила, направленная къ точкѣ O, и реакція связи: $l-\rho_1-\rho_2\geqslant 0$, направленная туда же; поэтому точка m_1 должна

X.

постоянно оставаться въ плоскости, проведенной черезъ начальный радіусъ векторъ и черезъ направленіе начальной скорости ея; точно также и точка m_2 во все время движенія остается въ одной плоскости; слѣдовательно, траэкторіи обѣихъ точекъ суть плоскія кривыя, заключающіяся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ точку O.

Движеніе каждой точки въ отдѣльности удовлетворяетъ закону площадей, а движеніе обѣихъ точекъ — закону живой силы; т.-е., мы имѣемъ слѣдующіе интегралы.

$$\rho_1^2\theta_1' = C_1,\quad \rho_2^2\theta'_2 = C_2,$$
$$(m_1+m_2)(\rho'_1)^2 + m_1\rho_1^2(\theta_1')^2 + m_2\rho_2^2(\theta_2')^2 = 2h + \frac{2m_1\mu}{\rho_1};$$

гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть радіусы векторы точекъ; θ_1 — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_1; θ_2 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_2 съ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_2.

Величина реакціи, оказываемой связью на каждую изъ точекъ, выразится по формулѣ, составленной на страницѣ 338; въ примѣненіи къ настоящему вопросу эта формула дастъ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\rho_1(\theta_1')^2 + \rho_2(\theta'_2)^2 - \frac{\mu}{\rho_1^2}\right).$$

Связь находится въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока выраженіе:

$$\frac{C_1^2}{\rho_1^3} + \frac{C_2^2}{\rho_2^3} - \frac{\mu}{\rho_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (743)$$

болѣе нуля.

Пока связь находится въ состояніи напряженія, радіусъ векторъ ρ_2 равняется $(l-\rho_1)$; исключивъ изъ предыдущихъ интеграловъ θ_1' и θ_2', замѣнивъ ρ_2 черезъ $(l-\rho_1)$, отдѣливъ перемѣнныя ρ_1 и t, и интегрируя, получимъ:

$$\int \rho_1(l-\rho_1)\frac{d\rho_1}{R} = \frac{(t+\Gamma_1)}{\sqrt{m_1+m_2}},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{(2h\rho_1^2 + 2m_1\mu\rho_1 - m_1C_1^2)(l-\rho_1)^2 - m_2C_2^2\rho_1^2}.$$

Произведя интегрированіе и рѣшивъ полученный интегралъ относи-

тельно ρ_1, будемъ имѣть выраженіе этого радіуса вектора въ функціи отъ времени. Затѣмъ придется произвести еще два интегрированія для того, чтобы найти выраженія угловъ θ_1 и θ_2 въ функціяхъ отъ времени.

Слѣдуетъ замѣтить, что если C_1 и C_2 не равны нулю и если начальная величина a радіуса вектора ρ_1 заключается между нулемъ и l, то и во все время движенія ρ_1 не можетъ, ни обратиться въ нуль, ни возрасти до l. Въ самомъ дѣлѣ, изъ третьяго интеграла слѣдуетъ, что при $\rho_1 = a$, подкоренной многочленъ R^2 имѣетъ положительную величину:

$$(m_1 + m_2)(\rho_1')^2 a^2 (l - a)^2,$$

далѣе, при $\rho_1 = 0$, и при $\rho_1 = l$ многочленъ R^2 имѣетъ отрицательныя величины:

$$-m_1 C_1^2 l^2, \quad -m_2 C_2^2 l^2,$$

слѣдовательно, должны существовать два значенія ρ_1, обращающія многочленъ R^2 въ нуль, притомъ одно изъ нихъ (b_1) должно заключаться между нулемъ и a, другое (b_2) — между a и l; такъ какъ R не можетъ, при движеніи, получать мнимыхъ значеній, то ρ_1 должно колебаться между предѣлами b_1 и b_2.

33. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ матерьяльныхъ точекъ m_1 и m_2, между которыми существуетъ взаимное притяженіе, пропорціональное произведенію массъ и разстоянію между точками; точка m_1 должна оставаться на нѣкоторой наклонной плоскости: $z_1 - y_1 \operatorname{cotg} J = 0$, а точка m_2 — на вертикальной линіи: $z_2 = 0$, $x_2 = 0$ (ось Y направлена внизъ). Опредѣлить движеніе точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 m_2 x_1,$$
$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 m_2 (y_1 - y_2) - \lambda \operatorname{cotg} J + m_1 g,$$
$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 m_2 z_1 + \lambda,$$
$$m_2 y_2'' = -\mu m_1 m_2 (y_2 - y_1) + m_2 g.$$

Изъ двухъ среднихъ уравненій исключимъ λ, замѣнимъ y_1 черезъ $z_1 \operatorname{tg} J$, а затѣмъ положимъ:

$$y_2 = \mathfrak{y} + \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad \ldots\ldots \quad (744)$$

$$\frac{z_1}{\cos J} = y_2 \sin J + \mathfrak{x} + \frac{g \sin J}{\mu m_2} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \sin J + \frac{g(m_1 + m_2)\sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad (745)$$

тогда получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія, подлежащія интегрированію:

$$x_1'' = -\mu m_2 x,\quad \mathfrak{x}'' + \mathfrak{y}'' \sin J = -\mu m_2 \mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{y}'' = -\mu m_1 (\mathfrak{y} \cos^2 J - \mathfrak{x} \sin J);$$

первое изъ нихъ интегрируется отдѣльно, второе же и третье суть совокупныя линейныя дифференціальныя уравненія второго порядка, имѣющія слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\mathfrak{x} = e^{kt},\quad \mathfrak{y} = \varkappa e^{kt},$$

гдѣ k и $\varkappa$ суть постоянныя, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$k^2 + \varkappa k^2 \sin J + \mu m_2 = 0,\quad \varkappa k^2 + \mu m_1 (\varkappa \cos^2 J - \sin J) = 0.$$

Этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ четыре совокупности значеній k и $\varkappa$:

$$1 \begin{cases} k_1 = +i\omega_1\sqrt{\mu}, \\ \varkappa_1, \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} k_2 = +i\omega_2\sqrt{\mu}, \\ \varkappa_2, \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} k_3 = -i\omega_1\sqrt{\mu}, \\ \varkappa_1, \end{cases} \qquad 4 \begin{cases} k_4 = -i\omega_2\sqrt{\mu}, \\ \varkappa_2. \end{cases}$$

$$\omega_1\sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\omega_2\sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\varkappa_1 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_1},\quad \varkappa_2 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_2}.$$

Въ результатѣ получимъ слѣдующее полное рѣшеніе этой задачи:

$$x_1 = A_1 \cos(t\sqrt{\mu m_2} + A_2),\ \ldots\ldots \quad \mathbf{(746,\ 1)}$$

$$\frac{z_1}{\cos J} = \frac{g(m_1+m_2)\sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1(1 + \varkappa_1 \sin J)\cos(t\omega_1\sqrt{\mu} + C_1) +$$
$$+ B_2(1 + \varkappa_2 \sin J)\cos(t\omega_2\sqrt{\mu} + C_2),. \quad \mathbf{(746,2)}$$

$$y_2 = \frac{g(m_2+m_1\sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1 \varkappa_1 \cos(t\omega_1\sqrt{\mu}+C_1) +$$
$$+ B_2 \varkappa_2 \cos(t\omega_2\sqrt{\mu}+C_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(746, 3)}$$

Отношеніе ($z_1 : \cos J$) выражаетъ разстояніе точки m_1 отъ оси $X^{овъ}$.

Формула (746, 3) выражаетъ, что матерьяльная точка m_2 совершаетъ сложныя гармоническія колебанія по обѣ стороны точки:

$$x = 0, \quad y = \frac{g(m_2+m_1\sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad z = 0;$$

эти сложныя колебанія можно разсматривать какъ результатъ интерференціи простыхъ колебаній, имѣющихъ періоды:

$$\frac{2\pi}{\omega_1\sqrt{\mu}} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi}{\omega_2\sqrt{\mu}}.$$

Движеніе точки m_1 по наклонной плоскости совершается около точки:

$$x = 0, \quad \frac{z}{\cos J} = \frac{g(m_1+m_2)\sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad y = z \operatorname{tg} J$$

и есть результатъ простыхъ гармоническихъ колебаній по оси $X^{овъ}$, имѣющихъ періодъ ($2\pi : \sqrt{\mu m_2}$) и сложныхъ гармоническихъ колебаній, перпендикулярныхъ къ этой оси.

34. Вокругъ горизонтальной оси вращается равномѣрно (съ угловою скоростью ω) плоскость, параллельная этой оси и отстоящая отъ нея въ разстояніи l. (На чертежѣ 76-мъ плоскость чертежа изображаетъ нѣкоторую вертикальную плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія; точка O — слѣдъ этой оси, а линія QBP — слѣдъ вращающейся плоскости въ моментъ t). Въ начальный моментъ ($t=0$) вращающаяся плоскость горизонтальна и на нее, въ точку B (черт. 76), былъ положенъ тяжелый однородный шаръ радіуса R и массы M; предполагается, что шаръ этотъ не можетъ скользить по плоскости. Требуется опредѣлить движеніе шара, пока онъ остается на вращающейся плоскости.

Очевидно, что центръ шара C останется въ плоскости XY и что положеніе шара на плоскости и въ пространствѣ вполнѣ опредѣлится разстояніемъ ξ_c его центра отъ линіи OB (по которой мы направимъ ось OY), такъ какъ уголъ θ, на который повернется шаръ, будетъ равенъ:

$$\theta = \omega t + \frac{\xi_c}{R}.$$

X.

Абсолютныя координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = \xi_c \cos \omega t - (l - R) \sin \omega t, \quad y_c = \xi_c \sin \omega t + (l - R) \cos \omega t.$$

Для рѣшенія этого вопроса, составимъ сначала Лагранжево дифференціальное уравненіе, которому долженъ удовлетворять координатный параметръ ξ_c; составляя это уравненіе:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_c}\right) = \frac{\partial T}{\partial \xi_c} + Q,$$

придется составить слѣдующія выраженія:

$$v_c^2 = (\xi'_c)^2 + \xi_c^2 \omega^2 + \omega^2 (l - R)^2 - 2 \xi'_c \omega (l - R),$$

$$R^2 (\theta')^2 = R^2 \omega^2 + 2 \omega R \xi'_c + (\xi'_c)^2$$

$$T = \frac{M}{2}\left(v_c^2 + \frac{2}{5} R^2 (\theta')^2\right); \quad Q = Mg \frac{\partial y_c}{\partial \xi_c} = Mg \sin \omega t.$$

Окажется, что Лагранжево уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{7}{5} \xi_c'' = \omega^2 \xi_c + g \sin \omega t.$$

Полный интегралъ этого уравненія:

$$\xi_c = A_1 e^{kt} + A_2 e^{-kt} - \frac{5}{12} \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t, \quad k = \omega \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Въ моментъ $t = 0$, центръ шара находится на оси Y, т.-е., въ этотъ моментъ $\xi_c = 0$, а потому $A_2 = -A_1$; кромѣ того, въ этотъ моментъ абсолютная скорость центра инерціи равна нулю, а, слѣдовательно:

$$(\xi'_c)_0 = (l - R)\omega; \quad A_1 = \frac{\sqrt{35}}{24} \frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\frac{7}{5}} \frac{(l-R)}{2}.$$

35. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки (массы m_1 и m_2) связаны нерастяжимою гибкою нитью длины l и движутся въ средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости и массѣ точки; движеніе совершается въ одной вертикальной плоскости.

Въ этомъ случаѣ:

$$X_1 = -\varkappa m_1 x_1'; \quad Y_1 = -\varkappa m_1 y_1' + m_1 g$$

X.

$$X_2 = -\varkappa m_2 x_2'; \quad Y_2 = -\varkappa m_2 y_2' + m_2 g$$

$$x_1 = x_c + \frac{m_2}{m_1+m_2} l \cos\theta, \quad y_1 = y_c + \frac{m_2}{m_1+m_2} l \sin\theta$$

$$x_2 = x_c - \frac{m_1}{m_1+m_2} l \cos\theta, \quad y_2 = y_c - \frac{m_1}{m_1+m_2} l \sin\theta.$$

Составивъ уравненія Лагранжа, получимъ:

$$x_c'' = -\varkappa x_c', \; y_c'' = -\varkappa y_c' + g, \quad \theta'' = -\varkappa\theta';$$

первыя два дифференціальныя уравненія выражаютъ, что центръ инерціи движется какъ свободная тяжелая точка, имѣющая массу, равную единицѣ (см. примѣръ 18-й, стр. 83—85); послѣднее дифференціальное уравненіе, по интегрированіи, даетъ слѣдующій результатъ:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_0'}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa t}).$$

По формуламъ страницы 345-й составимъ выраженія для реакцій λ; найдемъ:

$$Q = -\varkappa u \cos(u, r_{12}), \quad K = -\frac{u^2}{r_{12}} + \frac{u^2 \cos^2(u, r_{12})}{r_{12}};$$

пока скорости точекъ удовлетворяютъ условію:

$$u \cos(u, r_{12}) = v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

до тѣхъ поръ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \frac{u^2}{l} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l(\theta')^2,$$

т.-е., λ имѣетъ величину положительную; значитъ, если въ начальный моментъ нить была натянута, то она останется натянутою и во все время движенія.

ГЛАВА XI.

О движеніи твердаго тѣла.

§ 119. Дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла.

Свободная неизмѣняемая система точекъ или свободное твердое тѣло имѣетъ шесть *степеней свободы* *), потому что число координатныхъ параметровъ, вполнѣ опредѣляющихъ положеніе такой системы въ пространствѣ, равно шести.

Этими координатными параметрами могутъ служить координаты твердаго тѣла: $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$, *ф*, *ж*, *э* или другія шесть независимыхъ перемѣнныхъ, могущія замѣнить эти координаты.

Въ томъ, что число степеней свободы свободной неизмѣняемой системы точекъ равно шести, можно убѣдиться при помощи слѣдующаго соображенія.

Неизмѣняемость системы, состоящей изъ n точекъ, можетъ быть достигнута нѣкоторымъ числомъ неизмѣняемыхъ стержней, соединяющихъ точки попарно; наименьшее число стержней, потребное для этого, легко можетъ быть разсчитано. Три точки будутъ неизмѣняемо связаны тремя стержнями, а всякая новая точка будетъ прикрѣплена къ предыдущимъ тремъ не менѣе, какъ тремя новыми стержнями, такъ что, для неизмѣннаго соединенія между собою

3-хъ точекъ — требуется 3 стержня,

4-хъ » » $3 + 3 = 6$ стержней,

5-и » » $3 + 2.3 = 9$ стержней,

. . . .

n » » $3+(n-3)3=3n-6$ стерж.

---

*) Значеніе этого термина указано на стран. 372-й, въ примѣчаніи 1-мъ.

Итакъ для того, чтобы связать между собою неизмѣняемо n точекъ, требуется $(3n-6)$ связей, выражающихся равенствами слѣдующаго вида:

$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}-l_{ij}=0,$$

а потому число степеней свободы такой системы равно

$$\varkappa=3n-(3n-6)=6.$$

Такъ какъ $\varkappa=6$, то таково же число дифференціальныхъ уравненій движенія такой системы, не заключающихъ реакцій тѣхъ воображаемыхъ стержней, которые дѣлаютъ систему неизмѣняемою.

Эти шесть уравненій легко могутъ быть написаны прямо, если примемъ во вниманіе, что реакціи воображаемыхъ стержней попарно равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержнямъ; такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто спеціальная форма закона движенія центра инерціи, упомянутая на страницѣ 428-й, и такъ какъ главный моментъ реакцій связей равенъ нулю (стр. 457), то имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$Mx''_c=\sum_{i=1}^{i=n}X_i,\quad My''_c=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i,\quad Mz''_c=\sum_{i=1}^{i=n}Z_i\quad .\ .\ (616,A)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt}=\varLambda_x,\quad \frac{d\lambda_y}{dt}=\varLambda_y,\quad \frac{d\lambda_z}{dt}=\varLambda_z\quad .\ .\ .\ .\ (641)$$

Эти же самыя уравненія могутъ быть получены еще другимъ путемъ, а именно изъ равенства (567) стр. 383, выражающаго начало д'Аламбера; для этого надо выразить возможныя варьяціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы помощью нѣкоторыхъ шести независимыхъ варьяцій, а затѣмъ приравнять нулю коэффиціенты этихъ варьяцій въ равенствѣ (567).

За эти независимыя варьяціи мы примемъ: варьяціи координатъ какой-либо точки $Ю$, неизмѣнно связанной съ неизмѣняемою систе-

мою, и три другія безконечно-малыя величины, выражающіяся слѣдующими линейными функціями варьяцій угловъ $ф$, $ж$, $э$:

$$\left.\begin{aligned}\theta_x &= \delta э \cos ж \sin ф - \delta ф \sin ж\\ \theta_y &= \delta э \sin ж \sin ф + \delta ф \cos ж\\ \theta_z &= \delta э \cos ф + \delta ж\end{aligned}\right\}; \quad . \; . \; . \; . \quad (747)$$

сравнивъ эти выраженія съ выраженіями (107), (108), (109) для P, Q и R на страницахъ 94—95 кинематической части, легко видѣть, что, при одновременномъ увеличеніи угловъ $ф$, $ж$ и $э$ на $\delta ф$, $\delta ж$, $\delta э$, вся система поворачивается на безконечно-малый уголъ:

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z)^2}\\ &= \sqrt{(\delta ф)^2 + (\delta ж)^2 + (\delta э)^2 + 2\delta э \delta ж \cos ф} \quad . \; . \; . \; . \quad (748)\end{aligned}$$

вокругъ оси, составляющей съ осями $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$, углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{\theta_x}{\theta}, \quad \frac{\theta_y}{\theta}, \quad \frac{\theta_z}{\theta}.$$

Безконечно-малый уголъ θ можетъ быть названъ *угловою варьяціею* положенія тѣла, а вышесказанная ось—мгновенною осью этой варьяціи; величины θ_x, θ_y, θ_z можно условиться называть проэкціями угловой варьяціи на оси координатъ $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$. Если направленіе мгновенной оси угловой варьяціи означить черезъ θ, то можно написать слѣдующія равенства:

$$\theta_x = \theta \cos(\theta, X), \quad \theta_y = \theta \cos(\theta, У), \quad \theta_z = \theta \cos(\theta, Z) \; . \; . \quad (749)$$

По аналогіи, существующей между выраженіями (747), (748), (749) и соотвѣтственными выраженіями (107), (108), (109), (110), (101) кинематической части, мы вправѣ заключить, что возможныя варьяціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы выразятся слѣдующими линейными функціями шести независимыхъ варьяцій $\delta x_{ю}$, $\delta y_{ю}$, $\delta z_{ю}$, θ_x, θ_y, θ_z:

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i &= \delta x_ю + (z_i - z_ю)\theta_y - (y_i - y_ю)\theta_z,\\ \delta y_i &= \delta y_ю + (x_i - x_ю)\theta_z - (z_i - z_ю)\theta_x,\\ \delta z_i &= \delta z_ю + (y_i - y_ю)\theta_x - (x_i - x_ю)\theta_y.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (750)$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (567) и приравнявъ нулю коэффиціенты независимыхъ варьяцій, получимъ уравненія (616, A) и три слѣдующія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left((y_i - y_ю)z_i'' - (z_i - z_ю)y_i''\right) = (Л_ю)_x, \quad \ldots \quad (751, a)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left((z_i - z_ю)x_i'' - (x_i - x_ю)z_i''\right) = (Л_ю)_y, \quad \ldots \quad (751, b)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left((x_i - x_ю)y_i'' - (y_i - y_ю)x_i''\right) = (Л_ю)_z, \quad \ldots \quad (751, c)$$

которыя, на основаніи уравненій (616, A), могутъ быть приведены къ виду (641).

Во многихъ вопросахъ уравненіямъ (641) должно предпочесть другія три уравненія, заключающія проэкціи главнаго момента задаваемыхъ силъ на оси Ξ, Υ, Z, неизмѣнно связанныя съ системою; эти уравненія мы теперь выведемъ.

Равенство (567), по подстановленіи въ него, вмѣсто δx_i, δy_i, δz_i, — выраженій (750), можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[(X_i - m_i x_i'')\delta x_ю + (У_i - m_i y_i'')\delta y_ю + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_ю\right] +$$
$$+ \theta \sum_{i=1}^{i=n}\begin{vmatrix}\cos(\theta, X), & \cos(\theta, У), & \cos(\theta, Z)\\ x_i - x_ю, & y_i - y_ю, & z_i - z_ю\\ X_i - m_i x_i'', & У_i - m_i y_i'', & Z_i - m_i z_i''\end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \quad (752)$$

Опредѣлитель, заключающійся подъ знакомъ второй суммы, выражаетъ величину объема параллелопипеда, имѣющаго ребрами:

1) длины, равныя единицѣ и параллельныя мгновенной оси угловой варьяціи, 2) длины, равныя и параллельныя радіусу вектору, проведенному изъ точки *Ю* въ точку m_i и 3) длины, изображающія величину и направленіе *потерянной силы* точки m_i.

Величина этого объема можетъ быть выражена другимъ опредѣлителемъ, составленнымъ изъ проэкцій реберъ на взаимно перпендикулярныя оси $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathbf{Z}$, неизмѣнно связанныя съ системою; этотъ опредѣлитель можетъ быть представленъ такъ:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta, \Xi), & \cos(\theta, \Upsilon), & \cos(\theta, \mathbf{Z}) \\ \xi_i, & \eta_i, & \zeta_i \\ \Pi_i \cos(\Pi_i \Xi), & \Pi_i \cos(\Pi_i \Upsilon), & \Pi_i \cos(\Pi_i \mathbf{Z}) \end{vmatrix},$$

$$\Pi_i \cos(\Pi_i \Xi) = \Xi_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Xi),$$
$$\Pi_i \cos(\Pi_i \Upsilon) = \Upsilon_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Upsilon),$$
$$\Pi_i \cos(\Pi_i \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \mathbf{Z}),$$

гдѣ Ξ_i, Υ_i, $\mathbf{Z}_i$ означаютъ величины проэкцій задаваемой силы F_i, приложенной къ точкѣ m_i, на оси Ξовъ, Υовъ, $\mathbf{Z}$овъ.

Вслѣдствіе такой замѣны одного опредѣлителя другимъ, вторая сумма равенства (752) обратится въ линейную функцію величинъ:

$$\theta_\xi = \theta \cos(\theta, \Xi),\ \theta_\eta = \theta \cos(\theta, \Upsilon),\ \theta_\zeta = \theta \cos(\theta, \mathbf{Z})\ \ldots \quad \mathbf{(753)}$$

которыя, подобно величинамъ (749), суть независимыя варьяціи, если только система свободна, а потому преобразованное равенство (752) распадается на шесть дифференціальныхъ уравненій: три уравненія (616, A) и три слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i \Big(\eta_i \cos(\dot{w}_i \mathbf{Z}) - \zeta_i \cos(\dot{w}_i \Upsilon) \Big) = (Л_ю)_\xi \\ &\sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i \Big(\zeta_i \cos(\dot{w}_i \Xi) - \xi_i \cos(\dot{w}_i \mathbf{Z}) \Big) = (Л_ю)_\eta \\ &\sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i \Big(\xi_i \cos(\dot{w}_i \Upsilon) - \eta_i \cos(\dot{w}_i \Xi) \Big) = (Л_ю)_\zeta \end{aligned}\right\} \ldots \quad \mathbf{(754)}$$

гдѣ во вторыхъ частяхъ находятся выраженія проэкцій на оси Ξ, Υ, Z главнаго момента задаваемыхъ силъ вокругъ точки *Ю*:

$$(Л_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i \mathsf{Z}_i - \zeta_i \Upsilon_i) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(755, a)}$$

$$(Л_ю)_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i \Xi_i - \xi_i \mathsf{Z}_i) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(755, b)}$$

$$(Л_ю)_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i \Upsilon_i - \eta_i \Xi_i) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(755. c)}$$

Первыя части уравненій (754) могутъ быть представлены въ другомъ видѣ; произведемъ преобразованіе надъ первою частью перваго изъ этихъ уравненій.

Выразимъ проэкціи ускоренія $\dot{w}_i$ на подвижныя оси Z и Υ по формулѣ (293) кинематической части (стр. 251); составляя эти выраженія, намъ придется представить себѣ, что черезъ неподвижную точку (напримѣръ, черезъ начало координатъ) проведены направленія, параллельныя осямъ Z и Υ, и по нимъ, отъ *O* отложены длины, равныя единицѣ; скорости точекъ, находящихся на концѣ этихъ длинъ, войдутъ въ составляемыя нами выраженія. Проэкціи на оси Ξ, Υ, Z скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси Z, будутъ: $q, -p, 0$; а проэкціи на тѣ же оси скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси Υ, будутъ: $-r$, 0, p.

Мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \mathsf{Z}) = \frac{d(w_i \cos(w_i, \mathsf{Z}))}{dt} - q w_i \cos(w_i \Xi) + p w_i \cos(w_i \Upsilon)$$

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Upsilon) = \frac{d(w_i \cos(w_i, \Upsilon))}{dt} + r w_i \cos(w_i \Xi) - p w_i \cos(w_i \mathsf{Z});$$

эти выраженія подставимъ въ первую часть перваго изъ уравненій (754).

Такъ какъ система—неизмѣняемая, то ξ_i, η_i, ζ_i постоянны и могутъ быть введены подъ знаки производныхъ по времени; кромѣ того, припомнимъ составленныя на страницѣ 473-й выраженія (660) величинъ $(л_ю)_\xi$, $(л_ю)_\eta$, $(л_ю)_\zeta$; то окажется, что первая часть сказаннаго уравненія можетъ быть выражена такъ:

$$\frac{d(л_ю)_\xi}{dt} + q(л_ю)_\zeta - r(л_ю)_\eta +$$

$$+\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[(p\eta_i - q\xi_i)w_i \cos(w_i \Upsilon) - (r\xi_i - p\zeta_i)w_i \cos(w_i Z)\Big];$$

послѣдняя же сумма, если проэкціи w_i на оси Υ и $\mathbf{Z}$ будутъ замѣнены выраженіями (143) стр. 125 кинематической части, получитъ такой видъ:

$$M[(p\eta_c - q\xi_c)w_ю \cos(w_ю \Upsilon) - (r\xi_c - p\zeta_c)w_ю \cos(w_ю \mathbf{Z})] \,.\ \mathbf{(756)}$$

Чтобы придать полученному выраженію болѣе сжатый видъ, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$w_ю \cos(w_ю \Xi) = \alpha,\ w_ю \cos(w_ю \Upsilon) = \beta,\ w_ю \cos(w_ю \mathbf{Z}) = \gamma, .\ \mathbf{(757)}$$

тогда выраженіе (733) живой силы неизмѣняемой системы, приведенное на страницѣ (512), представится въ такомъ видѣ:

$$T = M\left[\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} + \alpha(q\zeta_c - r\eta_c) + \beta(r\xi_c - p\zeta_c) + \gamma(p\eta_c - q\xi_c\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(A_ю p^2 + B_ю q^2 + C_ю r^2 - 2D_ю qr - 2E_ю rp - 2F_ю pq), .\ \mathbf{(733\ bis)}$$

выраженіе же (756) можетъ быть представлено подъ видомъ слѣдующей разности:

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma}\beta - \frac{\partial T}{\partial \beta}\gamma;$$

кромѣ того, если припомнить выраженія (661), приведенныя на страницахъ 473—474, и сравнить ихъ съ выраженіемъ (733, bis) живой силы, то будетъ видно, что:

$$(л_ю)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p},\ (л_ю)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q},\ (л_ю)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} \ldots\ldots\ \mathbf{(757)}$$

По этимъ причинамъ, дифференціальныя уравненія (754) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}{dt} = r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \gamma\frac{\partial T}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial T}{\partial \gamma} + (Л_ю)_\xi. \quad (758, a)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)}{dt} = p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha\frac{\partial T}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial T}{\partial \alpha} + (Л_ю)_\eta. \quad (758, b)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{dt} = q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + \beta\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial T}{\partial \beta} + (Л_ю)_\zeta. \quad (758, c)$$

Величины (753) могутъ быть названы проэкціями угловой варьяціи на оси Ξ, Υ, Z; онѣ могутъ быть выражены слѣдующими линейными функціями отъ $\delta ф$, $\delta ж$ и $\delta э$:

$$\left.\begin{aligned} \theta_\xi &= -\delta ж \sin ф \cos э + \delta ф \sin э, \\ \theta_\eta &= \quad \delta ж \sin ф \sin э + \delta ф \cos э, \\ \theta_\zeta &= \quad \delta ж \cos ф + \delta э. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (759)$$

Если за точку *Ю* взять центръ инерціи неизмѣняемой системы, то ξ_c, η_c, ζ_c будутъ равны нулю; тогда въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (758) сократятся члены, заключающіе частныя производныя отъ T по α, β и γ.

Если твердое тѣло (или неизмѣняемая система) не свободно, но имѣетъ одну неподвижную точку, которую примемъ за точку *Ю*, то α, β и γ будутъ равны нулю, а потому тогда во вторыхъ частяхъ уравненій (758) тоже не будетъ членовъ, заключающихъ производныя отъ T по α, β и γ.

Если твердое тѣло свободно и за точку *Ю* взять центръ инерціи C, а за оси Ξ, Υ, Z—главныя центральныя оси инерціи тѣла, то

живая сила тѣла и проэкціи на оси Ξ, Υ, Z главнаго момента количествъ движенія вокругъ центра инерціи выразятся такъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2) \; . \; . \; . \; . \; (760)$$

$$(\text{л}c)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p} = \mathfrak{A}_c p, \;\; (\text{л}c)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q} = \mathfrak{B}_c q, \;\; (\text{л}c)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} = \mathfrak{C}_c r. \;\; (761)$$

Тогда дифференціальныя уравненія (758) получатъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} = qr(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c) + (\text{Л}_c)_\xi \; . \; . \; . \; . \; (762, \text{a})$$

$$\mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} = rp(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) + (\text{Л}_c)_\eta \; . \; . \; . \; . \; (762, \text{b})$$

$$\mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} = pq(\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c) + (\text{Л}_c)_\zeta \; . \; . \; . \; . \; . \; (762, \text{c})$$

Эти дифференціальныя уравненія называются Эйлеровыми дифференціальными уравненіями вращательнаго движенія свободнаго тѣла вокругъ центра инерціи.

Дифференціальныя уравненія (616, A) и (758) могутъ быть выведены еще слѣдующимъ образомъ.

Примѣнивъ къ свободному твердому тѣлу равенство (567, A), приведенное въ § 78-мъ на стр. 396, замѣнимъ варьяціи δx_i, δy_i, δz_i выраженіями (750), тогда R и первая сумма этого равенства выразятся такъ:

$$R = M(x_c' \delta x_\text{ю} + y_c' \delta y_\text{ю} + z_c' \delta z_\text{ю}) +$$

$$+ (\text{л}_\text{ю})_x \theta_x + (\text{л}_\text{ю})_y \theta_y + (\text{л}_\text{ю})_z \theta_z = M w_c \varepsilon_\text{ю} \cos(w_c, \varepsilon_\text{ю}) + \text{л}_\text{ю} \theta \cos(\text{л}_\text{ю}, \theta)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon) = B \varepsilon_\text{ю} \cos(B, \varepsilon_\text{ю}) + \text{Л}_\text{ю} \theta \cos(\text{Л}_\text{ю}, \theta); \; . \; . \; (763)$$

поэтому сумму R можно представить еще такъ:

$$R = M(\alpha_c \varepsilon_\text{ю} \cos(\varepsilon_\text{ю} \Xi) + \beta_c \varepsilon_\text{ю} \cos(\varepsilon_\text{ю} \Upsilon) + \gamma_c \varepsilon_\text{ю} \cos(\varepsilon_\text{ю} Z)) +$$

$$+ (\text{л}_\text{ю})_\xi \theta_\xi + (\text{л}_\text{ю})_\eta \theta_\eta + (\text{л}_\text{ю})_\zeta \theta_\zeta,$$

гдѣ α_c, β_c, γ_c суть проэкціи скорости центра инерціи системы на оси Ξ, Υ, Z; эти величины могутъ быть выражены такъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_c &= \alpha + q\zeta_c - r\eta_c = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{1}{M} \\ \beta_c &= \beta + r\xi_c - p\zeta_c = \frac{\partial T}{\partial \beta}\frac{1}{M} \\ \gamma_c &= \gamma + p\eta_c - q\xi_c = \frac{\partial T}{\partial \gamma}\frac{1}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (764)$$

Въ равенствѣ (567, A) заключается варьяція: δT. Такъ какъ T есть функція (733, bis) отъ α, β, γ, p, q, r и притомъ только отъ этихъ величинъ, то поэтому:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial T}{\partial \beta}\delta\beta + \frac{\partial T}{\partial \gamma}\delta\gamma + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r,$$

или, на основаніи равенствъ (757) и (764):

$$\delta T = M(\alpha_c\delta\alpha + \beta_c\delta\beta + \gamma_c\delta\gamma) + (л_ю)_\xi\delta p + (л_ю)_\eta\delta q + (л_ю)_\zeta\delta r.$$

Поэтому разность между варьяціею δT и полною производною отъ R по T выразится такъ:

$$\begin{aligned} \delta T - \frac{dR}{dt} &= M\left[\alpha_c\left(\delta\alpha - \frac{d\varkappa_1}{dt}\right) + \beta_c\left(\delta\beta - \frac{d\varkappa_2}{dt}\right) + \gamma_c\left(\delta\gamma - \frac{d\varkappa_3}{dt}\right)\right] + \\ &+ (л_ю)_\xi\left(\delta p - \frac{d\theta_\xi}{dt}\right) + (л_ю)_\eta\left(\delta q - \frac{d\theta_\eta}{dt}\right) + (л_ю)_\zeta\left(\delta r - \frac{d\theta_\zeta}{dt}\right) - \\ &- M\frac{d\alpha_c}{dt}\varkappa_1 - M\frac{d\beta_c}{dt}\varkappa_2 - M\frac{d\gamma_c}{dt}\varkappa_3 - \\ &- \frac{d(л_ю)_\xi}{dt}\theta_\xi - \frac{d(л_ю)_\eta}{dt}\theta_\eta - \frac{d(л_ю)_\zeta}{dt}\theta_\zeta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (765) \end{aligned}$$

здѣсь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ означаютъ проэкціи $\varepsilon_ю$ на оси Ξ, Υ, Z.

Заключающіяся здѣсь разности между варьяціями $\delta\alpha, \ldots \delta p, \ldots$ и производными по времени отъ $\varkappa_1, \ldots \theta_\xi, \ldots$ могутъ быть выражены по формулѣ (582) стр. 395-й § 77-го; составимъ выраженія этихъ разностей.

Предварительно представимъ себѣ три взаимно-перпендикулярныя

направленія, выходящія изъ начала координатъ и параллельныя осямъ Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, неизмѣнно связаннымъ съ движущимся твердымъ тѣломъ; на этихъ подвижныхъ направленіяхъ представимъ себѣ три точки $M(\Xi)$, $M(\Upsilon)$, $M(\mathbf{Z})$, по одной на каждомъ, отстоящія отъ O на постоянномъ разстояніи, равномъ единицѣ. Одновременно съ дѣйствительнымъ движеніемъ тѣла и эти точки совершаютъ движеніе и проэкціи скоростей ихъ на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ выражаются слѣдующими величинами:

Проэкціи скоростей точекъ

	$M(\Xi)$	$M(\Upsilon)$	$M(\mathbf{Z})$
на ось Ξ	0	$-r$	q
на ось Υ	r	0	$-p$
на ось $\mathbf{Z}$	$-q$	p	$0.$

Кромѣ того, одновременно съ варьяціею движенія тѣла, положенія этихъ точекъ получаютъ варьяціи, проэкціи которыхъ на тѣ же оси выражаются слѣдующими величинами:

Проэкціи варьяцій положеній точекъ

	$M(\Xi)$	$M(\Upsilon)$	$M(\mathbf{Z})$
на ось Ξ	0	$-\theta_\zeta$	θ_η
на ось Υ	θ_ζ	0	$-\theta_\xi$
на ось $\mathbf{Z}$	$-\theta_\eta$	θ_ξ	$0.$

Примѣнимъ теперь формулу (582) къ точкѣ $Ю$ и къ направленію оси Ξ, то-есть въ формулу эту подставимъ: $w_ю$, $\varepsilon_ю$ и Ξ вмѣсто v, ε и U; тогда точкою $M(U)$ (стр. 394) должна будетъ служить точка $M(\Xi)$ и формула (582) приметъ слѣдующій видъ:

$$\delta\Big(w_ю \cos(w_ю\Xi)\Big) = \frac{d(\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\Xi))}{dt} - r\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\Upsilon) + q\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\mathbf{Z}) +$$

$$+ \theta_\zeta w_ю \cos(w_ю\Upsilon) - \theta_\eta w_ю \cos(w_ю\mathbf{Z}),$$

или, при сокращенномъ обозначеніи:

$$\delta\alpha - \frac{d\varkappa_1}{dt} = q\varkappa_3 - r\varkappa_2 - \theta_\eta\gamma + \theta_\zeta\beta\,; \quad . \; . \; . \quad \textbf{(766, a)}$$

подобнымъ же образомъ составимъ еще двѣ слѣдующія формулы:

$$\delta\beta - \frac{d\varkappa_2}{dt} = r\varkappa_1 - p\varkappa_3 - \theta_\zeta\alpha + \theta_\xi\gamma, \quad . \; . \; . \quad \mathbf{(766,\ b)}$$

$$\delta\gamma - \frac{d\varkappa_3}{dt} = p\varkappa_2 - q\varkappa_1 - \theta_\xi\beta + \theta_\eta\alpha. \quad . \; . \; . \quad \mathbf{(766,\ c)}$$

Примѣнимъ формулу (582) къ точкѣ $M(\Upsilon)$ и къ направленію Z, то-есть, въ формулу эту подставимъ: p, θ_ξ и Z вмѣсто $v\cos(vU)$, $\varepsilon\cos(\varepsilon U)$ и U; въ этомъ случаѣ точку $M(\mathsf{Z})$ должно взять въ качествѣ точки $M(U)$; получимъ:

$$\delta p = \frac{d\theta_\xi}{dt} + q\theta_\zeta - r\theta_\eta; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(767,\ a)}$$

подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\delta q = \frac{d\theta_\eta}{dt} + r\theta_\xi - p\theta_\zeta, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(767,\ b)}$$

$$\delta r = \frac{d\theta_\zeta}{dt} + p\theta_\eta - q\theta_\xi. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(767,\ c)}$$

Подставивъ найденныя теперь выраженія разностей въ выраженіе (765) и отобравъ въ немъ члены, заключающіе $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, найдемъ, что эти члены суть:

$$-M\Big[\Big(\frac{d\alpha_c}{dt} - r\beta_c + q\gamma_c\Big)\varkappa_1 + \Big(\frac{d\beta_c}{dt} - p\gamma_c + r\alpha_c\Big)\varkappa_2 + $$
$$+ \Big(\frac{d\gamma_c}{dt} - q\alpha_c + p\beta_c\Big)\varkappa_3\Big],$$

но если примѣнить формулу (293) кинематической части (стр. 251) къ центру инерціи C и къ направленіямъ осей Ξ, Υ, Z, то окажется, что трichлены, помноженные въ послѣднемъ выраженіи на $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, равняются проэкціямъ ускоренія центра инерціи C на оси Ξ, Υ, Z, слѣдовательно, послѣднее выраженіе равняется:

$$- M\dot{w}_c\varepsilon_{ю}\cos(\dot{w}_c, \varepsilon_{ю}).$$

Присоединивъ къ преобразованному такимъ образомъ выраженію

(765) сумму (763), найдемъ, что равенство (567, A) получитъ слѣдующій видъ:

$$(B_x - Mx_c'')\delta x_{ю} + (B_y - My_c'')\delta y_{ю} + (B_c - Mz_c'')\delta z_{ю} +$$
$$((Л_{ю})_\xi - (л_{ю})_\xi' + r(л_{ю})_\eta - q(л_{ю})_\zeta + M\gamma\beta_c - M\beta\gamma_c)\theta_\xi +$$
$$((Л_{ю})_\eta - (л_{ю})_\eta' + p(л_{ю})_\zeta - r(л_{ю})_\xi + M\alpha\gamma_c - M\gamma\alpha_c)\theta_\eta +$$
$$((Л_{ю})_\zeta - (л_{ю})_\zeta' + q(л_{ю})_\xi - p(л_{ю})_\eta + M\beta\alpha_c - M\alpha\beta_c)\theta_\zeta = 0, \quad \textbf{(765, E)}$$

а отсюда, на основаніи леммы § 76-го (стр. 386), выведемъ дифференціальныя уравненія (616, A) (стр. 537) и (758) (стр. 543).

Полученныя дифференціальныя уравненія (758) суть дифференціальныя уравненія перваго порядка относительно величинъ p, q и r; къ нимъ слѣдуетъ еще присоединить уравненія (119) стран. 105 кинематической части:

$$p = -\frac{dж}{dt}\sin ф \cos э + \frac{dф}{dt}\sin э \quad \textbf{(768, a)}$$

$$q = \frac{dж}{dt}\sin ф \sin э + \frac{dф}{dt}\cos э \quad \textbf{(768, b)}$$

$$r = \frac{dж}{dt}\cos ф + \frac{dэ}{dt} \quad \textbf{(768, c)}$$

Можно, кромѣ того, прямо составить Лагранжевы дифференціальныя уравненія втораго порядка относительно координатныхъ параметровъ $ф$, $ж$, $э$, замѣняющія шесть дифференціальныхъ уравненій перваго порядка: (758) и (768); эти уравненія будутъ слѣдующія:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ф'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial ф} + (Л_{ю})_y \cos ж - (Л_{ю})_x \sin ж \quad \textbf{(769, a)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial ж} + (Л_{ю})_z \quad \textbf{(769, b)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial э'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial э} +$$

$$+ ((Л_{ю})_x \cos ж + (Л_{ю})_y \sin ж)\sin ф + (Л_{ю})_z \cos ф; \quad \textbf{(769, c)}$$

при составленіи этихъ уравненій предполагается, что p, q, r, заключающіяся въ выраженіи (733, bis) живой силы T, замѣнены вторыми частями равенствъ (768, a, b, c).

§ 120. Такъ называемое вращеніе твердаго тѣла по инерціи.

Прежде всего остановимся на тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи свободнаго твердаго тѣла равенъ нулю.

Вращательное движеніе, совершаемое въ этихъ случаяхъ твердымъ тѣломъ вокругъ его центра инерціи C, называется *вращеніемъ по инерціи*; въ настоящемъ параграфѣ займемся изученіемъ законовъ этого вращенія.

Прежде всего слѣдуетъ получить интегралы дифференціальныхъ уравненій; число искомыхъ интеграловъ равно 12-ти, такъ какъ число независимыхъ координатныхъ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ, равно шести.

Шесть изъ числа всѣхъ интеграловъ суть интегралы дифференціальныхъ уравненій (616, A) движенія центра инерціи тѣла, остальные шесть суть интегралы дифференціальныхъ уравненій вращательнаго движенія.

Въ разсматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ дифференціальныя уравненія вращенія тѣла вокругъ центра инерціи могутъ быть представлены, или въ видѣ уравненій:

$$\frac{d(л_c)_x}{dt} = 0, \quad \frac{d(л_c)_y}{dt} = 0, \quad \frac{d(л_c)_z}{dt} = 0, \; . \; . \; . \; (770)$$

или въ видѣ Эйлеровыхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} &= (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c)qr \\ \mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} &= (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)rp \\ \mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} &= (\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c)pq \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (762, \text{bis})$$

и уравненій (768).

Интегрируя дифференціальныя уравненія (770), получаемъ три интеграла:

$$(\text{л}_c)_x = C_1,\ (\text{л}_c)_y = C_2,\ (\text{л}_c)_z = C_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(653)}$$

выражающіе, что законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи.

На основаніи формулъ (659) стр. 472, эти интегралы могутъ быть представлены такъ:

$$(\text{л}_c)_\xi \lambda_x + (\text{л}_c)_\eta \mu_x + (\text{л}_c)_\zeta \nu_x = C_1, \ldots$$

или, на основаніи выраженій (761) стр. 544, такъ:

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_x + \mathfrak{B}_c q\mu_x + \mathfrak{C}_c r\nu_x = C_1, \ldots\ldots \quad \textbf{(771, a)}$$

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_y + \mathfrak{B}_c q\mu_y + \mathfrak{C}_c r\nu_y = C_2, \ldots\ldots \quad \textbf{(771, b)}$$

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_z + \mathfrak{B}_c q\mu_z + \mathfrak{C}_c r\nu_z = C_3 \ldots\ldots \quad \textbf{(771, c)}$$

Слѣдовательно, *при вращеніи твердаго тѣла по инерціи, главный моментъ количествъ движенія вокругъ центра инерціи сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе въ пространствѣ.*

Равенство:

$$\mathfrak{A}_c^2 p^2 + \mathfrak{B}_c^2 q^2 + \mathfrak{C}_c^2 r^2 = G^2, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(772)}$$

(гдѣ $G^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$) выражающее, что главный моментъ $(\text{л})_c$ сохраняетъ постоянную величину, есть одинъ изъ интеграловъ Эйлеровыхъ уравненій (762, bis); въ самомъ дѣлѣ, помноживъ первое изъ нихъ на $2\mathfrak{A}_c p$, второе — на $2\mathfrak{B}_c q$, третье — на $2\mathfrak{C}_c r$ и сложивъ эти уравненія, получимъ: во второй части — нуль, а въ первой — производную по t отъ первой части интеграла (772).

Такъ какъ элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ въ настоящемъ случаѣ выразится трichленомъ:

$$B_x dx_c + B_y dy_c + B_z dz_c,$$

и такъ какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (616, A), выражающихъ законъ движенія центра инерціи, слѣдуетъ, что этотъ

трichленъ равняется дифференціалу живой силы центра инерціи $\left(\frac{M}{2} v_c^2\right)$, то остальная часть живой силы, а именно живая сила вращательнаго движенія, должна сохранять постоянную величину:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2) = h; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (773)$$

это равенство, представляющее четвертый интегралъ диффереціальныхъ уравненій вращательнаго движенія тѣла, можетъ быть получено еще слѣдующимъ образомъ: помноживъ уравненія (762, bis) на p, q, r и сложивъ, получимъ во второй части нуль, а въ первой—производную по t отъ первой части равенства (773).

Имѣя эти четыре интеграла, можно уже составить себѣ нѣкоторое понятіе о вращеніи тѣла по инерціи, какъ показали Поансо (Poinsot) и Макъ-Куллахъ (Mac Cullagh).

Поансо замѣтилъ, что при вращеніи тѣла по инерціи центральный эллипсоидъ катится безъ скольженія по двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости; это можетъ быть доказано слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ черезъ центръ инерціи тѣла мгновенную ось и найдемъ точку пересѣченія ея съ поверхностью центральнаго эллипсоида инерціи:

$$\mathfrak{A}_c \xi^2 + \mathfrak{B}_c \eta^2 + \mathfrak{C}_c \zeta^2 = м \, . \, \partial^4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (774)$$

Координаты и радіусъ векторъ ρ этой точки должны удовлетворять уравненію (774) и равенствамъ:

$$\frac{\xi_0}{\rho_0} = \frac{p}{\Omega}, \quad \frac{\eta_0}{\rho_0} = \frac{q}{\Omega}, \quad \frac{\zeta_0}{\rho_0} = \frac{r}{\Omega}; \quad \ldots\ldots \quad (775)$$

подставивъ выраженія для ξ, η, ζ, получаемыя изъ (775), въ уравненіе (774), получимъ:

$$\rho_0^2 = м\partial^4 \cdot \frac{\Omega^2}{\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2} = м\partial^4 \frac{\Omega^2}{2h} \quad \ldots \quad (776)$$

Проведемъ черезъ эту точку (ξ_0, η_0, ζ_0) касательную плоскость

къ эллипсоиду инерціи; разстояніе этой плоскости отъ центра инерціи C будетъ равно:

$$D = \frac{м\partial^4}{\sqrt{\mathfrak{A}_c^2\xi_0^2 + \mathfrak{B}_c^2\eta_0^2 + \mathfrak{C}_c^2\zeta_0^2}},$$

$$D = \frac{м\partial^4 . \Omega}{\rho_0\sqrt{\mathfrak{A}_c^2p^2 + \mathfrak{B}_c^2q^2 + \mathfrak{C}_c^2r^2}} = \sqrt{м\partial^4}\frac{\sqrt{2h}}{G} \text{*)} \quad . \quad . \quad (777)$$

т. е., *плоскость, касательная къ центральному эллипсоиду инерціи въ точкѣ пересѣченія его мгновенною осью, находится въ постоянномъ разстояніи отъ центра инерціи.*

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями Ξ, Υ, Z нормалью N къ эллипсоиду инерціи въ точкѣ (ξ_0, η_0, ζ_0), выразятся такъ:

$$\cos(N,\Xi) = \frac{\mathfrak{A}_c\xi_0}{\sqrt{\mathfrak{A}_c^2\xi_0^2 + \mathfrak{B}_c^2\eta_0^2 + \mathfrak{C}_c^2\zeta_0^2}} = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G} = \cos(л_c, \Xi)$$

$$\cos(N,\Upsilon) = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G} = \cos(л_c, \Upsilon), \quad \cos(N, Z) = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G} = \cos(л_c, Z)$$

т. е., *вышесказанная касательная плоскость перпендикулярна къ направленію главнаго момента количествъ движенія тѣла вокругъ центра инерціи, а слѣдовательно она параллельна неизмѣняемой плоскости.*

Итакъ, при вращеніи тѣла по инерціи, центральный эллипсоидъ

---

*) Можно показать, что D не можетъ быть болѣе длиннѣйшей главной оси эллипсоида инерціи и не можетъ быть менѣе кратчайшей его оси; для того составимъ изъ равенствъ (772) и (773) два слѣдующія:

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\mathfrak{B}q^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{C}r^2 = G^2 - 2h\mathfrak{A}$$

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{A}p^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\mathfrak{B}q^2 = 2h\mathfrak{C} - G^2;$$

если $\mathfrak{A}$ есть наименьшій, а $\mathfrak{C}$ — наибольшій главный моментъ инерціи, то первыя части этихъ двухъ равенствъ не могутъ быть менѣе нуля, а потому

$$\frac{2h}{G^2} \text{ не болѣе } \frac{1}{\mathfrak{A}} \text{ и не менѣе } \frac{1}{\mathfrak{C}}.$$

его постоянно прикасается къ двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости и отстоящимъ отъ нея на разстояніяхъ равныхъ D (777).

Движеніе тѣла и эллипсоида совершается притомъ такъ, что линія, проходящая черезъ центръ и черезъ обѣ точки прикосновенія, есть мгновенная ось вращенія; слѣдовательно, эллипсоидъ инерціи катится безъ скольженія по двумъ вышесказаннымъ плоскостямъ.

Точки прикосновенія непрерывно измѣняютъ свои мѣста и на эллипсоидѣ и на плоскостяхъ; та линія, которую точка прикосновенія чертитъ на эллипсоидѣ, называется *полодіею*, а та, которую она чертитъ на плоскости,—*эрполодіею*.

Угловая скорость Ω не остается постоянною, но проэкція ея на направленіе главнаго момента ($\mathcal{A}_c$) сохраняетъ постоянную величину; въ самомъ дѣлѣ, интегралъ (773) можетъ быть представленъ такъ:

$$\mathfrak{A}_c p \cdot p + \mathfrak{B}_c q \cdot q + \mathfrak{C}_c r \cdot r = 2h,$$

$$\mathcal{A}_c \Omega \cos(\mathcal{A}_c, \Omega) = 2h,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Omega \cos(\mathcal{A}_c, \Omega) = \frac{2h}{G} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (778)$$

Макъ-Куллахъ замѣтилъ, что гираціонный эллипсоидъ (см. стр. 491) при вращеніи тѣла по инерціи движется такъ, что поверхность его проходитъ черезъ двѣ точки, находящіяся на направленіи главнаго момента количествъ движенія тѣла въ постоянныхъ разстояніяхъ отъ центра инерціи.

Чтобы показать это, опредѣлимъ точки пересѣченія поверхности гираціоннаго эллипсоида

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}_c} + \frac{\eta^2}{\mathfrak{B}_c} + \frac{\zeta^2}{\mathfrak{C}_c} = \frac{1}{M} \quad \dots\dots \quad (699, \text{bis})$$

направленіемъ главнаго момента $\mathcal{A}_c$; координаты ξ_1, η_1, ζ_1 и радіусъ векторъ каждой такой точки должны удовлетворять равенствамъ:

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G}, \quad \frac{\eta_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G}, \quad \frac{\zeta_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G};$$

и уравненію (699, bis). Изъ этихъ равенствъ и изъ равенства (773) слѣдуетъ:

$$\rho_1 = \frac{G}{\sqrt{2hM}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (779)$$

т.-е., ρ_1 есть величина постоянная.

Черезъ эту точку проведемъ касательную плоскость къ эллипсоиду; разстояніе ея отъ центра C окажется равнымъ:

$$E = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{2h}{M}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (780)$$

а направленіе ея—перпендикулярнымъ къ мгновенной оси. Слѣдовательно, величина угловой скорости обратно-пропорціональна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра C на касательную плоскость, проведенную къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ (ξ_1, η_1, ζ_1).

Для полнаго рѣшенія вопроса остается произвести еще два интегрированія.

Помноживъ первое изъ Эйлеровыхъ уравненій (762, bis) на $(p:\mathfrak{A}_c)$, второе—на $(q:\mathfrak{B}_c)$, третье—на $(r:\mathfrak{C}_c)$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\frac{(\mathfrak{C}_c-\mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c-\mathfrak{A}_c)(\mathfrak{C}_c-\mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c}pqr.$$

Рѣшивъ равенства (772), (773) и

$$p^2+q^2+r^2=\Omega^2$$

относительно p^2, q^2, r^2, найдемъ *):

$$p^2 = -a(\omega_1^2-\Omega^2),\ q^2 = b(\omega_2^2-\Omega^2),\ r^2 = -c(\omega_3^2-\Omega^2), \quad (781)$$

гдѣ:

$$\omega_1^2 = \frac{2h(\mathfrak{C}+\mathfrak{B})-G^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}},\quad a = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})},$$

$$\omega_2^2 = \frac{2h(\mathfrak{C}+\mathfrak{A})-G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}},\quad b = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})},$$

$$\omega_3^2 = \frac{2h(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})-G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},\quad c = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}.$$

---

*) Для краткости, не будемъ ставить значковъ c внизу буквъ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

На основаніи неравенствъ:

$$2h\mathfrak{C} - G^2 > 0,\ G^2 - 2h\mathfrak{A} > 0 \ldots\ldots (782)$$

окажется, что ω_1^2 и ω_2^2 болѣе нуля и что ω_2^2 болѣе ω_1^2 и ω_3^2; если, кромѣ того, принять въ разсчетъ, что $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$, то окажется, что и ω_3^2 болѣе нуля.

Разность между ω_1^2 и ω_3^2 выразится такъ:

$$(\omega_1^2 - \omega_3^2)\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,(G^2 - 2h\mathfrak{B});$$

отсюда видно, что

$$\omega_1^2 > \omega_3^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0,\ \text{т.-е., если}\ D < \sqrt{\frac{м\delta^4}{\mathfrak{B}}},$$

$$\omega_1^2 < \omega_3^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} < 0,\ \text{т.-е., если}\ D > \sqrt{\frac{м\delta^4}{\mathfrak{B}}},$$

Послѣднее дифференціальное уравненіе, по подстановленіи въ него выраженій (781), приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)} \ . \ . \ (783)$$

Такъ какъ производная отъ Ω^2 не можетъ имѣть мнимыхъ значеній, то Ω_2 не можетъ выходить изъ предѣловъ:

$$\omega_2^2 \text{ и } \omega_1^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0$$

$$\omega_2^2 \text{ и } \omega_3^2,\ \text{если}\ G_2 - 2h\mathfrak{B} < 0.$$

Для интегрированія дифференціальнаго уравненія (783) можно поступить такъ:

1) Если D менѣе длины средней главной полуоси эллипсоида инерціи ($G^2 > 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin^2\varphi;$$

дифференціальное уравненіе (783) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varkappa\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (784)$$

$$\varkappa = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(G^2 - 2h\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} \; . \; . \; . \; . \quad (785)$$

$$k^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}} \cdot \frac{2h\mathfrak{C} - G^2}{G^2 - 2h\mathfrak{A}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (786)$$

Подобно тому, какъ было показано на стр. 209, условимся брать за начальное значеніе φ_0 уголъ, заключающійся въ предѣлахъ:

$$0 > \varphi_0 > -\frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 > 0,$$

и

$$0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 > 0,$$

причемъ квадратъ синуса φ_0 и начальное значеніе φ_0' опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\sin^2\varphi_0 = \frac{\omega_2^2 - \Omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \varphi'_0 = \frac{-\left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0};$$

въ такомъ случаѣ φ будетъ непрерывно возрастать во все время движенія.

Если означить черезъ u интегралъ:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (787)$$

который на стр. 210 обозначенъ черезъ $F(\varphi, k)$, то законъ возрастанія u выразится такъ: $u = u_0 + \varkappa t$, гдѣ $u_0 = F(\varphi_0, k)$.

Величина u (787) есть функція отъ φ и k; обратно, φ есть функція отъ u и k, называемая *амплитудою* отъ u по модулю k; ее обозначаютъ слѣдующимъ знакомъ: $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ или проще: $\operatorname{am} u$.

Слѣдовательно:

$$\varphi = \operatorname{am}(\varkappa t + u_0), \quad \Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin^2\operatorname{am}(\varkappa t + u_0).$$

Функціи:

$$\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \sqrt{1-k^2\sin\varphi}$$

называются *синусомъ амплитуды* (u), *косинусомъ амплитуды* (u) *и дельтою амплитуды* (u); послѣдняя обозначается такъ: $\Delta am u$.

Изъ выраженій (781) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= k\varkappa\sqrt{a}\cos \mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \\ q &= k\varkappa\sqrt{b}\sin \mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \\ r &= \varkappa\sqrt{c}\Delta\,\mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (788)$$

2) Если D болѣе длины средней главной полуоси центральнаго эллипсоида инерціи ($G^2 > 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_3^2)\sin^2\varphi$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(2h\mathfrak{C}-G^2)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}$$

$$k_1^2 = \frac{\omega_2^2-\omega_3^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}\cdot\frac{G^2-2h\mathfrak{A}}{2h\mathfrak{C}-G^2},$$

получимъ тогда:

$$\left.\begin{aligned} p &= \varkappa_1\sqrt{a}\Delta\,\mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \\ q &= \varkappa_1 k_1\sqrt{b}\sin \mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \\ r &= \varkappa_1 k_1\sqrt{c}\cos \mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (789)$$

3) Если D равно длинѣ средней главной полуоси центральнаго эллипсоида инерціи ($G^2 = 2h\mathfrak{B}$), то тогда $\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{2h}{\mathfrak{B}}$, а дифференціальное уравненіе (783) приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -(\Omega^2-\omega_1^2)\sqrt{\omega_2^2-\Omega^2};$$

замѣнивъ $(\omega_2^2 - \Omega^2)$ черезъ $(q^2 : b)$ и интегрируя, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} q &= n\sqrt{b}\,\frac{e^{2(nt+\varepsilon)}-1}{e^{2(nt+\varepsilon)}+1} \\ \frac{p}{\sqrt{a}} &= \frac{r}{\sqrt{c}} = \frac{2ne^{nt+\varepsilon}}{e^{2(nt+\varepsilon)}+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (790)$$

$$n = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{2h(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}; \quad n\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}}.$$

Примемъ направленіе главнаго момента количествъ движенія за ось $Z^{\text{овъ}}$.

Углы ϕ и ϑ опредѣлятся безъ интегрированія изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}p &= G\cos(Z, \Xi) = -G\sin\phi\cos\vartheta, \\ \mathfrak{B}q &= G\cos(Z, \Upsilon) = \quad G\sin\phi\sin\vartheta, \\ \mathfrak{C}r &= G\cos(Z, \mathbf{Z}) = \quad G\cos\phi \end{aligned}\right\} \ldots \quad (791)$$

откуда:

$$\cos\phi = \frac{\mathfrak{C}r}{G} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (792)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}p} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (793)$$

Для опредѣленія ж придется произвести шестое и послѣднее интегрированіе.

Исключимъ ϕ' изъ равенствъ:

$$p = -\text{ж}'\sin\phi\cos\vartheta + \phi'\sin\vartheta, \quad q = \text{ж}'\sin\phi\sin\vartheta + \phi'\cos\vartheta,$$

получимъ:

$$\text{ж}'\sin\phi = q\sin\vartheta - p\cos\vartheta = \frac{q\sin\vartheta\sin\phi - p\cos\vartheta\sin\phi}{\sin\phi},$$

или, на основаніи равенствъ (791):

$$\text{ж}' = \frac{\mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{A}p^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2r^2}\,G = \frac{2h - \mathfrak{C}r^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2r^2}\,G.$$

Отсюда:

$$\text{ж} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{C}}t + (2h\mathfrak{C} - G^2)\frac{G}{\mathfrak{C}}\int\frac{dt}{G^2 - \mathfrak{C}^2 r^2}, \quad \text{. . (794)}$$

гдѣ r^2 должно быть замѣнено полученною выше функціею отъ t.

При $G^2 > 2h\mathfrak{B}$ уголъ ж выразится такъ:

$$\text{ж} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{C}}t + G\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}\int\frac{dt}{1+\mu^2k^2\sin^2\mathrm{am}(\varkappa t + u_0)},$$

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}}t + \frac{G}{\varkappa}\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\mu^2k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi}, \quad \text{. . (794, 1)}$$

$$\mu^2 = \frac{\mathfrak{C}(G^2 - 2h\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}(2h\mathfrak{C} - G^2)}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

При $G^2 < 2h\mathfrak{B}$ уголъ ж выразится такъ:

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}}t + \frac{G}{\varkappa_1}\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\mu_1^2k_1^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi}, \quad \text{. . (794,2)}$$

$$\mu_1^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi}.$$

Слѣдовательно, въ тѣхъ и другихъ случаяхъ:

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}}t + \psi,$$

гдѣ ψ выражается эллиптическимъ интеграломъ третьяго рода отъ φ, взятымъ въ предѣлахъ отъ φ_0 до φ.

При $G^2 = 2h\mathfrak{B}$ представимъ ж' такъ:

$$\text{ж}' = \frac{G}{\mathfrak{B}} + \frac{G}{\mathfrak{B}}\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})r^2}{2h\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2r^2};$$

затѣмъ воспользуемся слѣдующими равенствами, которыя можно вывести изъ формулъ (790):

$$r^2 = c\left(n^2 - \frac{q^2}{b}\right), \quad \left(n^2 - \frac{q^2}{b}\right)dt = \frac{dq}{\sqrt{b}},$$

тогда получимъ:

$$dж = \frac{G}{\mathfrak{B}}\,dt + \frac{\lambda dq}{1+\lambda^2 q^2}; \quad \lambda^2 = \frac{\mathfrak{B}}{2h}\,\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})};$$

отсюда:

$$ж = ж_0 + t\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}} + \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}}\,\frac{e^{2(nt+\varepsilon)}-1}{e^{2(nt+\varepsilon)}+1}\right] \;..\; (794,3)$$

Для того, чтобы составить себѣ представленіе о различныхъ видахъ вращенія тѣла по инерціи, слѣдуетъ ближе ознакомиться съ видомъ полодій и эрполодій, соотвѣтствующихъ различнымъ разстояніямъ D.

Такъ какъ каждая полодія находится на поверхности центральнаго эллипсоида и касательныя къ нему плоскости, проведенныя черезъ точки ея, отстоятъ отъ центра эллипсоида на одномъ и томъ же разстояніи D, то уравненія ея суть:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = мд^4$$

$$\mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2 = \frac{м^2 д^8}{D^2}.$$

Эту же кривую можно разсматривать, какъ линію пересѣченія эллипсоида инерціи съ коническою поверхностью, выражаемою слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{A} - \frac{мд^4}{D^2}\right)\xi^2 + \mathfrak{B}\left(\mathfrak{B} - \frac{мд^4}{D^2}\right)\eta^2 + \mathfrak{C}\left(\mathfrak{C} - \frac{мд^4}{D^2}\right)\zeta^2 = 0 \,.\; (795)$$

Если центръ инерціи неподвиженъ, то эта коническая поверхность представляетъ собою подвижный аксоидъ мгновенныхъ осей (см. стр. 107) кинематической части.

Изъ трехъ коэффиціентовъ этой конической поверхности втораго порядка послѣдній — всегда положительный, а первый — всегда отрицательный, потому что:

$$\frac{м\partial^4}{\mathfrak{A}} \geqslant D^2 \geqslant \frac{м\partial^4}{\mathfrak{C}},$$

коэффиціентъ же у η^2 имѣетъ положительную величину тогда, когда D болѣе длины средней полуоси эллипсоида инерціи и онъ имѣетъ величину отрицательную тогда, когда D менѣе этой полуоси.

Слѣдовательно, если $G^2 < 2h\mathfrak{B}$, т.-е., D длиннѣе средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось Ξ, а потому полодія есть замкнутая кривая, окружающая собою нѣкоторую такую часть поверхности эллипсоида, которая заключаетъ въ себѣ конецъ его большой полуоси; такова, напримѣръ, полодія $e e_1 e_2 e_3$ на чертежѣ 77-мъ.

Если $G^2 > 2h\mathfrak{B}$, т.-е. D короче средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось $\mathbf{Z}$, а полодія есть замкнутая кривая, окружающая собою конецъ малой полуоси на поверхности эллипсоида; такова, напримѣръ, полодія $i i_1 i_2 i_3$.

Каждой полодіи, находящейся на одной половинѣ эллипсоида, соотвѣтствуетъ совершенно такая же другая кривая на другой половинѣ его; обѣ кривыя суть линіи пересѣченія поверхности эллипсоида одною и тою же коническою поверхностью.

При D, равномъ длинѣ средней полуоси, т.-е., при $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, полодіями служатъ два эллипса $\beta b \beta' b'$ и $\beta_, b \beta'_, b'$ (черт. 77), образуемые пересѣченіемъ поверхности эллипсоида плоскостями:

$$\xi = \pm \zeta \sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}}.$$

При G^2, равномъ $2h\mathfrak{A}$, полодіями служатъ концы большихъ главныхъ полуосей, а при G^2, равномъ $2h\mathfrak{C}$, — концы малыхъ полуосей эллипсоида инерціи.

Эрполодіи суть плоскія кривыя, образуемыя пересѣченіемъ той плоскости, по которой эллипсоидъ катается, съ нѣкоторою коническою поверхностью.

Эта коническая поверхность образуется положеніями мгновенной оси въ пространствѣ, когда центръ инерціи вращающагося тѣла неподвиженъ.

Направленіе мгновенной оси въ пространствѣ можетъ быть выражено величинами угловъ ϑ и ψ, подразумѣвая подъ ϑ уголъ, составляемый направленіемъ угловой скорости Ω съ направленіемъ главнаго момента количествъ движенія тѣла (который предполагается параллельнымъ оси $Z^{\text{овъ}}$), а подъ ψ — уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ направленіе мгновенной оси $C\Omega$ и черезъ главный моментъ CZ', съ плоскостью ZOX. Эти углы выражаются слѣдующимъ образомъ въ проэкціяхъ угловой скорости на неподвижныя оси координатъ:

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}},\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{Q}{P}, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(796)}$$

гдѣ

$$R = \frac{2h}{G} \text{ (см. (778)) и } P^2+Q^2 = \Omega^2 - R^2.$$

Для того, чтобы составить уравненіе вышесказанной конической поверхности, слѣдуетъ выразить P и Q функціями времени t и затѣмъ исключить t изъ равенствъ (796).

Вмѣсто этого можно составить дифференціальное уравненіе конической поверхности или даже прямо дифференціальное уравненіе эрполодіи; проинтегрировавъ составленное уравненіе, должны будемъ получить уравненіе эрполодіи въ конечномъ видѣ.

Теперь будетъ выведено дифференціальное уравненіе эрполодіи, но оно будетъ здѣсь проинтегрировано только для случая $G^2 = 2h\mathfrak{B}$.

Прежде всего составимъ выраженіе для производной отъ ψ по t:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{PQ'-QP'}{P^2+Q^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(797)}$$

Поансо нашелъ, что эта производная выражается простою функціею отъ $\operatorname{cotg}\vartheta$; для полученія этого выраженія, подвергнемъ вторую часть равенства (797) слѣдующимъ преобразованіямъ.

Выразивъ P и Q по формуламъ (118), а P' и Q' по формуламъ (132) кинематической части, и совершивъ надлежащія преобразованія, найдемъ:

$$PQ'-QP' = (qr'-rq')\lambda_z + (rp'-pr')\mu_z + (pq'-qp')\nu_z,$$

а если замѣнимъ производныя p', q', r' выраженіями ихъ въ p, q, r, получаемыми изъ дифференціальныхъ уравненій (762, bis), то найдемъ:

$$PQ' - QP' = G\frac{\mathfrak{C}^2\gamma r\nu_g + \mathfrak{B}^2\beta q\mu_g - \mathfrak{A}^2\alpha p\lambda_g}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \quad . \; . \; (797, \text{bis})$$

подразумѣвая подъ α, β и γ слѣдующія выраженія:

$$\alpha = \frac{G}{\mathfrak{A}} - \frac{2h}{G}, \quad \beta = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{B}}, \quad \gamma = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{C}} \; . \; . \; . \; (798)$$

Помощью этихъ величинъ α, β и γ могутъ быть выражены величины ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, именно:

$$\omega_1^2 - R^2 = \frac{2h(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) - G^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} - \frac{4h^2}{G^2} = -\beta\gamma,$$

$$\omega_1^2 = R^2 - \beta\gamma, \quad \omega_2^2 = R^2 + \alpha\gamma, \quad \omega_3^2 = R^2 + \alpha\beta \; . \; . \; . \; . \; (799)$$

Выразивъ, въ (797, bis), косинусы λ_g, μ_g, ν_g въ p, q, r по формуламъ (791), замѣнивъ p^2, q^2, r^2 выраженіями (781), а ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2 — выраженіями (799), и принявъ во вниманіе слѣдующія тождества:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 1,$$

получимъ:

$$PQ' - QP' = R(\Omega^2 - R^2) - \alpha\beta\gamma,$$

а потому:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2}\cot g^2\vartheta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (800)$$

Такова формула, найденная Поансо.

Вмѣсто $\cot g\,\vartheta$ можно ввести въ эту формулу величину радіуса вектора $\mathfrak{r}$ эрполодіи, проведеннаго изъ точки пересѣченія плоскости кривой направленіемъ главнаго момента количествъ движенія. Такъ какъ радіусъ векторъ $\mathfrak{r}$ и разстояніе D суть катеты прямоугольнаго треугольника, имѣющаго гипотенузою радіусъ векторъ эллипсоида инерціи, направленный вдоль по мгновенной оси, то:

$$\mathfrak{r} = D\,\text{tg}\,\vartheta = \varepsilon R\,\text{tg}\,\vartheta = \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - R^2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{M\delta^4}{2h}$$

а потому формула (800) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{\mathfrak{r}^2}\varepsilon^2 \ldots\ldots \quad \mathbf{(800, A)}$$

Производную отъ $\mathfrak{r}$ по t можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{\mathfrak{r}}\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\frac{\varepsilon^2}{\mathfrak{r}}\sqrt{(\omega_2^2-\Omega^2)(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_3^2)},$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon\mathfrak{r}}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma-\mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2+\varepsilon^2\beta\gamma)(\mathfrak{r}^2-\varepsilon^2\alpha\beta)} \ldots \quad \mathbf{(801, A)}$$

Изъ уравненій (800, A) и (801, A) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе эрполодій:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\psi} = -\frac{\mathfrak{r}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma-\mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2+\varepsilon^2\beta\gamma)(\mathfrak{r}^2-\varepsilon^2\alpha\beta)}}{\varepsilon(R\mathfrak{r}^2-\varepsilon^2\alpha\beta\gamma)} \ldots \quad \mathbf{(802, A)}$$

Въ томъ случаѣ, когда $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, т.-е. $\beta = 0$, это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$-\frac{d\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\sqrt{\varepsilon^2\alpha\gamma-\mathfrak{r}^2}} = \frac{d\psi}{\varepsilon R};$$

интегрируя, получимъ уравненіе кривой линіи:

$$\frac{\varepsilon\varkappa R}{\mathfrak{r}} = \frac{e^{\varkappa(\psi+c)}+e^{-\varkappa(\psi+c)}}{2} \ldots\ldots \quad \mathbf{(803)}$$

$$\varkappa = \frac{n}{R} = \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2h(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}},$$

гдѣ c есть произвольная постоянная.

Кривая, выражаемая уравненіемъ (803), изображена на черт. 78-мъ. Она имѣетъ видъ двойной спирали, обѣ половины которой ассимптотически завиваются вокругъ точки K ($\mathfrak{r}$ приближается къ нулю при приближеніи ψ къ $+\infty$ и къ $-\infty$); при $\psi = -c$ радіусъ векторъ кривой имѣетъ наибольшую величину. Линія MKN, на которой находятся точки пересѣченія обѣихъ половинъ кривой, есть ось симметріи ея.

При помощи полученныхъ выше дифференціальныхъ уравненій можно составить себѣ понятіе о нѣкоторыхъ свойствахъ прочихъ эрполодій; начнемъ съ кривыхъ, соотвѣтствующихъ разстояніямъ D, меньшимъ длины средней полуоси эллипсоида инерціи.

Въ этихъ случаяхъ $2h\mathfrak{B} < G^2$, то есть $\beta < 0$; означимъ положительную величину $(-\beta)$ черезъ β_1:

$$\beta_1 = -\beta = \frac{G}{\mathfrak{B}} - \frac{2h}{G} = \frac{G}{\mathfrak{B}} - R;$$

тогда дифференціальныя уравненія (800, A) и (801, A) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R + \frac{\alpha\beta_1\gamma}{\mathfrak{r}^2}\varepsilon^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{(800, B)}$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon\mathfrak{r}}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2 - \varepsilon^2\beta_1\gamma)(\mathfrak{r}^2 + \varepsilon^2\alpha\beta_1)} \quad . \; . \quad \mathbf{(801, B)}$$

Изъ послѣдняго уравненія видно, что вся кривая заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$\mathfrak{r}_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{r}_2 = \varepsilon\sqrt{\beta_1\gamma}$$

и что она прикасается, поочередно, то къ наружной окружности радіуса $\mathfrak{r}_1$, то ко внутренней—радіуса $\mathfrak{r}_2$. Изъ дифференціальнаго уравненія (800, B) видно, что при $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ угловая скорость радіуса вектора $\mathfrak{r}$ имѣетъ наименьшую величину $(R + \beta_1)$, т.-е. $(G : \mathfrak{B})$, а при $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2$ — наибольшую величину $(R = \alpha)$, т.-е. $(G : \mathfrak{A})$. На чертежахъ 79-мъ, 80-мъ и 81-мъ изображены нѣкоторыя изъ замкнутыхъ эрполодій этого вида.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разстояніе D болѣе средней полуоси эллипсоида инерціи, величина β болѣе нуля, такъ какъ $2h\mathfrak{B} > G^2$.

Изъ дифференціальнаго уравненія (801, A) видно, что при положительномъ β эрполодія заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$\mathfrak{r}_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{r}_2 = \varepsilon\sqrt{\alpha\beta}$$

и что она прикасается къ нимъ поочередно. Изъ дифференціальнаго уравненія (800, A) видно, что угловая скорость радіуса вектора $\mathfrak{r}$ имѣетъ наибольшую величину $(R - \beta) = (G : \mathfrak{B})$ при наибольшей величинѣ $(\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1)$ и наименьшую величину $(R - \gamma) = (G : \mathfrak{C})$ при наименьшей величинѣ $(\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2)$ радіуса вектора. Примѣры эрполодій этого рода см. на чертежахъ: 86, 87, 88 и 89.

При $G^2 = 2h\mathfrak{A}$ эрполодіею служитъ точка K, въ которой плоскость прикасается къ концу большой полуоси эллипсоида; при

$G^2 = 2h\mathfrak{S}$ эрполодіею служитъ точка прикосновенія плоскости къ концу малой полуоси эллипсоида.

§ 121. Различіе между главными осями инерціи по отношенію къ устойчивости вращенія.

Вращеніе твердаго тѣла по инерціи можетъ совершаться съ постоянною угловою скоростью только вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференціальнаго уравненія (783) видно, что Ω^2 можетъ быть равно постоянной величинѣ только при условіи, чтобы оно равнялось одной изъ трехъ величинъ: ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2; а изъ выраженій (781) слѣдуетъ, что тогда равна нулю одна изъ величинъ p, q или r. Положимъ, что $\Omega^2 = \omega_1^2$, такъ что $p = 0$; если взглянемъ на первое изъ дифференціальныхъ уравненій (762, bis), то увидимъ, что p не можетъ быть постоянно равнымъ нулю безъ того, чтобы не была равною нулю одна изъ двухъ другихъ проэкцій угловой скорости: q или r.

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что Ω можетъ быть постоянною величиною только въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) если постоянно $p = 0$ и $q = 0$,
2) если постоянно $r = 0$ и $p = 0$,
3) если постоянно $q = 0$ и $r = 0$;

въ первомъ случаѣ тѣло вращается вокругъ малой оси эллипсоида инерціи, во второмъ — вокругъ средней, въ третьемъ — вокругъ большей.

Въ этихъ случаяхъ ось вращенія сохраняетъ не только неизмѣнное положеніе въ твердомъ тѣлѣ, но и кромѣ того постоянное направленіе въ пространствѣ, въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи имѣющихся формулъ.

Напримѣръ, если $p = 0$ и $r = 0$, то изъ формулъ (791) видно, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, а тогда изъ формулъ (107) и (108) кинематической части (стр. 94—95) заключимъ, что:

$$P = 0, \ Q = 0,$$

слѣдовательно, угловая скорость постоянно совпадаетъ съ осью $Z^{\text{овъ}}$.

Изъ этого слѣдуетъ, ***что свободное твердое тѣло можетъ вращаться по инерціи равномѣрно только вокругъ своихъ главныхъ осей инерціи; при такомъ вращеніи та ось, вокругъ которой вращеніе происходитъ, сохраняетъ постоянное направленіе въ пространствѣ.***

Для того, чтобы тѣло вращалось вокругъ которой-либо изъ главныхъ осей инерціи, необходимо, чтобы начальная угловая скорость была направлена по этой оси.

Совпадаетъ ли начальная угловая скорость съ одною изъ главныхъ осей инерціи, или нѣтъ, во всякомъ случаѣ, для полнаго опредѣленія вращательнаго движенія твердаго тѣла необходимо знать начальныя положенія главныхъ осей инерціи въ пространствѣ, начальное направленіе угловой скорости и начальную величину ея, т.-е., начальныя значенія угловъ *ф*, *ж*, *э* и проэкцій P, Q, R угловой скорости на направленія неподвижныхъ осей координатъ. По этимъ начальнымъ даннымъ и по формуламъ (47) — (54) кинематической части опредѣлимъ начальныя значенія косинусовъ λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z, а затѣмъ, по формуламъ (116) кинематической части, — начальныя значенія p_0, q_0, r_0 проэкцій угловой скорости на направленія осей Ξ, Υ, Z; далѣе, по формуламъ (772) (стр. 550) и (761) (стр. 544), опредѣлимъ величину G главнаго момента количествъ движенія тѣла (вокругъ центра инерціи) и начальное направленіе его относительно осей Ξ, Υ, Z, а по формуламъ (659) стр. (472) опредѣлимъ направленіе его въ пространствѣ. Это направленіе возьмемъ за ось $Z^{\text{овъ}}$, а два другія направленія, перпендикулярныя къ нему и между собою — за оси $X^{\text{овъ}}$ и $Y^{\text{овъ}}$. Величину живой силы вращательнаго движенія тѣла вокругъ центра инерціи опредѣлимъ по формулѣ (773).

Имѣя численныя значенія величинъ G и $2h$, опредѣлимъ величину отношенія $(G^2:2h)$; сравнивъ ее съ величинами главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи даннаго твердаго тѣла, встрѣтимся съ однимъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

$$1)\ \frac{2h}{G^2}=\mathfrak{C}_c,\quad 2)\ \mathfrak{C}_c>\frac{G^2}{2h}>\mathfrak{B}_c,\quad 3)\ \frac{G^2}{2h}=\mathfrak{B}_c,$$

$$4)\ \mathfrak{B}_c>\frac{G^2}{2h}>\mathfrak{A}_c,\quad 5)\ \frac{G^2}{2h}=\mathfrak{A}_c.$$

1) Если $G^2=2h\mathfrak{C}_c$, то формула (786) (стр. 556) дастъ $k=0$, а

потому формулы (787), (788), (792) дадутъ $\varphi = u = \varkappa t$, $p = 0$, $q = 0$, $r = \varkappa\sqrt{c}$, $\psi = 0$; очевидно, это есть случай вращенія тѣла вокругъ малой оси центральнаго эллипсоида.

2) Если G^2 не равно $2h\mathfrak{C}_c$, но болѣе $2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (784) — (788), (792), (793) и (794, 1); постоянная u_0 и знаки корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ должны быть опредѣлены по величинамъ и знакамъ начальныхъ: p_0, q_0, r_0.

3) Если $G^2 = 2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (790), (792), (793) и (794, 3); изъ формулъ (790) видно, что при возрастаніи t до безконечности величины p и r приближаются къ нулю, а q — къ $\pm n\sqrt{b}$, то-есть, къ

$$\pm\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_c}},$$

поэтому мгновенная ось ассимптотически приближается къ совпаденію съ положительною или съ отрицательною осью Y.

Мы будемъ подразумѣвать подъ n положительно взятую величину корня:

$$n = +\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_c}\,\frac{(\mathfrak{C}_c-\mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c-\mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_c}};$$

тогда знаки корней $\sqrt{a}$ и $\sqrt{c}$ опредѣлятся по знакамъ начальныхъ величинъ p_0 и r_0, какъ это видно изъ равенствъ:

$$\frac{p_0}{\sqrt{a}} = \frac{r_0}{\sqrt{c}} = \frac{2n}{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(804)}$$

(Эти равенства, а также и слѣдующее:

$$q_0 = n\sqrt{b}\,\frac{e^{2\varepsilon}-1}{e^{2\varepsilon}+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(805)}$$

получаются изъ формулъ (790) при ($t = 0$)).

Изъ равенствъ (804) слѣдуетъ, что знакъ корня $\sqrt{a}$ долженъ быть одинаковъ со знакомъ величины p_0 и знакъ корня $\sqrt{c}$ — одинаковъ со знакомъ величинъ r_0; знаки величинъ p и r остаются неизмѣнными во все время движенія.

Мы условились считать n положительнымъ; въ силу этого условія изъ выраженія для q ((790), стр. 558) слѣдуетъ, что при возрастаніи t

до безконечности q приближается къ $n\sqrt{b}$; съ другой стороны изъ дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathfrak{C}_e - \mathfrak{A}_e}{\mathfrak{B}_e} rp$$

и изъ того обстоятельства, что знаки величинъ r, p не могутъ измѣниться при движеніи, слѣдуетъ, что q либо непрерывно возрастаетъ, либо убываетъ во все время движенія; а именно, q непрерывно возрастаетъ, если начальныя значенія p_0 и r_0 оба положительныя или оба отрицательныя; если же одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное, то q непрерывно убываетъ. Отсюда мы должны заключить, что корень $\sqrt{b}$ долженъ быть взятъ съ плюсомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 > 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 < 0$ и, обратно, корень $\sqrt{b}$ долженъ быть взятъ съ минусомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 < 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 > 0$; въ первыхъ случаяхъ угловая скорость непрерывно приближается къ совпаденію съ положительною осью Y, во вторыхъ—къ совпаденію съ отрицательною осью Y.

Придавъ корню $\sqrt{b}$ надлежащій знакъ, опредѣлимъ e^{ξ} изъ равенства (805).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, при разсматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ вращенія тѣла, точка пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида перемѣщается по направленію (см. чертежъ 82-й) стрѣлки s_1, если начальное положеніе ея было на полуэллипсѣ $b'\beta b$; стрѣлки s_2, h_1, h_2 указываютъ направленія перемѣщеній ея въ тѣхъ случаяхъ, когда начальныя положенія ея находятся на прочихъ полуэллипсахъ. Во всякомъ случаѣ эта точка на эллипсоидѣ приближается ассимптотически къ точкѣ b или b', а на эрполодіи она движется по спирали (черт. 78) въ одну сторону, не измѣняя направленія движенія по кривой, приближаясь ассимптотически къ точкѣ K.

Если въ начальный моментъ $p_0 = 0$ и $r_0 = 0$, то изъ равенствъ (804) слѣдуетъ, что тогда e^{ξ} равно ∞, а потому тогда $q = n\sqrt{b} = q_0$; это—случай вращенія тѣла вокругъ средней оси эллипсоида инерціи.

4) Если G^2 менѣе $2h\mathfrak{B}_e$, то вращеніе тѣла выражается формулами (789), (792), (793), (794, 2). Знаки корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ и величина постоянной u_0 должны быть опредѣлены по начальнымъ: p_0, q_0, r_0.

5) Если $G^2 = 2h\mathfrak{A}_e$, то $k_1 = 0$, а потому формулы (789) дадутъ $p = \varkappa_1\sqrt{a}$, $q = 0$, $r = 0$; это случай вращенія твердаго тѣла вокругъ большой оси эллипсоида инерціи.

Главныя оси наибольшаго и наименьшаго момента инерціи называются *осями устойчиваго вращенія*, а главная ось средняго момента инерціи называется *осью неустойчиваго вращенія*; сейчасъ будетъ объяснено, почему онѣ могутъ быть такъ названы.

Если тѣло вращается вокругъ меньшей оси Cc (черт. 82) эллипсоида инерціи и какая-либо причина отклонитъ угловую скорость отъ этого направленія на весьма малый уголъ, а затѣмъ тѣлу будетъ снова предоставлено вращаться по инерціи, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Cc и при дальнѣйшемъ движеніи не превысить нѣкотораго весьма малаго предѣла, такъ какъ полодія, описываемая точкою пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида, будетъ замкнутая кривая fff, окружающая точку c весьма тѣсно со всѣхъ сторонъ.

То же самое можно сказать и относительно вращенія вокругъ большей оси Ca эллипсоида инерціи; если какая либо причина отклонитъ точку пересѣченія эллипсоида мгновенною осью изъ a въ g_1, то при дальнѣйшемъ движеніи эта точка будетъ описывать полодію g_1gg_2; если уголъ aCg_1 весьма малъ, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Ca будетъ весьма малымъ и во всякій моментъ движенія, потому что всѣ точки полодіи g_1gg_2 почти столь же близки къ точкѣ a, какъ и точка g_1.

Слѣдовательно, если тѣло вращается вокругъ большей или меньшей оси эллипсоида инерціи, и если ему будетъ сообщенъ слабый толчекъ, вслѣдствіе котораго угловая скорость отклонится отъ оси на весьма малый уголъ, то угловая скорость не будетъ совпадать съ осью и потомъ, но будетъ описывать около нея нѣкоторую коническую поверхность съ весьма острымъ угломъ при вершинѣ. Если толчекъ очень слабъ, то отклоненія угловой скорости отъ оси инерціи столь ничтожны, что вращеніе тѣла почти не отличается отъ вращенія вокругъ оси инерціи.

Поэтому и можно сказать, что вращенія твердаго тѣла вокругъ крайнихъ осей инерціи имѣютъ устойчивый характеръ. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что такая устойчивость имѣетъ мѣсто, въ какую бы сторону ни было направлено отклоненіе угловой скорости, происходящее вслѣдствіе толчка.

Если вращеніе происходило вокругъ средней оси Cb, то дѣйствіе весьма малаго толчка можетъ повлечь за собою различныя измѣненія движенія тѣла, въ зависимости отъ того, по какому направленію будетъ отклоненъ изъ точки b конецъ мгновенной оси. Если толчекъ перенесъ этотъ конецъ изъ b въ s_1 или въ s_2 (см. черт. 82), то при дальнѣйшемъ движеніи конецъ мгновенной оси будетъ приближаться къ точкѣ b; слѣдовательно, отклоненіе угловой скорости по одному изъ этихъ двухъ направленій влечетъ за собою постепенное, хотя и весьма медленное, возвращеніе ея къ оси Г^{овъ}. Напротивъ, отклоненіе конца мгновенной оси изъ точки b въ h_1 или h_2 влечетъ за собою дальнѣйшее удаленіе его отъ b; если же толчекъ отклонилъ конецъ мгновенной оси изъ b въ k_1, k_2, n_1 или въ n_2, то дальнѣйшее перемѣщеніе этого конца совершается по полодіямъ, изображеннымъ на чертежѣ; при этомъ отклоненіе угловой скорости отъ оси Cb въ концѣ концовъ дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Cb.

Слѣдовательно, вращеніе вокругъ оси Cb имѣетъ устойчивый характеръ только тогда, когда угловая скорость, отклоняясь отъ оси Cb, остается въ плоскости $\beta b \beta'$, при отклоненіяхъ же по всѣмъ остальнымъ направленіямъ вращеніе оказывается неустойчивымъ; по этой причинѣ средняя ось инерціи и называется осью неустойчиваго вращенія.

§ 122. Вращательное движеніе по инерціи такого твердаго тѣла, центральный эллипсоидъ котораго есть эллипсоидъ вращенія или шаръ.

Если $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c$, т.-е., эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то вращательное движеніе по инерціи получаетъ болѣе простой видъ, потому что какъ полодіи, такъ и эрполодіи будутъ кругами, слѣдовательно, уголъ ϕ, составляемый осью Z съ направленіемъ главнаго момента количествъ движенія, будетъ сохранять постоянную величину, а поэтому и проэкція главнаго момента на направленіе Z будетъ постоянна; но такъ какъ:

$$\mathfrak{C}_c r = G \cos \phi,$$

то отсюда слѣдуетъ, что

$$r = \frac{G \cos \phi}{\mathfrak{C} c}$$

имѣетъ величину постоянную, слѣдовательно, вращеніе тѣла вокругъ оси $C\mathbf{Z}$ совершается равномѣрно, а потому и плоскость $\mathbf{Z}CG$ (черт. 83 и 84) вращается вокругъ линіи CG равномѣрно.

Но эллипсоидъ инерціи можетъ быть удлиненнымъ или сжатымъ; въ первомъ случаѣ угловая скорость Ω заключается внутри угла $GC\mathbf{Z}$ (черт. 83), во второмъ—внѣ (черт. 84); въ первомъ случаѣ подвижный аксоидъ, образуемый положеніями мгновенной оси внутри тѣла, будетъ внѣ аксоида неподвижнаго, образуемаго положеніями мгновенной оси въ пространствѣ; во второмъ случаѣ подвижный аксоидъ обнимаетъ собою аксоидъ неподвижный, какъ изображено на чертежѣ (84); этотъ наружный конусъ катится безъ скольженія по внутреннему неподвижному конусу.

Если начальная угловая скорость направлена по оси $\mathbf{Z}$ или по одной изъ экваторіальныхъ осей эллипсоида инерціи, то ось вращенія сохраняетъ неизмѣнное положеніе, какъ въ тѣлѣ, такъ и въ пространствѣ.

Ось $\mathbf{Z}$ есть устойчивая ось вращенія, а каждая экваторіальная ось—неустойчивая; послѣднее видно изъ слѣдующаго: если осью вращенія служила какая-либо экваторіальная ось Ca (черт. 85) и какая-либо причина перенесла конецъ мгновенной оси въ точку α, то при дальнѣйшемъ движеніи этотъ конецъ будетъ перемѣщаться по полодіи $\alpha\alpha_1$, отклоненіе угловой скорости отъ оси Ca дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Ca.

Если эллипсоидъ инерціи—шаръ, то всякая ось есть ось инерціи; вращеніе такого тѣла по инерціи совершается съ постоянною угловою скоростью вокругъ всякой центральной оси, причемъ эта ось сохраняетъ неизмѣнное положеніе въ тѣлѣ и неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

§ 123. Примѣры силъ, при дѣйствіи которыхъ свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи.

Если къ свободному твердому тѣлу не приложено никакихъ внѣшнихъ силъ, то его центръ инерціи движется прямолинейно и равномѣрно, а самое тѣло вращается вокругъ своего центра по законамъ, приведеннымъ въ предыдущихъ параграфахъ; полное движеніе, совершаемое при этомъ твердымъ тѣломъ, называется движеніемъ его по инерціи.

Примѣръ 99-й. Свободное твердое тѣло подвержено только силѣ тяжести, такъ что къ каждому элементу объема тѣла приложена сила, направленная по оси $У^{овъ}$, и равная $\sigma g dx dy dz$, гдѣ σ есть плотность вещества тѣла въ этомъ элементѣ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ къ тѣлу, будутъ:

$$B_x = 0,\ B_y = g\int\int\int \sigma dx dy dz = gM,\ B_z = 0,$$

гдѣ интегрированіе распространено на весь объемъ твердаго тѣла, а M означаетъ массу тѣла.

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента этихъ силъ вокругъ центра инерціи будутъ равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ здѣсь $X_i = 0,\ У_i = \sigma g dx dy dz,\ Z_i = 0$, то:

$$(Л_c)_x = -g\int\int\int \sigma(z - z_c) dO = -g\int\int\int \sigma z dO + g z_c M = 0$$

$$(Л_c)_y = 0,\ (Л_c)_z = g\int\int\int \sigma x dO - g x_c M = 0.$$

Поэтому центръ инерціи твердаго тѣла будетъ двигаться какъ тяжелая матерьяльная точка массы M (см. стр. 81):

$$x_c = \alpha t,\ y_c = \frac{gt^2}{2} + \beta t,\ z_c = 0,$$

а тѣло будетъ вращаться вокругъ своего центра по инерціи.

Примѣръ 100-й. Всѣ элементы свободнаго твердаго тѣла притягиваются къ началу координатъ; силы притяженія пропорціональны массамъ элементовъ и ихъ разстояніямъ отъ начала координатъ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ силы, приложенной къ элементу тѣла, суть:

$$X_i = -\mu x\sigma dO,\ Y_i = -\mu y\sigma dO,\ Z_i = -\mu z\sigma dO,$$

слѣдовательно, проэкціи главнаго вектора равны:

$$B_x = -\mu\int\int\int\sigma x dO = -\mu M x_c,$$

$$B_y = -\mu M y_c,\ B_z = -\mu M z_c,$$

а проэкціи главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи равны нулю; напримѣръ:

$$(Л_c)_x = -\mu\int\int\int\sigma((y-y_c)z-(z-z_c)y)dO =$$

$$= \mu(y_c\int\int\int\sigma z dO - z_c\int\int\int\sigma y dO) = 0.$$

Поэтому, при дѣйствіи этихъ силъ, центръ инерціи тѣла будетъ двигаться какъ свободная матерьяльная точка массы M, притягиваемая къ началу координатъ силою: μMr, а самое тѣло вращается вокругъ этого центра по инерціи.

§ 124. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Положимъ, что къ матерьяльнымъ точкамъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, образующимъ одну неизмѣняемую систему, приложены внѣшнія силы, имѣющія потенціалы, такъ, что къ точкѣ m_1 приложена сила, имѣющая потенціалъ $V_1(x_1, y_1, z_1)$, къ точкѣ m_2 — сила, имѣющая потенціалъ $V_2(x_2, y_2, z_2)$, и т. д.; V_1 есть какая-либо функція отъ абсолютныхъ координатъ точки m_1, V_2—какая-либо функція отъ координатъ точки m_2, и т. д.

6 –

Динамическое уравненiе вращенiя

$$M = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

применимо только при $J = const.$, напр. когда J есть приведенный момент инерцiи механизма къ главному валу.

При переменномъ J будетъ

$$M = J \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \cdot \omega^2$$

...ится, какъ

...мы по фор-
...ратится въ
...ю, ϕ, $ж$, $э$,
...ранствѣ.
...и получить
...нныхъ силъ
...на оси $X^{овъ}$
...часъ дока-
... величины
... оси $X^{овъ}$,
...выражаютъ
...J (см. стр.

...манiе, что

(806)

Примѣръ 100-й. Всѣ элементы свободнаго твердаго тѣла притягиваются къ началу координатъ; силы притяженія пропорціональны массамъ элементовъ и ихъ разстояніямъ отъ начала координатъ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ силы, приложенной къ элементу тѣла, суть:

$$X_i = -\mu x\sigma dO, \quad Y_i = -\mu y\sigma dO, \quad Z_i = -\mu z\sigma dO,$$

слѣдовательно, проэкціи главнаго вектора равны:

$$B_x = -\mu\int\int\int \sigma x dO = -\mu M x_c,$$

$$B_y = -\mu M y_c, \quad B_z = -\mu M z_c,$$

а проэкціи главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи равны нулю; напримѣръ:

$$(Л_c)_x = -\mu\int\int\int \sigma((y-y_c)z-(z-z_c)y)dO =$$

$$= \mu(y_c\int\int\int \sigma z dO - z_c\int\int\int \sigma y dO) = 0.$$

Поэтому, при дѣйствіи этихъ силъ, центръ инерціи тѣла будетъ двигаться какъ свободная матерьяльная точка массы M, притягиваемая къ началу координатъ силою: μMr, а самое тѣло вращается вокругъ этого центра по инерціи.

§ 124. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Положимъ, что къ матерьяльнымъ точкамъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, образующимъ одну неизмѣняемую систему, приложены внѣшнія силы, имѣющія потенціалы, такъ, что къ точкѣ m_1 приложена сила, имѣющая потенціалъ $V_1(x_1, y_1, z_1)$, къ точкѣ m_2 — сила, имѣющая потенціалъ $V_2(x_2, y_2, z_2)$, и т. д.; V_1 есть какая-либо функція отъ абсолютныхъ координатъ точки m_1, V_2—какая-либо функція отъ координатъ точки m_2, и т. д.

Потенціалъ всей совокупности этихъ силъ выразится, какъ намъ уже извѣстно (стр. 506 (727)), суммою:

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} V_i.$$

Если выразить абсолютныя координаты точекъ системы по формуламъ (45) кинематической части (стр. 56), то U обратится въ функцію отъ шести координатныхъ параметровъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, *ф*, *ж*, *э*, выражающихъ положеніе неизмѣняемой среды въ пространствѣ.

Зная выраженіе функціи U, мы будемъ въ состояніи получить изъ него выраженія проэкцій главнаго вектора приложенныхъ силъ на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ и проэкціи главнаго момента ихъ на оси $X^{овъ}$ $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ и на оси Ξ, Υ, Z, потому что, какъ сейчасъ докажемъ, производныя отъ U по $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ выражаютъ величины проэкцій главнаго вектора всей совокупности силъ на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$, а производныя отъ U по *ф*, *ж* и *э* выражаютъ величины проэкцій главнаго момента на направленія N (см. стр. 96 кинематической части), Z и Z.

Взявъ производную отъ U по $x_ю$ и принявъ во вниманіе, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_ю} = 1$, мы легко найдемъ, что:

$$\frac{\partial U}{\partial x_ю} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_ю} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = B_x;$$

такимъ образомъ окажется:

$$B_x = \frac{\partial U}{\partial x_ю}, \; B_y = \frac{\partial U}{\partial y_ю}, \; B_z = \frac{\partial U}{\partial z_ю} \quad \ldots \quad \textbf{(806)}$$

Составимъ выраженіе производной отъ U по *ф*:

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial ф} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial ф} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial ф} \right),$$

гдѣ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial ф} = \xi_i \frac{\partial \lambda_x}{\partial ф} + \eta_i \frac{\partial \mu_x}{\partial ф} + \zeta_i \frac{\partial \nu_x}{\partial ф};$$

замѣнивъ здѣсь ξ_i, η_i, ζ_i ихъ выраженіями въ разностяхъ $(x_i - x_ю)$, $(y_i - y_ю)$, $(z_i - z_ю)$, т.-е. сдѣлавъ то же самое, что было дѣлаемо при преобразованіи выраженій (93) кинематической части въ выраженія (96), получимъ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial ф} = (z_i - z_ю)Q(ф) - (y_i - y_ю)R(ф),$$

гдѣ $P(ф)$, $Q(ф)$, $R(ф)$ отличаются отъ выраженій ((95) кинематической части, стр. 84) для P, Q, R тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто производныхъ отъ λ_x, λ_y, ... ν_z по t, входятъ производныя отъ тѣхъ же косинусовъ по $ф$; т.-е., если въ выраженіяхъ (95) кинематической части замѣнимъ dt черезъ $dф$, то получимъ выраженія для $P(ф)$, $Q(ф)$, $R(ф)$.

Другія выраженія для $P(ф)$, $Q(ф)$ и $R(ф)$ получимъ изъ выраженій (107), (108) и (109) кинематической части, если замѣнимъ въ нихъ производную $ф'$ — единицею, а производныя $ж'$ и $э'$ — нулями; тогда получимъ:

$$P(ф) = -\sin ж,\ \ Q(ф) = \cos ж,\ \ R(ф) = 0.$$

Поэтому выраженіе для производной отъ U по $ф$ преобразуется въ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = -\sin ж \sum_{i=1}^{i=n}\left((y_i - y_ю)\frac{\partial V_i}{\partial z_i} - (z_i - z_ю)\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\right) +$$

$$+ \cos ж \sum_{i=1}^{i=n}\left((z_i - z_ю)\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - (x_i - x_ю)\frac{\partial V_i}{\partial z_i}\right)$$

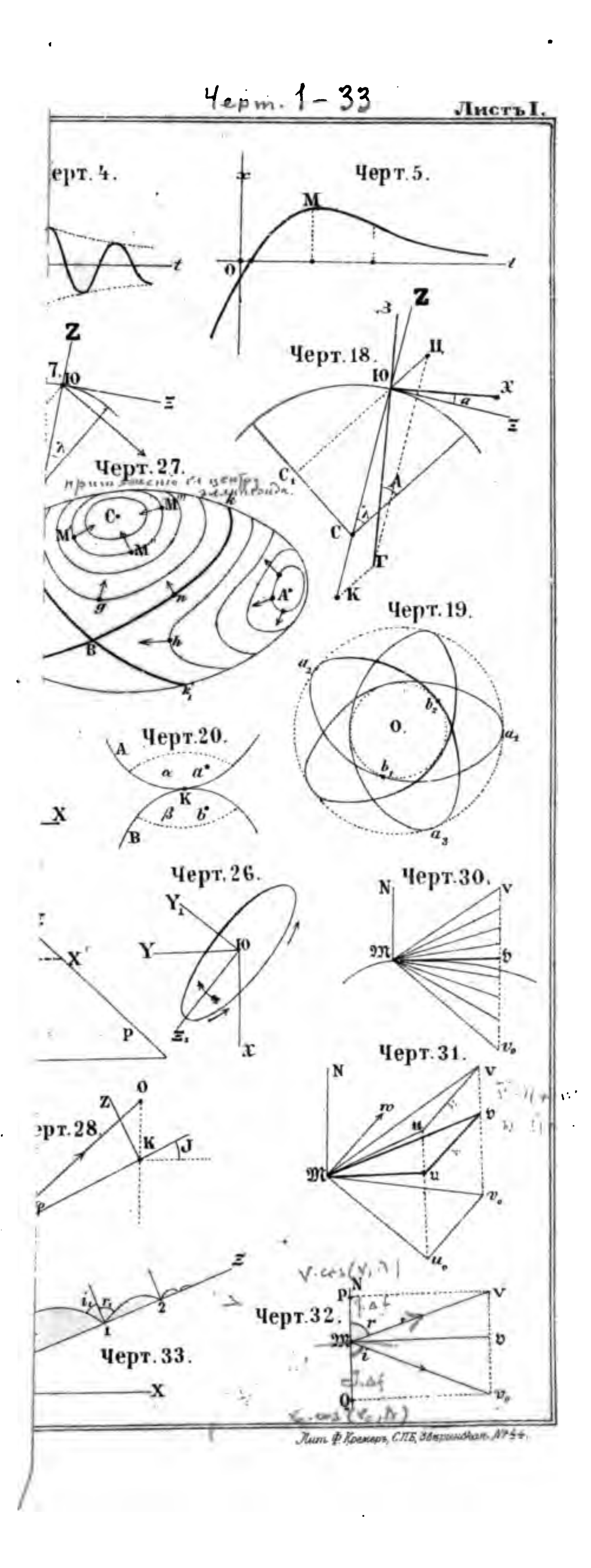
$$\frac{\partial U}{\partial ф} = (Л_ю)_y \cos ж - (Л_ю)_x \sin ж \ \ldots\ldots \quad \mathbf{(807)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = (Л_ю)_x \cos(N, X) + (Л_ю)_y \cos(N, У),$$

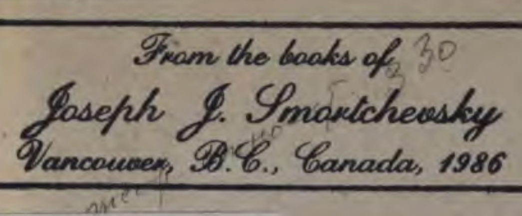
т.-е., эта производная выражаетъ величину проэкціи на направленіе N главнаго момента силъ вокругъ точки $(Ю)$:

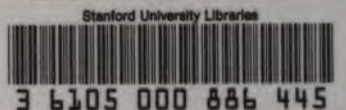
$$\frac{\partial U}{\partial ф} = Л_ю \cos(Л_ю, N) \ \ldots\ldots \quad \mathbf{(807, bis)}$$

Черт. 1 – 33



Лит. Ф. Кремер, СПБ, Звенигород. № 24.





стр. 117

стр. 399

стр. 185.

ACP3583

